

一类齐次 Moran 集的 Hausdorff 测度

肖祖彪, 刘卫斌

(武汉大学数学与统计学院, 湖北 武汉 430072)

摘 要: 本文研究了一类新的齐次 Moran 集. 利用 $x^s (0 < s < 1)$ 的凸性方法, 获得了它的 Hausdorff 测度, 推广了齐次 cantor 集的结果.

关键词: 齐次 Moran 集; 凸性; Hausdorff 测度

MR(2010) 主题分类号: 28A80; 28A78

中图分类号: O174.12

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2016)01-0164-07

1 引言

计算与估计分形集的 Hausdorff 维数与测度是分形几何研究的重要内容之一. 一般地说, 计算分形集合的 Hausdorff 维数, 特别是计算 Hausdorff 测度是非常困难的. 在满足开集条件下, 自相似集的 Hausdorff 维数已被完全确定 (参见文 [1]). 但就在这种情形, Hausdorff 测度的计算与估计, 除直线上 Cantor 集及其种种变形之外, 也几乎无任何结果 (参见文 [1–3]). Moran 集最先由文 [4] 引入. 关于 Moran 集的详细论述参见文 [5]. 文 [6] 利用网测度的方法得到了齐次 Cantor 集和偏齐次 Cantor 集的 Hausdorff 维数, 并估计了一般齐次 Moran 集的 Hausdorff 维数. 文 [7] 在齐次 Cantor 集和偏齐次 Cantor 集的基础上, 通过将相邻的 k 阶基本区间的间隔 ε_k 缩小到 t 倍 ($0 \leq t \leq 1$) 变为 $\varepsilon_k t$, 而保持基本区间的长度和个数不变, 得到了位于齐次 Cantor 集和偏齐次 Cantor 集之间的一类齐次 Moran 集, 且得到了这类集合的 Hausdorff 维数. 文 [8] 运用 Mauldin 和 Williams 引入的方法确定了一类齐次 Cantor 集的 Hausdorff 测度. 本文将在齐次 Cantor 集结构和文 [6, 8] 相关结果的基础上, 在一定条件下改变齐次 Cantor 集基本区间的位置得到一类新的齐次 Moran 集, 并确定它的 Hausdorff 测度.

2 定义和记号

设 $\{n_k\}_{k \geq 1}$ 为一列正整数序列, $\{c_k\}_{k \geq 1}$ 为一列正实数序列, 满足 $n_k \geq 2$, $0 < c_k < 1$, $n_1 c_1 \leq \delta$ 及 $n_k c_k \leq 1 (k \geq 2)$, 其中 δ 为一正实数. 对任意 $k \geq 1$, 记

$$D_k = \{i_1 i_2 \cdots i_k : 1 \leq i_j \leq n_j, 1 \leq j \leq k\}.$$

令 $D = \bigcup_{k \geq 0} D_k$, 其中 D_0 约定为 $\{\emptyset\}$.

若 $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_k \in D_k$, $\tau = \tau_1 \cdots \tau_m \in D_m$, 则记 $\sigma * \tau = \sigma_1 \cdots \sigma_k \tau_1 \cdots \tau_m$.

定义 2.1 [5] 设 J 为长度为 δ 的闭区间, J 的闭子集簇 $\mathcal{F} = \{J_\sigma : \sigma \in D\}$ 称为具有齐次 Moran 结构, 如果它满足

*收稿日期: 2015-01-10

接收日期: 2015-02-11

作者简介: 肖祖彪 (1989–), 男, 湖北鄂州, 硕士, 主要研究方向: 动力系统与分形几何.

1. $J_\emptyset = J$;
2. 对任意 $k \geq 0$ 及任意 $\sigma \in D_k, J_{\sigma*1}, \dots, J_{\sigma*n_{k+1}}$ 为 J_σ 的闭子区间, 并且对任意 $i \neq j$, $\text{int}(J_{\sigma*i}) \cap \text{int}(J_{\sigma*j}) = \emptyset$;
3. 对任意 $k \geq 1, \sigma \in D_{k-1}$ 及 $1 \leq j \leq n_k$ 有

$$\frac{|J_{\sigma*j}|}{|J_\sigma|} = c_k,$$

其中 $|A|$ 表示集 A 的直径.

设 $\mathcal{F}$ 为具有齐次 Moran 结构的 J 的闭子区间族, 称 $E(\mathcal{F}) := \bigcap_{k \geq 1} \bigcup_{\sigma \in D_k} J_\sigma$ 为由 $\mathcal{F}$ 确定的齐次 Moran 集, 称 $\mathcal{F}_k = \{J_\sigma : \sigma \in D_k\}$ 为 $E(\mathcal{F})$ 的 k 阶基本区间, J 称为 $E(\mathcal{F})$ 的母区间. 由上面的定义看到, 对于给定的区间 J , 序列 $\{n_k\}_{k \geq 1}, \{c_k\}_{k \geq 1}$ 随着 $k (k \geq 1)$ 阶基本区间的位置不同而产生不同的齐次 Moran 集. 用 $\mathcal{M}(J, \{n_k\}, \{c_k\})$ 表示由 $J, \{n_k\}, \{c_k\}$ 生成的所有齐次 Moran 集的集合.

定义 2.2 ^[5] 对任意 $k \geq 1, \sigma \in D_{k-1}$ 及 $1 \leq j \leq n_k$, 它的 k 阶基本区间 $J_{\sigma*j}$ (我们假定 $J_{\sigma*1}, \dots, J_{\sigma*n_k}$ 在 J_σ 中从左到右排列) 满足

1. $J_{\sigma*1}$ 的左端点与 J_σ 的左端点重合; $J_{\sigma*n_k}$ 的右端点与 J_σ 的右端点重合;
2. 相邻的 k 阶基本区间的间隔相同.

由此得到的 Moran 集称为齐次康托集, 记为

$$\mathbb{C} = \mathbb{C}(J, \{n_k\}, \{c_k\}).$$

如果将上述定义中的条件 1 用以下条件代替: $J_{\sigma*1}$ 的左端点与 J_σ 的左端点重合, $J_{\sigma*j+1}$ 的左端点与 $J_{\sigma*j}$ 的右端点重合, $1 \leq j \leq n_k - 1$, 则得到的 Moran 集称为偏齐次康托集, 记为

$$\mathbb{C}^* = \mathbb{C}^*(J, \{n_k\}, \{c_k\}).$$

定义 2.3 ^[9] 定义预维数序列 $\{s_k\}_{k \geq 1}$, 其中 s_k 满足下列等式

$$\prod_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} c_{ij}^{s_k} = 1.$$

令 $s_* = \liminf_{k \rightarrow \infty} s_k$.

下面总假设 $J = [0, 1]$, s_* 如上所定义, 则

$$s_* = \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\log n_1 \cdots n_k}{-\log c_1 \cdots c_k}.$$

定义

$$t_* = \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\log n_1 \cdots n_k}{-\log c_1 \cdots c_{k+1} n_{k+1}}.$$

令 δ_k, ε_k 分别为 $\mathbb{C}$ 的第 k 级基本区间的长度和相邻基本区间之间的间隔, 则

$$\delta_k = c_1 \cdots c_k, \quad \varepsilon_k = \frac{c_1 \cdots c_{k-1} (1 - n_k c_k)}{n_k - 1}. \quad (2.1)$$

在本文中, 我们考虑一种新的齐次 Moran 集, 定义如下:

定义 2.4 在上述齐次 Cantor 集的基础上, 对任意 $k \geq 1$, $\sigma \in D_{k-1}$ 及 $1 \leq j \leq n_k$, 新的 k 阶基本区间满足

1. 相邻的 k 阶基本区间的间隔为 $\varepsilon'_k = \frac{n_k-1}{n_k+1}\varepsilon_k$;
2. k 阶基本区间的长度 δ_k , 母区间 J 及序列 $\{n_k\}, \{c_k\}$ 均不变;
3. 从齐次 Cantor 集的 k 阶基本区间出发, 将 $J_{\sigma*1}$ 的左端点和 $J_{\sigma*n_k}$ 的右端点分别向相应的 $k-1$ 级基本区间的中心移动 ε'_k .

由上面定义得到的所有齐次 Moran 集的全体记为

$$\mathbb{C}' = \mathbb{C}'(J, \{n_k\}, \{c_k\}).$$

在不混淆的情况下记为 $\mathbb{C}'$.

3 相关定理和结论

对于任意 $E \in \mathbb{C}'(J, \{n_k\}, \{c_k\})$, 设 $\dim_H E = s$. 由文 [5, 6] 我们知道

定理 3.1 [5,6] 若 $E \in \mathcal{M}(J, \{n_k\}, \{c_k\})$, 则有

$$t_* \leq \dim_H E \leq s_*.$$

特别地,

- (1) 若 E 还满足 $\inf_{k \geq 1} c_k > 0$, 则 $\dim_H E = s_*$;
- (2) 若 E 还满足 $\sup_{k \geq 1} n_k < \infty$, 则 $\dim_H E = s_* = t_*$.

由于

$$\mathbb{C}'(J, \{n_k\}, \{c_k\}) \subseteq \mathcal{M}(J, \{n_k\}, \{c_k\}),$$

所以 $E \in \mathcal{M}(J, \{n_k\}, \{c_k\})$.

故由定理 1, 有 $t_* \leq s \leq s_*$; 当 $\inf_{k \geq 1} c_k > 0$ 时, $s = s_*$; 当 $\sup_{k \geq 1} n_k < \infty$ 时, $s = s_* = t_*$.

设 $R_s(E) = \liminf_{k \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^k n_j c_j^s$, 在本文中设 $0 \leq R_s(E) < \infty$.

定理 3.2 若 $E \in \mathbb{C}'(J, \{n_k\}, \{c_k\})$, $0 \leq R_s(E) < \infty$, 则

$$\frac{1}{6} R_s(E) \leq \mathcal{H}^s(E) \leq R_s(E).$$

由于 $\forall k \geq 1$, $\mathcal{F}_k$ 为 E 的覆盖, 故

$$\mathcal{H}^s(E) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|\mathcal{F}_k\| = \liminf_{k \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^k n_j c_j^s = R_s(E).$$

若 $R_s(E) = 0$, 则 $\mathcal{H}^s(E) = 0$, 即 $\mathcal{H}^s(E) = R_s(E) = 0$. 此时, 定理 3.2 成立.

下面只需考虑 $0 < R_s(E) < \infty$ 的情形.

4 几个引理

对任意 $\sigma \in D_{k-1}$, 记 $G_{k,\sigma}$ 为 $J_\sigma \cap \mathcal{F}_k$ 中元素所有可能并集的集合, 令

$$G_k = \bigcup_{\sigma \in D_{k-1}} G_{k,\sigma}, \quad G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k,$$

$$\mathcal{H}_G^s(E) = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, |U_i| < \delta, U_i \in G \right\}.$$

引理 4.1 设 $\mathcal{H}^s(E)$ 是 E 的 s 维 Hausdorff 测度, 则

$$\frac{1}{2} \mathcal{H}_G^s(E) \leq \mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}_G^s(E). \quad (4.1)$$

证 由 $\mathcal{H}_G^s(E)$ 和 $\mathcal{H}^s(E)$ 的定义可知, 第二个不等式 $\mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}_G^s(E)$ 显然成立. 现证第一个不等式. 设 U 为 $[0, 1]$ 上的开区间, $U \cap E \neq \emptyset$. 由于 $\lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^k c_i = 0$, 因此存在一个正整数 k_0 , 使得 $|U| \geq 2 \prod_{i=1}^{k_0} c_i$. 此时, 可分为两种情形 (A1, A2):

A1) 存在一个正整数 $k \geq k_0$, 使得 U 至少含有一个 k 阶基本区间, 但不含任何 $(k-1)$ 阶基本区间, 因此 U 至多与两个 $(k-1)$ 阶基本区间相交.

a) U 与两个 $(k-1)$ 阶基本区间相交, 设 I_1, I_2 是那样的两个基本区间, 记 $U_1 = I_1 \cap U$, $U_2 = I_2 \cap U$, 那么利用 x^s 的凸性, 有

$$|U|^s \geq (|U_1| + |U_2|)^s \geq \frac{2^s}{2} (|U_1|^s + |U_2|^s). \quad (4.2)$$

由于 U_1 和 U_2 中至少有一个含 k 阶基本区间. 不失一般性, 设 U_1 含有一个含 k 阶基本区间, 记 $G(U_1) = \bigcup_{\sigma \in D_k, J_\sigma \cap U_1 \neq \emptyset} J_\sigma$, 则 $|G(U_1)|^s \leq (|U_1| + \prod_{i=1}^k c_i)^s \leq 2^s |U_1|^s$.

如果 U_2 也至少含有一个 k 阶基本区间, 记 $G(U_2) = \bigcup_{\sigma \in D_k, J_\sigma \cap U_2 \neq \emptyset} J_\sigma$, 因此 $|G(U_2)|^s \leq 2^s |U_2|^s$. 从而 $G(U_i) \in G_k, i = 1, 2$ 且

$$|U|^s \geq \frac{2^s}{2} (|U_1|^s + |U_2|^s) \geq \frac{1}{2} (|G(U_1)|^s + |G(U_2)|^s). \quad (4.3)$$

如果 U_2 不含任何 k 阶基本区间, 则 U 仅与 I_2 相交. 通过分析知道, 在这种情况下, 又可以分为两种情形:

a1) 存在正整数 $l(> k)$, 使得 U_2 至少含一个 l 阶基本区间, 但它不含任何 $(l-1)$ 阶基本区间, 记

$$G(U_2) = \bigcup_{\sigma \in D_l, J_\sigma \cap U_2 \neq \emptyset} J_\sigma,$$

则 $G(U_2) \in G_l$. 此时可类似上面的论述, 得到 $|G(U_2)|^s \leq 2^s |U_2|^s$. 于是式 (4.3) 成立.

a2) 不存在正整数 $l(> k)$, 使得 U_2 含有 l 阶基本区间, 此时, U_2 至多与一个 k 阶基本区间相交, 记 $G(U_2) = \bigcup_{\sigma \in D_k, J_\sigma \cap U_2 \neq \emptyset} J_\sigma$, 则仍有 $G(U_2) \in G_k$, 那么 $|G(U_2)|^s \leq (|U_2| + \prod_{i=1}^k c_i)^s \leq 2^s |U_2|^s$. 于是, 式 (4.3) 也成立.

b) U 仅与一个 $(k-1)$ 阶基本区间相交.

如果 U 的左端点不落在任何 k 阶基本区间上, 记 $G(U) = \bigcup_{\sigma \in D_k, J_\sigma \cap U \neq \emptyset} J_\sigma$, 则 $G(U) \in G_k$,

且

$$|U|^s \geq \frac{1}{2^s} |G(U)|^s \geq \frac{1}{2} |G(U)|^s. \quad (4.4)$$

如果 U 的左端点落在某个 k 阶基本区间上, 设 J_1 是那样的基本区间, 记 $U_1 = U \cap J_1, U_2 = U - U_1$, 且 $G(U_2) = \bigcup_{\sigma \in D_k, J_\sigma \cap U_2 \neq \emptyset} J_\sigma$, 则 $G(U_2) \in G_k$, 且 $|G(U_2)|^s \leq 2^s |U_2|^s$. 对于 U_1 , 我们又可以分为两种情形.

b1) 存在正整数 $l(>k)$, 使得 U_1 至少含一个 l 阶基本区间, 但它不含任何 $(l-1)$ 阶基本区间, 记

$$G(U_1) = \bigcup_{\sigma \in D_l, J_\sigma \cap U_1 \neq \emptyset} J_\sigma,$$

类似上面的论述, 得到 $|G(U_1)|^s \leq 2^s |U_1|^s$. 于是式 (4.3) 成立.

b2) 不存在正整数 $l(>k)$, 使得 U_1 含有 l 阶基本区间, 此时, U_1 至多与一个 k 阶基本区间相交, 记

$$G(U_1) = \bigcup_{\sigma \in D_k, J_\sigma \cap U_1 \neq \emptyset} J_\sigma,$$

则仍有 $G(U_1) \in G_k$, 那么 $|G(U_1)|^s \leq (|U_1| + \sum_{i=1}^k c_i)^s \leq 2^s |U_1|^s$. 于是式 (4.3) 也成立.

A2) 不存在一个正整数 $k \geq k_0$, 使得 U 含有 k 阶基本区间. 此时, 对于某个正整数 k , U 至多与两个 k 阶基本区间相交, 记 $G(U) = \bigcup_{\sigma \in D_k, J_\sigma \cap U \neq \emptyset} J_\sigma$, 则 $G(U) \in G_k$, 且

$|G(U)|^s \leq (|U| + 2 \sum_{i=1}^k c_i)^s \leq 2^s |U|^s$, 那么也有式 (4.3) 成立.

现设 $\{U^i\}$ 是 E 的 δ 覆盖, 则 $\{G(U_1^i), G(U_2^i)\} \subset G$ 是 E 的 2δ 覆盖, 因此 $\mathcal{H}^s(E) \geq \frac{1}{2} \mathcal{H}_G^s(E)$, 引理 4.1 得证.

对任意 $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_m) \in D_m$, 若 $0 < k \leq m$, 记 $\sigma|k = (\sigma_1, \dots, \sigma_k)$. 对任意两个 $\sigma, \tau \in D_k$, 记 $a(\sigma)$ 是 I_σ 的左端点, $b(\tau)$ 是 I_τ 的右端点. 设 μ 是支撑在 E 上的概率测度, 使得对任意 $A \in \mathcal{F}_k$, 有 $\mu(A) = (n_1 \cdots n_k)^{-1}$.

引理 4.2 设 $E \in \mathbb{C}'(J, \{n_k\}, \{c_k\})$, 且 $0 < R_s(E) < \infty$. 那么存在 $k_0 \in \mathbb{N}$, 使得对任意的 $\sigma, \tau \in D_k (k \geq k_0)$, 若 $a(\sigma) < b(\tau)$ 且 $\sigma|(k-1) = \tau|(k-1)$, 则

$$\mu([a(\sigma), b(\tau)]) \leq 3^{1-s} (R_s(E) - \varepsilon)^{-1} (b(\tau) - a(\sigma))^s.$$

证 由于 $\liminf_{k \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^k n_j c_j^s = R_s(E)$, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $k_0 > 0$, 使得当 $k \geq k_0$ 时, $\prod_{j=1}^k n_j c_j^s \geq R_s(E) - \varepsilon$, 因此

$$(n_1 \cdots n_k)^{-1} \leq (R_s(E) - \varepsilon)^{-1} (c_1 \cdots c_k)^s. \quad (4.5)$$

若 $\sigma = \tau \in D_k (k > k_0)$, 则 $b(\tau) - a(\sigma) = c_1 \cdots c_k$, 从而由 (4.5) 式知

$$\begin{aligned} \mu([a(\sigma), b(\tau)]) &= (n_1 \cdots n_k)^{-1} \\ &\leq (R_s(E) - \varepsilon)^{-1} (c_1 \cdots c_k)^s = (R_s(E) - \varepsilon)^{-1} (b(\tau) - a(\sigma))^s \\ &\leq 3^{1-s} (R_s(E) - \varepsilon)^{-1} (b(\tau) - a(\sigma))^s. \end{aligned}$$

若 $\sigma \neq \tau, \sigma, \tau \in D_k (k > k_0)$, 假设 $[a(\sigma), b(\tau)]$ 中含 i 个 k 阶基本区间, 由于 $\sigma \mid (k-1) = \tau \mid (k-1)$ 且 $\sigma \neq \tau$, 所以 $2 \leq i \leq n_k$, 且

$$\begin{aligned} (b(\tau) - a(\sigma))^s &= (i\delta_k + (i-1)\varepsilon_k)^s \\ &= (ic_k + (i-1)\frac{1-n_k c_k}{1+n_k})^s (c_1 \cdots c_{k-1})^s \\ &= (\frac{n_k+i}{n_k+1}c_k + \frac{i-1}{1+n_k})^s (c_1 \cdots c_{k-1})^s. \end{aligned}$$

利用 x^s 的凸性有

$$(b(\tau) - a(\sigma))^s \geq (\frac{n_k+2i-1}{n_k+1})^{s-1} [\frac{n_k+i}{n_k+1}(c_1 \cdots c_{k-1}c_k)^s + \frac{i-1}{1+n_k}(c_1 \cdots c_{k-1})^s]. \quad (4.6)$$

由 (4.5) 和 (4.6) 式有

$$\begin{aligned} (b(\tau) - a(\sigma))^s &\geq (R_s(E) - \varepsilon)(n_1 \cdots n_k)^{-1} (\frac{n_k+2i-1}{n_k+1})^{s-1} (\frac{n_k+i}{n_k+1} + \frac{n_k(i-1)}{1+n_k}) \\ &= (R_s(E) - \varepsilon)(n_1 \cdots n_k)^{-1} (\frac{n_k+2i-1}{n_k+1})^{s-1} i \\ &= (R_s(E) - \varepsilon) (\frac{n_k+2i-1}{n_k+1})^{s-1} \mu([a(\sigma), b(\tau)]) \\ &\geq (\frac{1}{3})^{1-s} (R_s(E) - \varepsilon) \mu([a(\sigma), b(\tau)]). \end{aligned}$$

因此 $\mu([a(\sigma), b(\tau)]) \leq 3^{1-s} (R_s(E) - \varepsilon)^{-1} (b(\tau) - a(\sigma))^s$, 引理 4.2 得证.

引理 4.3 设 $E \in \mathcal{C}'(J, \{n_k\}, \{c_k\})$, 且 $0 < R_s(E) < \infty$, 则 $(\frac{1}{3})^{1-s} R_s(E) \leq \mathcal{H}_G^s(E) \leq R_s(E)$.

证 $\mathcal{H}_G^s(E) \leq R_s(E)$ 显然成立. 现设 $\{U_i\} \subset G$ 是 E 的 δ 覆盖, $\delta \leq x_{k_0}$. 对每个 U_i , 必存在一个正整数 $k(i) > k_0$, 使得 U_i 含在某个 $(k(i)-1)$ 阶基本区间内. 假设 U_i 是某些 $k(i)$ 阶基本区间的并, 即 $U_i = I_{\sigma(i)} \cup \cdots \cup I_{\tau(i)}$, 这里 $I_{\sigma(i)}$ 和 U_i 有相同的左端点, $I_{\tau(i)}$ 和 U_i 有相同的右端点. 则 $|U_i| = b(\tau(i)) - a(\sigma(i))$. 由引理 4.2 有

$$\begin{aligned} 1 = \mu(E) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(U_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu([a(\sigma(i)), b(\tau(i))]) \\ &\leq 3^{1-s} (R_s(E) - \varepsilon)^{-1} \sum_{i=1}^{\infty} (b(\tau(i)) - a(\sigma(i)))^s = 3^{1-s} (R_s(E) - \varepsilon)^{-1} \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s. \end{aligned}$$

因此 $\mathcal{H}_G^s(E) \geq (\frac{1}{3})^{1-s} (R_s(E) - \varepsilon)$. 由 ε 的任意性, 有 $\mathcal{H}_G^s(E) \geq (\frac{1}{3})^{1-s} R_s(E)$, 引理 4.3 得证.

5 定理的证明及例

证 [定理 3.2 的证明] 由引理 4.1 和引理 4.3 可知

$$\frac{1}{6}R_s(E) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{1-s}R_s(E) \leq \frac{1}{2}\mathcal{H}_G^s(E) \leq \mathcal{H}^s(E) \leq R_s(E),$$

即 $\frac{1}{6}R_s(E) \leq \mathcal{H}^s(E) \leq R_s(E)$, 定理得证.

例 对于经典三分 Cantor 集 $\mathbb{C}([0, 1], \{2\}, \{\frac{1}{3}\})$, 如本文中的做法处理, 可得到新的齐次 Moran 集 $\mathbb{C}'([0, 1], \{2\}, \{\frac{1}{3}\})$. 任意的 $E \in \mathbb{C}'([0, 1], \{2\}, \{\frac{1}{3}\})$, 由于 $\sup_k n_k = 2 < \infty$, 所以 $\dim_H(E) = s_* = \frac{\log 2}{\log 3}$. 然而 $R_{\frac{\log 2}{\log 3}}(E) = 1$, 因此 $\frac{1}{6} \leq \mathcal{H}^s(E) \leq 1$.

参 考 文 献

- [1] Falconer K J. Fractal geometry-mathematical foundations and applications[M]. New York: John Wiley and Sons, 1990.
- [2] Marion D J. Measures de Hausdorff et theorie de Perron-Frobenius des matrice non-negatives[J]. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 1985, 35 (4): 99–125.
- [3] Zhou Z L, Wu M. The Hausdorff measure of Sierpinski carpet[J]. Sci. China (Series A), 1990, 42(7): 673–680.
- [4] Moran P A P. Additive functions of intervals and Hausdorff measure[J]. Proc. Camb. Philo. Soc., 1946, 42: 15–23.
- [5] 文志英. 分形几何的数学基础 [M]. 上海: 上海科学技术教育出版社, 1999.
- [6] Feng Dejun, Wen Zhiying, Wu Jun. Some dimensional results for homogeneous Moran sets [J]. Sci. China (Series A), 1997, 40 (5): 475–482.
- [7] 薛玉梅, 张晓. 一类齐次 Moran 集维数的不连续性 [J]. 应用数学学报, 2011, 34(1): 149–153.
- [8] 瞿成勤, 苏维宜. 关于齐次 Cantor 集的一个注记 [J]. 数学年刊 A 辑 (中文版), 2001, 22A(3): 339–342.
- [9] Su Hua. Dimensions for generalized similar sets[J]. Acta Math. Appl. Sinica, 1994, 17(4): 551–558.
- [10] 曾超, 袁德辉. 含参变量 Cantor 集的 Hausdorff 测度 [J]. 数学杂志, 2011, 31(4): 729–737.

HAUSDORFF MEASURES FOR A CLASS OF HOMOGENEOUS MORAN SETS

XIAO Zu-biao, LIU Wei-bin

(School of Mathematics and Statistics, Wuhan University, Wuhan 430072, China)

Abstract: In this paper, we consider a new kind of homogeneous Moran sets. By using the convexity of $x^s (0 < s < 1)$, we get its Hausdorff measure, which generalizes the results of homogeneous Cantor sets.

Keywords: homogeneous Moran sets; convexity; Hausdorff measure

2010 MR Subject Classification: 28A80; 28A78