

图的强符号圈控制数

周仲旺, 马振军

(山东潍坊学院数学与信息科学学院, 山东 潍坊 261061)

摘要: 本文研究了图的强符号圈控制数 $\gamma'_{ssc}(G)$. 利用最大独立集最大匹配等方法, 刻画了满足 $\gamma'_{ssc}(G) = |E| - 2$ 的所有连通图, 给出了 $\gamma'_{ssc}(G)$ 的一个下界, 求出了两类特殊图的强符号圈控制数.

关键词: 强符号圈控制函数; 强符号圈控制数; 完全 k 部图

MR(2010) 主题分类: 05C22

中图分类号: O157.5

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2016)01-0112-05

1 引言

设 $G = (V, E)$ 是一个简单图, 文中未加说明的记号和术语同文 [1]. 对于顶点 $v \in V(G)$, $E(v)$ 表示 G 中与 v 点相关联的边集, $N(v)$ 表示 G 中与 v 相邻的点集. 设 G_1, G_2 是两个不相交的图, G_1 和 G_2 的联图 $G + H$ [2] 定义为

$$\begin{aligned} V(G + H) &= V(G) \cup V(H), \\ E(G + H) &= E(G) \cup E(H) \cup \{uv | u \in V(G), v \in V(H)\}. \end{aligned}$$

引入以下概念:

定义 1.1 设 $G = (V, E)$ 是一个有限简单图, 一个函数 $f: E \rightarrow \{-1, 1\}$, 若满足对图 G 的任意无弦圈 C 都有 $\sum_{e \in C} f(e) \geq 1$, 则称 f 为图 G 的一个符号圈控制函数. f 的权 $\omega(f)$ 定义为图 G 的所有边函数值的和, 图 G 的所有符号圈控制函数中最小的权定义为 G 的符号圈控制数, 记作 $\gamma'_{sc}(G)$. 下面我们引入

定义 1.2 设 $G = (V, E)$ 是一个有限简单图, 一个函数 $f: E \rightarrow \{-1, 1\}$, 若满足对图 G 的任意圈 C 都有 $\sum_{e \in C} f(e) \geq 1$, 则称 f 为图 G 的一个强符号圈控制函数. 图 G 的强符号圈控制数定义为 $\gamma'_{ssc}(G) = \min_{f \text{ 是 } G \text{ 的强符号圈控制函数}} \{ \sum_{e \in E} f(e) \}$. 显然, $\gamma'_{ssc}(G) \geq \gamma'_{sc}(G)$.

受徐保根教授提出的定义 1.1 的启发, 参考国内外专家学者在图的控制理论方面引入的一系列新概念 [3-6], 本人觉得在实际问题中图的强符号圈控制数比符号圈控制数应用更广泛. 因此, 笔者提出以上概念并着手研究.

为简单起见, 若 f 是图 G 的一个强符号圈控制函数, 那么对任意 $S \subseteq E(G)$, 记 $f(S) = \sum_{e \in S} f(e)$, $E^+ = \{e | f(e) = 1\}$, $E^- = \{e | f(e) = -1\}$. 若 $f(e) = 1$, 则称 e 为正边, 若

*收稿日期: 2013-10-09

接收日期: 2014-09-03

基金项目: 山东潍坊市科技局资助项目 (20121102).

作者简介: 周仲旺 (1965-), 男, 山东五莲, 副教授, 研究方向: 图论.

$f(e) = -1$, 则称 e 为负边. 若 $f(E) = \gamma'_{ssc}(G)$, 则称函数 f 为图 G 的一个最小的强符号圈控制函数. 显然 $-|E(G)| \leq \gamma'_{ssc}(G) \leq |E(G)|$, 并且有下列事实:

- 1) $\gamma'_{ssc}(G) = -|E(G)| \iff G$ 无圈.
- 2) $\gamma'_{ssc}(G) = |E(G)| \iff G$ 是空图.
- 3) $\gamma'_{ssc}(G) \equiv |E(G)| \pmod{2}$.

2 主要结果

定理 2.1 设 G 是连通图, 则 $\gamma'_{ssc}(G) = |E| - 2 \iff G \in \{K_2, K_{m,n}, K_{m_1, m_2, \dots, m_t}\}$, 其中 $m \geq n \geq 2, t \geq 3$.

证 先证充分性. 显然 $\gamma'_{ssc}(K_2) = -1 = 1 - 2 = |E| - 2$. 注意到 $K_{m,n}, K_{m_1, m_2, \dots, m_t}$ 都不是空图, 再根据引言中的事实可知

$$\gamma'_{ssc}(K_{m,n}) \leq |E| - 2, \quad (1)$$

$$\gamma'_{ssc}(K_{m_1, m_2, \dots, m_t}) \leq |E| - 2. \quad (2)$$

下面证明以上两个不等式都取等号.

设 f 是 $K_{m,n}$ 的任意一个强符号圈控制函数, 则在 f 下 $K_{m,n}$ 中至多有一条边取 -1 . 因为若有两条边取 -1 , 则这两条边必在一个长度为 4 的圈 C_4 中, 所以 $f(C_4) \leq 0$, 这与 f 是 $K_{m,n}$ 的一个强符号圈控制函数相矛盾. 所以 $f(E) = |E^+| - |E^-| = |E| - 2|E^-| \geq |E| - 2$. 再结合 (1) 式可知 $\gamma'_{ssc}(K_{m,n}) = |E| - 2$.

设 f 是 $K_{m_1, m_2, \dots, m_t}$ 的任意一个强符号圈控制函数, 若在 f 下有两条边 $e_1 = u_1v_1, e_2 = u_2v_2$ 取 -1 , 则 u_1, v_1 两顶点分别在完全 t 部图 $K_{m_1, m_2, \dots, m_t}$ 的两部分 X_{u_1}, X_{v_1} 之中, u_2, v_2 两顶点也分别在完全 t 部图 $K_{m_1, m_2, \dots, m_t}$ 的两部分 X_{u_2}, X_{v_2} 之中, 显然 $X_{u_1} \neq X_{v_1}, X_{u_2} \neq X_{v_2}$. 若 $X_{u_1} = X_{u_2}$, 当 u_1, u_2 重合时, 若 v_1, v_2 在完全 t 部图 $K_{m_1, m_2, \dots, m_t}$ 的同一部分中, 则 e_1, e_2 必在同一个四边形中, 这不可能, 若 v_1, v_2 在完全 t 部图 $K_{m_1, m_2, \dots, m_t}$ 的不同部分中, 则 e_1, e_2 必在同一个三角形中, 这也不可能. 当 u_1, u_2 不重合时, 显然 $X_{u_1} \neq X_{v_2}, X_{v_1} \neq X_{u_2}$, 所以 $u_1v_1u_2v_2u_1$ 是 $K_{m_1, m_2, \dots, m_t}$ 的一个长度为 4 的圈且两条边取 -1 , 这是不可能的. 同理 $X_{v_1} = X_{v_2}$ 也不可能. 所以 $X_{u_1} \neq X_{u_2}$ 且 $X_{v_1} \neq X_{v_2}$, 但这时 $u_1v_1v_2u_2u_1$ 是一个长度为 4 的圈且两条边取 -1 , 这也是不可能的. 综上所述 $|E^-| \leq 1$. 所以

$$f(E) = |E| - 2|E^-| \geq |E| - 2. \quad (3)$$

再结合 (2) 式得 $\gamma'_{ssc}(K_{m_1, m_2, \dots, m_t}) = |E| - 2$. 充分性证毕.

下面再证必要性. 设

$$\gamma'_{ssc}(G) = |E| - 2. \quad (4)$$

不妨 $G \neq K_2$, 于是 G 无悬挂边且有以下事实:

1) G 的任意两边必在同一个长度为 3 或 4 的圈上, 否则若 G 有两边既不在同一个 3 圈上又不在同一个 4 圈上, 令这两边取 -1 其他边都取 $+1$, 则得 G 的一个强符号圈控制函数 f , 使 $\gamma'_{ssc}(G) \leq f(E) = |E| - 4$, 这与 (4) 式矛盾.

2) 对 G 的任意两个不相邻顶点 u, v , 必有 $N(u) = N(v)$. 否则若 $N(u) \neq N(v)$, 当 $N(u) \cap N(v) = \emptyset$ 时, 取 u 的一条邻边 uu_1, v 的一条邻边 vv_1 , 这两边显然既不在同一个 3 圈

上也不在同一个4圈上,这与上面事实矛盾. 当 $N(u) \cap N(v) \neq \emptyset$ 时, 设 $u_1 \in N(u) \cap N(v)$, u_2 是 u 的邻点但不是 v 的邻点, 则 vu_1 和 uu_2 两边既不在同一个3圈上也不在同一个4圈上, 这也与上面事实矛盾. 所以 $N(u) = N(v)$.

设 N_1 是图 G 的一个最大独立集, 则 N_1 中任何两点都不相邻, 所以 N_1 中任意两点的邻集都相等. 记 $N_2 = V - N_1$, 把 $G[N_2]$ 中的边都去掉后, 得到一个完全二部图 $K_{|N_1|, |N_2|}$. 若 N_2 是 G 的独立集, 则显然 $G = K_{|N_1|, |N_2|}$, 若 N_2 不是 G 的独立集, 则 $G[N_2]$ 中必有边. 设 N_3 是 $G[N_2]$ 的最大独立集, 则 N_3 必是 G 的独立集, 所以 N_3 中任意两点的邻集都相等. 令 $N_4 = N_2 - N_3$, 把 $G[N_4]$ 中的边都去掉后, 得到一个完全三部图 $K_{|N_1|, |N_3|, |N_4|}$. 若 N_4 是 G 的独立集, 则 $G = K_{|N_1|, |N_3|, |N_4|}$, 若 N_4 不是 G 的独立集, 则 $G[N_4]$ 中必有边. 设 N_5 是 $G[N_4]$ 的最大独立集, 则 N_5 必是 G 的独立集, 所以 N_5 中任意两点的邻集都相等. 令 $N_6 = N_4 - N_5$, 把 $G[N_6]$ 中的边都去掉后, 得到一个完全四部图 $K_{|N_1|, |N_3|, |N_5|, |N_6|}$. 若 N_6 是 G 的独立集, 则 $G = K_{|N_1|, |N_3|, |N_5|, |N_6|}$, 若 N_6 不是 G 的独立集, 则继续一步步分解下去, 最后必把 G 分解为一个完全多部图, 定理证毕.

定理 2.2 设 G 是个有 n 个顶点 m 条边的图, 则 $\gamma'_{ssc}(G) \geq m - 2n + 2$, 当且仅当 G 是树时取等号.

证 设 f 是图 G 的任意一个强符号圈控制函数, 则 $f(E) = |E^+| - |E^-| = |E| - 2|E^-|$. 把图 G 的正边都去掉后必得一个无圈图, 所以 $|E^-| \leq n - 1$, 这样

$$f(E) = m - 2|E^-| \geq m - 2(n - 1) = m - 2n + 2.$$

所以 $\gamma'_{ssc}(G) \geq m - 2n + 2$.

当 $\gamma'_{ssc}(G) = m - 2n + 2$ 时, 设 f 是图 G 的一个取值最小的强符号圈控制函数, 则必有 $|E^-| = n - 1$, 否则若 $|E^-| < n - 1$, 则 $f(E) = m - 2|E^-| > m - 2n + 2$ 矛盾. 因 $G[E^-]$ 中无圈, 所以 $G[E^-]$ 是树, 所以 G 中无正边. 否则树 $G[E^-]$ 中连接这条正边的两端点的路和这条正边构成圈 C , 使 $f(C) \leq 0$ 矛盾. 所以 $G = G[E^-]$ 是树. 证毕.

定理 2.3 设 T_n 是有 n 个顶点的树, 则 $\gamma'_{ssc}(T_n + K_1) = 2n - 1 - 2\alpha'(T_n)$, 其中 $\alpha'(T_n)$ 表示 T_n 的边独立数.

证 设 M 是 T_n 的一个最大匹配, 令 $f(e) = -1, e \in M, f(e) = 1, e \notin M$.

下面证明这样定义的 f 是 $T_n + K_1$ 的一个强符号圈控制函数.

设 C 是 $T_n + K_1$ 的任意一个圈, 则 C 一定过 K_1 . 记 C 上 K_1 的两关联边分别为 K_1u, K_1v . 显然 u, v 都是 T_n 的点, 不妨 T_n 中连接 u, v 两点的路为 $P = uv_1v_2 \cdots v_kv$, 则 $C = uv_1v_2 \cdots v_kvK_1u$. 当 k 为偶数时, P 的最大匹配含有 $\frac{k+2}{2}$ 个边, 因此 P 上至多有 $\frac{k+2}{2}$ 个 -1 , 所以 $f(C) \geq k + 1 - 2\frac{k+2}{2} + 2 = 1$. 当 k 为奇数时, P 的最大匹配含有 $\frac{k+1}{2}$ 个边, 因此 P 上至多有 $\frac{k+1}{2}$ 个 -1 , 所以 $f(C) \geq k + 1 - 2\frac{k+1}{2} + 2 = 2$. 这样我们就证明了 f 是 $T_n + K_1$ 的一个强符号圈控制函数, 所以

$$\gamma'_{ssc}(T_n + K_1) \leq f(E) = 2n - 1 - 2\alpha'(T_n). \quad (5)$$

下面再证明 $\gamma'_{ssc}(T_n + K_1) \geq 2n - 1 - 2\alpha'(T_n)$.

设 f 是 $T_n + K_1$ 的任意一个强符号圈控制函数, 令 $A = \{e | f(e) = -1, e \in T_n\}$, 显然 T_n 中任意两条负边不能邻接, 于是 A 构成 T_n 的一个匹配. 若 $E(K_1)$ 中有一条负边 K_1v , 则 v 在 T_n 中的关联边全是正边. 对 v 的任意一个邻点 v_1 , v_1 的关联边也全是正边. 现在把 vv_1 改

为负边, K_1v 改为正边, 其他边的权不变, 这样得到的函数 f_1 仍是 $T_n + K_1$ 的一个强符号圈控制函数. 这只要证明过边 vv_1 且不过边 K_1v 的圈 C 的权都大于等于 1 即可. 若 $d_{T_n}(v) = 1$, 这样的圈当然不存在. 若 $d_{T_n}(v) \geq 2$, 当这个圈过 v 点的 T_n 一条悬挂边 vu_1 时,

$$f_1(C) = f(C - vu_1 - u_1K_1 + vK_1) - 1 + 2 \geq 2,$$

当这个圈过 v 点的两条边 vu_1, vv_1 都不是 T_n 悬挂边时, u_1 的关联边和 v_1 的关联边必全是正边, 这样圈 C 上以 v 为中心就有连续的 4 条正边 $v_2v_1, v_1v, vu_1, u_1u_2$. 不妨

$$C = K_1v_kv_{k-1} \cdots v_2v_1vu_1u_2 \cdots u_lK_1.$$

当 v_kK_1 为负边时, 同上面一样可知 v_kv_{k-1} 必为正边, $v_{k-1}v_{k-2}$ 也必为正边. 这时路 $v_kv_{k-1} \cdots v_2v_1v$ 上至多有 $\lfloor \frac{k-3}{2} \rfloor$ 条负边, 所以圈 C 上路 $vv_1v_2 \cdots v_k$ 的权 $\geq k - 2\lfloor \frac{k-3}{2} \rfloor \geq 3$.

当 v_kK_1 为正边时, 路 $vv_1v_2 \cdots v_k$ 上至多有 $\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor$ 条负边, 所以圈 C 上路 $vv_1v_2 \cdots v_k$ 的权 $\geq k - 2\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor \geq 1$. 所以

若 v_kK_1 为正边, u_lK_1 为正边, 则 $f_1(C) \geq 1 + 1 + 1 + 1 - 2 = 2$.

若 v_kK_1 为正边, u_lK_1 为负边, 则 $f_1(C) \geq 1 + 3 + 1 - 1 - 2 = 2$.

若 v_kK_1 为负边, u_lK_1 为负边, 则 $f_1(C) \geq 3 + 3 - 1 - 1 - 2 = 2$.

所以 f_1 是 $T_n + K_1$ 的一个强符号圈控制函数且 $f_1(E) = f(E)$.

若 $E(K_1)$ 中还有负边, 用上面同样的方法可以把这条负边改为正边, 得到 $T_n + K_1$ 的一个强符号圈控制函数 f_2 使 $f_2(E) = f(E), \dots$, 一直这样下去, 最后必得 $T_n + K_1$ 的一个强符号圈控制函数 f_t 使 $f_t(E) = f(E)$, 且在 f_t 下 $E(K_1)$ 中的边全为正边. 这时

$$f(E) = f_t(E) = n - 1 + n - 2|A| \geq 2n - 1 - 2\alpha'(T_n),$$

再结合 (5) 式知 $\gamma'_{ssc}(T_n + K_1) = 2n - 1 - 2\alpha'(T_n)$. 定理证毕.

定理 2.4 W_n 表示有 $n + 1$ 个顶点的轮图, 则当 n 是偶数时, $\gamma'_{ssc}(W_n) = n + 2$, 当 n 是奇数时, $\gamma'_{ssc}(W_n) = n + 1$.

证 当 n 偶数时, 不妨 $n \geq 6$. $W_n = C_n + v_0$, 用 M 表示 C_n 的一个最大匹配去掉一条边后得到的匹配. 当 $e \in M$ 时, 令 $f(e) = -1$, 当 $e \notin M$ 时, 令 $f(e) = 1$. 则同定理 2.3 一样地可以证明 f 是 W_n 的一个强符号圈控制函数. 所以

$$\gamma'_{ssc}(W_n) \leq f(E) = n + 2. \quad (6)$$

下面证明 $\gamma'_{ssc}(W_n) \geq n + 2$.

设 f 是 W_n 的任意一个强符号圈控制函数, $C_n = v_1v_2 \cdots v_nv_1$, W_n 的中心为 v_0 . 若 $E(v_0)$ 中有一条负边 $e_0 = v_0v_1$, 则边 $v_0v_2, v_0v_3, v_0v_n, v_0v_{n-1}, v_1v_2, v_2v_3, v_1v_n, v_nv_{n-1}$ 都是正边. 令 e_0 取 1, v_1v_n 取 -1 , 其他边的取值不变.

下面证明这样得到的函数 g 仍是 W_n 的一个强符号圈控制函数. 这只要证明过 v_1v_n 且不过 v_0v_1 的圈 C_1 的权都大于等于 1 即可. 设圈 $C_1 = v_nv_{n-1} \cdots v_{n-k}v_0v_lv_{l-1} \cdots v_1v_n$. 当 $k = 0$ 时, $v_0v_lv_{l-1} \cdots v_1v_0$ 是一个圈 C_2 , 所以 $f(C_2) \geq 1$. 路 $P_1 = v_0v_lv_{l-1} \cdots v_1$, 则 $f(P_1) + f(v_1v_0) = f(C_2) \geq 1$, 所以 $f(P_1) \geq 1 - f(v_1v_0) = 2$. 而 $f(P_1) = g(P_1)$, 故

$$g(C_1) = g(v_nv_0) + g(P_1) + g(v_1v_n) \geq 1 + 2 - 1 \geq 1.$$

当 $k > 0$ 时, 路 $P_1 = v_n v_{n-1} \cdots v_{n-k} v_0$, 路 $P_2 = v_0 v_l v_{l-1} \cdots v_1$, 因 $P_1 v_0 v_n$ 是圈, $P_2 v_1 v_0$ 是圈, 所以 $f(P_1) + f(v_0 v_n) \geq 1$, $f(P_2) + f(v_1 v_0) \geq 1$, 所以 $f(P_1) + 1 \geq 1$, $f(P_2) - 1 \geq 1$. 显然 $g(P_1) = f(P_1)$, $g(P_2) = f(P_2)$, 所以 $g(C_1) = g(P_1) + g(P_2) + g(v_1 v_n) \geq 0 + 2 - 1 = 1$. 又因为 $f(v_{n-1} v_{n-2} \cdots v_3 v_0 v_{n-1}) \geq 1$, 所以

$$f(v_{n-1} v_{n-2} \cdots v_3) = f(v_{n-1} v_{n-2} \cdots v_3 v_0 v_{n-1}) - 2 \geq -1.$$

所以

$$\begin{aligned} g(C_n) &= g(v_{n-1} v_{n-2} \cdots v_3 v_2 v_1 v_n v_{n-1}) \\ &= g(v_{n-1} v_{n-2} \cdots v_3) + g(v_3 v_2) + g(v_2 v_1) + g(v_1 v_n) + g(v_n v_{n-1}) \\ &= f(v_{n-1} v_{n-2} \cdots v_3) + 1 + 1 - 1 + 1 \geq -1 + 1 + 1 - 1 + 1 = 1. \end{aligned}$$

这样就证明了 g 也是 W_n 的一个强符号圈控制函数且 $g(W_n) = f(W_n)$. 显然在 g 下 $E(v_0)$ 中的负边条数比在 f 下 $E(v_0)$ 中的负边条数少 1. 一直这样下去, 最后就能得到 W_n 的一个强符号圈控制函数 g , 使 $E(v_0)$ 中的边全取 1 且 $g(W_n) = f(W_n)$. 注意到 C_n 中的负边不能邻接, 所以 C_n 中的负边构成 C_n 的一个匹配 M_1 , 所以 $|M_1| \leq \frac{n}{2} - 1$. 据此得到 $f(W_n) = g(W_n) = n + n - 2|M_1| \geq 2n - 2(\frac{n}{2} - 1) = n + 2$. 再结合 (6) 式可知, $\gamma'_{ssc}(W_n) = n + 2$. 同理可证当 n 为奇数时, $\gamma'_{ssc}(W_n) = n + 1$. 定理证毕.

参 考 文 献

- [1] Bondy J A, Murty U S R. Graph theory with applications[M]. New York: Macmillan, 1976.
- [2] Xu Baogen. On signed cycle domination in graphs[J]. Discrete Math., 2009, 309: 1007–1012.
- [3] 吕新忠. 图的全符号控制数 [J]. 中国科学, 2007, 37(5): 573–578.
- [4] 黄中升, 邢化明, 赵燕冰. 图的逆符号边控制数的上界 [J]. 应用数学学报, 2010, 33(5): 840–846.
- [5] 徐保根, 张亚琼, 罗茜, 丁宗鹏. 图的反符号全控制数 [J]. 华东交通大学学报, 2012, 29(1): 35–38.
- [6] Sheikholeslami S M, Volkmann L. Signed total k -domination and k -domatic numbers of graphs[J]. Discrete Math., Algorithms and Appl., 2012, 4(1): 1–11.

ON STRONG SIGNED CYCLE DOMINATION IN GRAPHS

ZHOU Zhong-wang, MA Zhen-jun

(College of Mathematics and Informatics, Weifang University, Weifang 261061, China)

Abstract: In this paper, we study the strong signed cycle domination number $\gamma'_{ssc}(G)$ of graph G . By using maximum independent set, maximum matching etc., we characterize all connected graphs G with $\gamma'_{ssc}(G) = |E(G)| - 2$, and obtain a lower bound on $\gamma'_{ssc}(G)$. Finally we give the exact value of $\gamma'_{ssc}(G)$ for two special classes of graphs.

Keywords: strong signed cycle dominating function; strong signed cycle domination number; complete k -partite graph

2010 MR Subject Classification: 05C22