Vol. 36 (2016)
No. 1

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

NA 样本下非指数分布族参数的经验 Bayes 估计

黄金超
(滁州职业技术学院基础部, 安徽 滁州 239000)

摘 要: 在“平方损失”下, 研究了基于 NA 样本情形下非指数分布族参数 θ 的经验 Bayes 估计. 利用概率密度函数的核估计, 构造了参数的经验 Bayes(EB) 估计量, 在适当的条件下证明了获得的 (EB) 估计是渐近最优的且收敛速度的阶为 $O(n^{-(rs-2)/2(s+2)})$, 其中 $s>2$, $s\in N$, $2/s<r<1$. 最后给出一个满足定理条件的例子.

关键词: 非指数分布; 密度函数的核估计; 经验 Bayes 估计; 收敛速度; NA 样本
MR(2010) **主题分类号**: 62C12; 62F12 **中图分类号**: O212.1
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2016)01-0135-09

1 引言

自 Robbins[1] 引入经验 Bayes(EB) 方法以来, 文献中对指数族及单边截断分布族中, 未知参数的 EB 估计及 EB 检验问题已有许多研究, 如基于独立同分布 (iid) 样本, Singh [2] 及 Singh 和 Wei[3] 讨论了单参数指数族 EB 估计问题, 在近期文献中, Li 和 Gupta[4] 基于独立同分布 (iid) 样本下研究了一类单边截断分布族参数的 EB 检验问题, Lee-shen Chen[5] 和黄金超等 [6] 分别在独立同分布 (iid) 样本下研究了非指数分布族参数的 EB 检验和估计问题, 然而在可靠性理论, 渗透理论和某些多元分析等实际问题中, 遇到的样本多非独立而具有相关性, 正相关 (PA), 负相关 (NA) 就为常见的两种. 因而, 在样本相关的情形下研究 EB 估计问题是有意义的. 本文在“平方损失”下, 基于同分布弱平稳 NA 样本进一步研究了文献 [5] 给出非指数分布族参数的经验 Bayes(EB) 估计问题, 构造一渐近最优 EB 估计函数, 在一定条件下, 获得 EB 估计渐近最优性且收敛速度的阶为 $O(n^{-(rs-2)/2(s+2)})$, 其中 $s>2$ 为任意确定的自然数, $2/s<r<1$, 推广现有文献中的相应结果.

首先给出 NA 样本随机变量 (r.v.) 序列的定义.

定义 1.1 随机变量 $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$, 称为负相关的 (NA), 如果对于集合 $1,2,\cdots,n$ 的任何两个不交的非空子集 A_1 与 A_2 都有

$$\mathrm{Cov}(f_1(X_i,\ i\in A_1),\ f_2(X_j,\ j\in A_2))\le 0, \tag{1.1}$$

其中是 f_1 和 f_2 任何两个使得协方差存在且对每个变元均非降 (或同时对每个变元均非升) 的函数, 称随机变量序列 $\{X_j,\ j\in N\}$ 是负相关的 (NA) , 如果对任意自然数 $n>1$, $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$, 都是负相关的 (NA) .

*收稿日期: 2013-04-09 接收日期: 2014-04-02
基金项目: 安徽省高校自然科学基金资助项目 (KJ2015A345; KJ2013Z252).
作者简介: 黄金超 (1974–), 男, 安徽凤阳, 副教授, 主要研究方向: 应用统计与风险决策.

考虑如下非指数分布族, 设随机变量 X 条件概率密度函数为

$$f(x \mid \theta)=\mathrm{e}^{-x}\frac{k(\theta)}{1+\theta x}, \tag{1.2}$$

此处 $x\in\chi=(0,\ +\infty)$, $\theta\in\Omega=(0,\ +\infty)$, $k(\theta)>0$, Ω 为参数空间. 显然概率密度函数 $f(x\mid\theta)$ 不是指数分布族, 然而它是联合密度函数 $f(x,\ y\mid\theta)=k(\theta)\exp(-x-y-\theta xy)$, $(x>0,\ y>0,\ \theta>0,\ k(\theta)>0)$ 的边缘密度函数, 联合密度函数 (pdf) $f(x,\ y\mid\theta)$ 是二元指数分布族, 它常被用来作为两个相依分量的寿命的模型见文献 [5] 及其所引参考文献 [7]. 另外, 研究该分布族参数的 EB 估计特别是基于相关样本的 EB 估计, 文献中报道很少. 因此基于 NA 样本下研究该非指数分布族参数的经验 Bayes 估计是非常有意义的.

设 $G(\theta)$ 为参数 θ 的未知先验分布, 随机变量 X 的边缘分布密度函数为

$$f(x)=\int_{\Omega}f(x\mid\theta)\mathrm{d}G(\theta)=\mathrm{e}^{-x}\int_0^{+\infty}\frac{k(\theta)}{1+\theta x}\mathrm{d}G(\theta)<\infty, \tag{1.3}$$

约定

$$\begin{aligned}
f(0)&=\int_0^{+\infty}k(\theta)\mathrm{d}G(\theta)<\infty,\\
f'(x)&=-\mathrm{e}^{-x}\int_0^{+\infty}\frac{k(\theta)}{1+\theta x}\mathrm{d}G(\theta)-\mathrm{e}^{-x}\int_0^{+\infty}\frac{\theta k(\theta)}{(1+\theta x)^2}\mathrm{d}G(\theta)<0.
\end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 为单调递减函数, 从而 $f(x)<f(0)<\infty$.

取 $h(x)=\mathrm{e}^{x}f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{k(\theta)}{1+\theta x}\mathrm{d}G(\theta)$, 则

$$\begin{aligned}
h^{(s)}(x)&=\frac{\partial^s h(x)}{\partial x^s}=\int_0^{+\infty}\frac{(-1)^s s!k(\theta)\theta^s}{(1+\theta x)^{s+1}}\mathrm{d}G(\theta),\\
\mid h^{(s)}(x)\mid&=s!\int_0^{+\infty}\frac{k(\theta)\theta^s}{(1+\theta x)^{s+1}}\mathrm{d}G(\theta)\triangleq s!q(x)<\infty\ \ (s\geq 2,\ s\in N).
\end{aligned} \tag{1.4}$$

取通常的损失函数为

$$L(\theta,\ d)=(\theta-d)^2. \tag{1.5}$$

在平方损失 (1.5) 下, θ 的 Bayes 估计为其后验均值, 即

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}_{BE}=E(\theta\mid x)&=\frac{\displaystyle\int_0^{+\infty}\theta f(x\mid\theta)\mathrm{d}G(\theta)}{f(x)}\\
&=\frac{\frac{1}{x}\displaystyle\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x}k(\theta)\mathrm{d}G(\theta)-\frac{1}{x}\int_0^{\infty}\frac{k(\theta)\mathrm{e}^{-x}}{1+\theta x}\mathrm{d}G(\theta)}{f(x)}\\
&=\frac{\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}f(0)-\frac{1}{x}f(x)}{f(x)}\triangleq\phi_B(x).
\end{aligned} \tag{1.6}$$

故 $\hat{\theta}_{BE}$ 的 Bayes 风险为

$$R(G) = R_G = R(\hat{\theta}_{BE},\ G) = E_{(X,\theta)}(\hat{\theta}_{BE} - \theta)^2. \tag{1.7}$$

由于先验分布 $G(\theta)$ 的未知, 故 $\hat{\theta}_{BE}$ 不能确定, 因此无使用价值, 从而导致考虑该参数的经验 Bayes(EB) 估计.

2 经验 Bayes 估计

设 $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$ 和 X 是同分布弱平稳 NA 样本, 它们具有共同的边缘密度函数如 (1.3) 式所示, 通常称 $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$ 为历史样本, 称 X 为当前样本. 令 $f(x)$ 为 X_1 的概率密度函数.

为了估计 $f(x)$, 引入核函数. 令 $K(x)$ $(r = 0,\ 1,\ \cdots,\ s-1)$ 在 Borel 可测的有界函数区间 $(0,\ 1)$ 之外为零, 且满足下列的条件 (C):

(C$_1$) $\frac{1}{t!}\displaystyle\int_0^1 y^t K_r(y)dy = \begin{cases} 1, & t = r, \\ 0, & t \neq r,\ t = 1,\ 2,\ \cdots,\ s-1. \end{cases}$

(C$_2$) 对 $x \in \chi = (0,\ \infty)$, $\mid K(x) \mid \leq C$.

(C$_3$) $K_r(x)$ 在 R^1 上除有限点集 E_0 外是可微的, 且

$$\sup_{x \in R^1 - E_0} |K_r'(x)| \mid \leq C < \infty.$$

本文对 NA 序列的协方差结构作如下假定:

(D) $$\sum_{j=1}^{\infty} \mid \mathrm{Cov}(X_i,\ X_j) \mid \leq C < \infty. \tag{2.1}$$

类似文献 [5], 密度函数 $f(x)$ 的核估计定义为

$$f_n(x) = \frac{1}{nh_n}\sum_{i=1}^{n} K(\frac{X_i - x}{h_n})\mathrm{e}^{X_i - x}, \tag{2.2}$$

其中 $\{h_n\}$ 为正数序列, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$, $K(x)$ 是满足条件 (C) 的核函数. 利用文献 [8] 的思想, 则可定义 θ 的经验 Bayes 估计

$$\hat{\theta}_{EB} = \phi_n^*(x) \triangleq [0 \vee (\frac{\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} f_n(0) - \frac{1}{x} f_n(x)}{f_n(x)})] \wedge A_n, \tag{2.3}$$

其中 $\varphi(x) = x^{-1}\mathrm{e}^{-x} f_n(0)$ 为 $\varphi(x) = x^{-1}\mathrm{e}^{-x} f(0)$ 的估计, 令 $\phi_n^*(x)$ 为 $\phi_B(x)$ 的估计, 这里 $\{A_n\}$ 为正数序列, 且

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \infty,\ a \vee b = \max(a,\ b),\ a \wedge b = \min(a,\ b).$$

记 E_* 表示对 $(X_1,\ \cdots,\ X_n,\ (X,\ \theta))$ 的联合分布求均值 , E_n 表示对 $X_1,\ \cdots,\ X_n$ 之联合分布求均值, 在平方损失下, $\hat{\theta}_{EB}$ 的全面 Bayes 风险为

$$R_n = R_n(\hat{\theta}_{EB},\ G) = E_*(\hat{\theta}_{EB} - \theta)^2. \tag{2.4}$$

按定义, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = R(G)$, 则称 $\hat{\theta}_{EB}$ 为渐近最优 (a.o.) 的 EB 估计, 若 $R_n - R(G) = O(n^{-q})$, $q>0$, 则称 θ 的 EB 估计 $\hat{\theta}_{EB}$ 的收敛速度阶为 $O(n^{-q})$. 本文中令 c, c_0, c_1, $\cdots$ 表示与 n 无关的正常数, 即使在同一表达式中它们也可取不同的值.

3 若干引理及主要结果

引理 3.1 令 X, Y 是 NA 变量, 皆有有限方差, 则对任何两个可微函数 g_1, g_2 有

$$|\operatorname{Cov}(g_1(X),\ g_2(Y))| \le \sup_X |g_1'(X)| \sup_Y |g_2'(Y)| [-\operatorname{Cov}(X,\ Y)], \tag{3.1}$$

当分别在有限或可列点集 E_0^1 和 E_0^2 上不可微时有

$$|\operatorname{Cov}(g_1(X),\ g_2(Y))| \le \sup_{X\in R^1-E_0^1} |g_1'(X)| \sup_{Y\in R^1-E_0^2} |g_2'(Y)| [-\operatorname{Cov}(X,\ Y)]. \tag{3.2}$$

证 见文献 [9] 引理 1.

引理 3.2 设 $f_n(x)$ 由 (2.2) 式定义, 其中 X_1, X_2, $\cdots$, X_n 为同分布弱平稳 NA 样本序列, $s>2$ 为任意确定的自然数, 若条件 (C) 和 (D) 成立, 当取 $h_n = n^{-\frac{1}{4+2s}}$ 时, 对 $0<r\le 2$ 有

(1) $E_n|f_n(x)-f(x)|^r \le c\cdot n^{-\frac{rs}{2(s+2)}}$;

(2) $E_n|f_n(0)-f(0)|^r \le c_1\cdot n^{-\frac{rs}{2(s+2)}}$.

证 由 C_r 不等式可知, 对 $0<r\le 2$,

$$E_n|f_n(x)-f(x)|^r \le c_1 |E_n f_n(x) - f(x)|^r + c_2[\operatorname{Var}(f_n(x))]^{r/2} \triangleq c_1 I_1^r + c_2 I_2^{r/2}, \tag{3.3}$$

由 (2.2) 式和条件 (C_1) 可知

$$\begin{aligned} & E_n[f_n(x)] = E_n[\frac{1}{h_n}K(\frac{X_1-x}{h_n})e^{X_1-x}] \\ = & \int_{t=x}^{x+h_n} \frac{1}{h_n}K(\frac{t-x}{h_n})e^{t-x}f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 K(v)e^{-x}h(x+h_n v)\mathrm{d}v \\ = & \int_0^1 K(v)e^{-x}[h(x)+\sum_{l=1}^{s-1}h^{(l)}(x)\frac{(h_n v)^l}{l!} + h^{(s)}(x^*)\frac{(h_n v)^s}{s!}]\mathrm{d}v \\ = & f(x) + \frac{h_n^s e^{-x}}{s!}\int_0^1 h^{(s)}(x^*)K(v)v^s\mathrm{d}v, \end{aligned} \tag{3.4}$$

这里 $x\le x^*\le x+h_n$, 从而由 (3.4) 和 (1.4) 式及 (C_2), 对任何固定的 $x\in\chi$ 有

$$\begin{aligned} & |E_n f_n(x) - f(x)| \le \frac{h_n^s e^{-x}}{s!}\int_0^1 |h^{(s)}(x^*)\|K(v)\|v^s|\mathrm{d}v \\ \le & \frac{c h_n^s e^{-x}}{s!}\int_0^1 s!\int_0^\infty \frac{k(\theta)\theta^s}{(1+\theta x)^{s+1}}\mathrm{d}G(\theta)v^s\mathrm{d}v \\ = & \frac{c h_n^s e^{-x}}{s+1}\int_0^\infty \frac{k(\theta)\theta^s}{(1+\theta x)^{s+1}}\mathrm{d}G(\theta) \equiv \frac{c h_n^s e^{-x}}{s+1}q(x) = O(h_n^s), \end{aligned} \tag{3.5}$$

所以当取 $h_n = n^{-1/(2s+4)}$ 时有

$$I_1^r =\mid E_n f_n(x) - f(x) \mid^r \leq cn^{-rs/2(s+2)}, \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \mathrm{Var}[\frac{1}{nh_n}\sum_{j=1}^{n} K(\frac{X_j - x}{h_n})e^{X_j - x}] \\ &= \frac{1}{nh_n^2}\mathrm{Var}[K(\frac{X_1 - x}{h_n})e^{X_1 - x}] + \frac{2}{n^2{h_n}^2}\sum_{1\leq j<}\sum_{l\leq n}\mathrm{Cov}(K(\frac{X_j - x}{h_n})e^{X_j - x}, \\ & K(\frac{X_l - x}{h_n})e^{X_l - x}) \triangleq I_2^{(1)} + I_2^{(2)}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

由 $\mid K^2(v) \mid\leq c, 0 \leq X_j - x \leq h_n, 1 \leq e^{X_j - x} \leq e^{h_n} \leq c$, 及 $h(x)$ 为单调递减函数可知

$$\begin{aligned} I_2^{(1)} &\leq \frac{1}{nh_n^2}E_n[K(\frac{X_1 - x}{h_n})e^{X_1 - x}]^2 \\ &= \frac{1}{nh_n^2}\int_{t=x}^{x+h_n} K^2(\frac{t-x}{h_n})e^{2(t-x)}e^{-t}h(t)\mathrm{d}t \\ &\leq \frac{1}{nh_n}e^{-x}h(x)e^{h_n}\int_0^1 K^2(v)\mathrm{d}v \leq \frac{cf(x)}{nh_n}c = O((nh_n)^{-1}). \end{aligned} \tag{3.8}$$

记 $\psi_n(x,y) = K(\frac{y-x}{h_n})e^{y-x}$, 由条件 ($\mathrm{C}_3$) 及引理 3.1, 有

$$\begin{aligned} \left|\mathrm{Cov}(K(\frac{X_j - x}{h_n})e^{X_j - x},\ K(\frac{X_l - x}{h_n})e^{X_l - x})\right| &\leq \frac{1}{{h_n}^2}\left\{\sup_y\left|\frac{\partial}{\partial y}\psi_n(x,\ y)\right|\right\}^2[-\mathrm{Cov}(X_j,\ X_l)] \\ &< \frac{c_1}{{h_n}^2}\left|\mathrm{Cov}(X_j,\ X_l)\right|. \end{aligned}$$

故由条件 (D) 和 $\{X_n,\ n\geq 1\}$ 的弱平稳性可知

$$I_2{}^{(2)} \leq \frac{2}{n^2{h_n}^2}\sum_{1\leq j<}\sum_{l\leq n}\frac{c_1}{{h_n}^2}\left|\mathrm{Cov}(X_j,\ X_l)\right| \leq \frac{c_2}{n{h_n}^4}\sum_{i=1}^{\infty}\left|\mathrm{Cov}(X_1,\ X_l)\right| \leq c(n{h_n}^4)^{-1}, \tag{3.9}$$

所以当时 $h_n = n^{-1/2(s+2)}$, 由 (3.8) 和 (3.9) 式代入 (3.7) 式可得

$$I_2 \leq c_1(nh_n)^{-1} + c_2(n{h_n}^4)^{-1} \leq cn^{-\frac{s}{(s+2)}}, \tag{3.10}$$

故有

$$I_2^{r/2} \leq cn^{-\frac{rs}{2(s+2)}}, \tag{3.11}$$

将 (3.6) 和 (3.11) 式代入 (3.3) 式可得引理 3.1 (1) 的结论.

在上述证明过程中令 $x = 0$, 类似可以证明引理 3.2 (2) 的结论也成立.

引理 3.3 若 $R_G < \infty$, 则对任何 EB 估计 $\hat{\theta}_{EB}$ 的风险有

$$R_n - R_G = E_*(\hat{\theta}_{EB} - \hat{\theta}_{BE})^2. \tag{3.12}$$

证 见文献 [2] 引理 2.1.

引理 3.4 对随机变量 (r.v.)$(Y,\ Z)$ 和实数 $y,\ z\neq 0,\ 0<L<\infty$, 且 $0<\lambda\le 2$, 则有

$$E[\mid \frac{Y}{Z}-\frac{y}{z}\mid \wedge L]^{\lambda}\le \frac{2}{\mid z\mid^{\lambda}}\{E[\mid Y-y\mid]^{\lambda}+(\mid \frac{y}{z}\mid +L)^{\lambda}E[\mid Z-z\mid]^{\lambda}\}.$$

证 见文献 [3].

引理 3.5 如果对 $t\ge 1, E\mid\theta\mid^{t}<\infty$, 则对 (1.6) 式定义的 $\hat{\theta}_{BE}(X)$, 有 $E_*\mid\hat{\theta}_{BE}(X)\mid^{t}<\infty$.

证 由凸函数 Jensen 不等式可知

$$\begin{aligned}E_*\mid\hat{\theta}_{BE}(X)\mid^{t} &= \int_0^{+\infty}\mid\hat{\theta}_{BE}(X)\mid^{t} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mid E_{(\theta|x)}(\theta)\mid^{t} f(x)\mathrm{d}x\\ &\le \int_0^{+\infty}(E_{(\theta|x)}|\theta|^{t})f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}|\theta|^{t}f(x\,|\theta)dG(\theta)\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{+\infty}|\theta|^{t}\mathrm{d}G(\theta)=E|\theta|^{t}<\infty.\end{aligned}$$

定理 3.1 设 $R_G,\ R_n$ 分别由 (1.7) 和 (2.4) 式定义, $\hat{\theta}_{EB}$ 由 (2.3) 式定义, $X_1,X_2,\cdots,\ X_n$ 为同分布弱平稳 NA 样本序列, $s>2$ 为任意确定的自然数, $2/s<r<1$ 且条件 (C) 和 (D) 成立, 且满足

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\theta^{rs}\mathrm{d}G(\theta)<\infty$;

(2) $\displaystyle\int_1^{+\infty}(f(x))^{1-r}\mathrm{d}x<\infty$,

则当 $h_n=n^{-1/2(s+2)}$ 时, 有

$$R_n-R_G=O(n^{-\frac{rs-2}{2s+4}}).$$

证 由引理 3.5 和条件 (1) 可知

$$R_G=E_{(X,\theta)}(\hat{\theta}_{BE}-\theta)^2\le 2(E_*(\hat{\theta}_{BE}^2)+E_*(\theta^2))<\infty,$$

故引理 3.3 的条件成立, 因此有

$$\begin{aligned}R_n-R_G &= E_*(\hat{\theta}_{EB}-\hat{\theta}_{BE})^2=\int_0^{+\infty}E_n[\phi_n^*(x)-\phi_B(x)]^2f(x)\mathrm{d}x\\ &\triangleq A(n)+B(n)+C(n),\end{aligned}\tag{3.13}$$

其中

$$A(n)=\int_0^1 I_n(x)f(x)\mathrm{d}x,\ B(n)=\int_1^{+\infty}I_n(x)f(x)\mathrm{d}x,\ C(n)=\int_0^{+\infty}II_n(x)f(x)\mathrm{d}x,$$
$$I_n(x)=E_n[\phi_n^*(x)-\phi_B(x)]^2I(A_n-\phi_B(x)),\ II_n(x)=E_n[\phi_n^*(x)-\phi_B(x)]^2I(\phi_B(x)-A_n),$$

这里 $I(x)$ 为示性函数: $I(x)=1,$ 若 $x>0$; 否则 $I(x)=0$. 由 (1.6), (2.3) 式和引理 3.4 及引理 3.2 可得

$$\begin{aligned}I_n(x) &\le E_n(\mid\frac{\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}f_n(0)-\frac{1}{x}f_n(x)}{f_n(x)}-\frac{\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}f(0)-\frac{1}{x}f(x)}{f(x)}\mid\wedge A_n)^2I(A_n-\phi_B(x))\\ &\le A_n^{2-r}E_n\{(\mid\frac{\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}f_n(0)-\frac{1}{x}f_n(x)}{f_n(x)}-\frac{\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}f(0)-\frac{1}{x}f(x)}{f(x)}\mid\wedge A_n)^r\}I(A_n-\phi_B(x))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\le \frac{2A_n^{2-r}}{f^r(x)}\{E_n \mid \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}(f_n(0)-f(0)) - \frac{1}{x}(f_n(x)-f(x)) \mid^r\} \\
&\quad + \frac{2^{1+r}A_n^2}{f^r(x)}\{E_n \mid f_n(x)-f(x) \mid^r\} \\
&\le \frac{2A_n^{2-r}}{f^r(x)}\{(\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x})^r E_n \mid f_n(0)-f(0) \mid^r + (\frac{1}{x})^r E_n \mid f_n(x)-f(x) \mid^r\} \\
&\quad + \frac{2^{1+r}A_n^2}{f^r(x)}\{E_n \mid f_n(x)-f(x) \mid^r\} \\
&\le \frac{cA_n^{2-r}}{f^r(x)}\{(\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x})^r n^{-rs/2(s+2)} + \frac{c_1A_n^{2-r}}{f^r(x)}(x^{-1})^r n^{-rs/2(s+2)}\} \\
&\quad + \frac{c_2A_n^2}{f^r(x)} n^{-rs/2(s+2)},
\end{aligned} \tag{3.14}$$

将 (3.14) 式代入 $A(n)$ 可得

$$A(n) \le c_1A_n^{2-r}n^{-rs/2(s+2)}a_1 + c_2A_n^{2-r}n^{-rs/2(s+2)}a_2 + c_3A_n^2n^{-rs/2(s+2)}a_3, \tag{3.15}$$

由 Jensen 不等式和

$$\int_0^1 (x^{-1}e^{-x})^r \mathrm{d}x < \int_0^1 (x^{-1})^r \mathrm{d}x < \infty \ \ (0<r<1),$$

可知 (3.15) 式中

$$\begin{aligned}
a_1 &= \int_0^1 (e^{-x}x^{-1})^r (f(x))^{1-r}\mathrm{d}x \le (f(0))^{1-r}\int_0^1 (e^{-x}x^{-1})^r \mathrm{d}x \\
&\le (f(0))^{1-r}c_1 < \infty, \qquad (3.16) \\
a_2 &= \int_0^1 (x^{-1})^r (f(x))^{1-r}\mathrm{d}x \le (f(0))^{1-r}\int_0^1 (x^{-1})^r \mathrm{d}x \le (f(0))^{1-r}c_2 < \infty, \qquad (3.17) \\
a_3 &= \int_0^1 (f(x))^{1-r}\mathrm{d}x \le (\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x)^{1-r} \le 1 \ (0<1-r<1). \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

将 (3.16) , (3.17) 和 (3.18) 式代入 (3.15) 式可得

$$A(n) \le c_1A_n^{2-r}n^{-rs/2(s+2)} + c_2A_n^{2-r}n^{-rs/2(s+2)} + c_3A_n^2n^{-rs/2(s+2)} \le cA_n^2n^{-rs/2(s+2)}, \tag{3.19}$$

将 (3.14) 式代入 $B(n)$ 和条件 (2) 及 $\int_1^\infty (e^{-x}x^{-1})^r\mathrm{d}x < \infty$ 可得

$$B(n) \le c_1A_n^{2-r}n^{-rs/2(s+2)}b_1 + c_2A_n^{2-r}n^{-rs/2(s+2)}b_2 + c_3A_n^2n^{-rs/2(s+2)}b_3,$$

其中

$$\begin{aligned}
b_1 &= \int_1^\infty (\mathrm{e}^{-x}x^{-1})^r (f(x))^{1-r}\mathrm{d}x \le (f(0))^{1-r}\int_1^\infty (\mathrm{e}^{-x}x^{-1})^r \mathrm{d}x \le (f(0))^{1-r}c_1 < \infty, \\
b_2 &= \int_1^\infty (x^{-1})^r (f(x))^{1-r}\mathrm{d}x < b_3 = \int_1^\infty (f(x))^{1-r}\mathrm{d}x < \infty.
\end{aligned}$$

将以上 b_1, b_2, b_3 代入 $B(n)$ 可得

$$B(n)\le c_1A_n^{2-r}n^{-rs/2(s+2)}+c_2A_n^{2-r}n^{-rs/2(s+2)}+c_3A_n^2n^{-rs/2(s+2)}\le cA_n^2n^{-rs/2(s+2)}. \quad (3.20)$$

由于 $0\le\phi_n^*(x)\le A_n$, 当 $rs>2$ 时, 有

$$\begin{aligned}C(n) &\le \int_0^{+\infty}\phi_B^2(x)I(\phi_B(x)-A_n)f(x)\mathrm{d}x\le\frac{1}{A_n^{rs-2}}\int_0^{+\infty}\phi_B^{rs}(x)f(x)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{A_n^{rs-2}}E[\phi_B^{rs}(x)]=\frac{1}{A_n^{rs-2}}E[E(\theta\mid x)]^{rs}\le\frac{1}{A_n^{rs-2}}E(\theta^{rs})\le c\frac{1}{A_n^{rs-2}}, \quad (3.21)\end{aligned}$$

将 (3.19), (3.20) 和 (3.21) 式代入 (3.13) 式可得

$$R_n-R_G=O(A_n^2n^{-rs/2(s+2)})+O(\frac{1}{A_n^{rs-2}}).$$

取 $A_n=n^{1/2(s+2)}$ 时, 可得

$$R_n-R_G=O(n^{-(rs-2)/2(s+2)}).$$

注 当 $r\to1$, $s\to+\infty$ 时, 可以得到本文的收敛速度阶近似为 $O(n^{-1/2})$.

4 例子

下面举例说明适合文中定理条件的非指数分布族和先验分布是存在的, 在模型 (1.2) 式中, 其中 $x\in\chi=(0,\ \infty)$, $\theta\in\Omega=(0,\ +\infty)$, $0<k(\theta)<\infty$, 设参数 θ 服从区间 (0, 1) 上的均匀分布, 即 $\theta\sim U(0,\ 1)$, 则有

$$f(x)=\int_0^1 f(x|\theta)g(\theta)d\theta=e^{-x}\int_0^1\frac{k(\theta)}{1+\theta x}d\theta.$$

(1) $\displaystyle\int_\Omega\theta^{rs}dG(\theta)=\int_0^1\theta^{rs}d\theta=\frac{1}{rs+1}<\infty$;

(2) 由于 s >2, $2/s<r<1$, $0<k(\theta)<\infty$, 从而 $0<1-r<1$, 所以

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty}(f(x))^{1-r}dx &= \int_1^{+\infty}[e^{-x}\int_0^1\frac{k(\theta)}{1+\theta x}d\theta]^{1-r}dx=\int_1^{+\infty}e^{-x(1-r)}[\int_0^1\frac{k(\theta)}{1+\theta x}d\theta]^{1-r}dx\\ &\le \int_1^{+\infty}e^{-x(1-r)}[\int_0^1k(\theta)d\theta]^{1-r}dx\le c\int_1^{+\infty}e^{-x(1-r)}dx<\infty.\end{aligned}$$

由 (1), (2) 可知, 定理 3.1 的条件均满足.

参 考 文 献

[1] Robbins H. An empirical Bayes approach to statistics[C]. Prob. Berkeley: Univ. California Press, 1955, 1: 157–164.

[2] Singh R S. Empirical Bayes estimation in Lebesgue-exponential family with rates near best possible rate[J]. Ann. Statist., 1979, 7: 890–902.

[3] Singh R S. Wei L S. Empirical Bayes with rates and possible rate of convergence in $u(x)c(\theta)\exp(-\theta/x)$ family: Estimation case[J]. Ann. Inst. Statist. Math., 1992, 44: 435–449.

[4] Li J, Gupta S S. Monotone empirical Bayes tests with optimal rate of convergence for a truncation parameter[J]. Statist. Decis., 2001, 19: 223–237.

[5] Chen Lee Shen. Empirical Bayes testing for a nonexponential family distribution[J]. Comm. Stat.–The. Meth., 2007, 36: 2061–2074.

[6] 黄金超, 凌能祥, 程伟. 非指数分布族参数的经验 bayes 估计的收敛速度 [J]. 数学研究, 2012, 45(1): 99–106.

[7] Kotz S, Balakrishnan N, Johnson N L. Continuous multivariate distributions (Vol. 1, 2nd ed.)[M]. New York: John Wiley Sons, 2000.

[8] Tachen Liang. On an improved empirical Bayes estimator for positive exponential families[J]. Comm. Stat.–The. Meth., 2005, 17(7): 857–866.

[9] Pan J M. On the convergence rates in the central limit theorem for negatively associated sequences Chinese journal of appl.[J]. Prob. Stat., 1997, 13(2): 183–192.

EMPIRICAL BAYES ESTIMATOR FOR NONEXPONENTIAL DISTRIBUTION FAMLIIES UNDER NA SAMPLES

HUANG Jin-chao

(*Basic Course Department, Chouzhou Vocational Technology College, Chuzhou 239000, China*)

Abstract: The empirical Bayes (EB) estimator of parametric θ in nonexponential distribution families for NA samples is investigated under square loss functions. By using kernel-type density estimation, the empirical Bayes estimation rules are constructed. Under suitable conditions, it is shown that the proposed EB estimators are asymptotically optimal with convergence rates $O(n^{-(rs-2)/2(s+2)})$, where $s > 2$, $s \in N$, $2/s < r < 1$. Finally an example about the main results of this paper is given.

Keywords: nonexponential distribution; the kernel estimation of density function; empirical Bayes estimation; convergence rates; NA samples

2010 MR Subject Classification: 62C12; 62F12