

一类食饵 - 捕食生物模型的动态分歧

李军燕¹, 李俐玫²

(1. 四川大学锦城学院, 四川 成都 611731)

(2. 四川师范大学数学与软件学院, 四川 成都 610068)

摘要: 本文运用线性全连续场的谱理论及跃迁理论讨论了一类食饵 - 捕食生物模型的动态分歧, 在一定条件下得到了跃迁类型的判据, 并判断了跃迁的类型, 同时也给出了分歧解的表达式, 最后对获得的结果做了必要的解释.

关键词: 食饵 - 捕食生物模型; 中心流形定理; 谱理论; 跃迁; 动态分歧

MR(2010) 主题分类号: 35B32

中图分类号: 0175.2

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2016)01-0105-07

1 引言

分歧是自然界的普遍现象, 它所描述的是一个稳定状态的系统, 当系统控制参数超过某个临界值时, 该系统就会跃迁到另一个状态. Rabinowitz 等对分歧做了一些研究^[1-3]; 近期马和汪建立了一套新的分歧理论用于研究非线性演化方程的稳定性和分歧^[4-6]; 文献 [7, 8] 用此套理论研究了不同系统的定态分歧问题. 本文探讨下面带有非单调反应函数的两物种食饵 - 捕食模型的动态分歧^[9].

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = d_1 \Delta u + u(a - bu - \frac{cv}{r + u^2}), x \in \Omega, t \in (0, \infty), \\ \frac{\partial v}{\partial t} = d_2 \Delta v + v(d - ev + \frac{fu}{r + u^2}), x \in \Omega, t \in (0, \infty), \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 $\Omega \in R^n$ 是一个具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域, u, v 分别表示两个物种的种群密度. d_1, d_2 和 a, d 分别表示两个物种 u, v 的扩散率和生长率, r 为半饱和常数, $\frac{cv}{r + u^2}$ 和 $\frac{fu}{r + u^2}$ 表示反应函数 (反映单位时间内随着食饵数量变化而引起的捕食者的数量变化). 一般来说, 许多带有反应函数的食饵 - 捕食生物模型中, 反应函数 $p(u)$ 都是单调连续的, 例如^[10-12]

$$p(u) = \frac{mu}{r + u}, p(u) = \frac{mu^2}{r + u^2}, p(u) = \frac{mu^2}{r + bu + u^2},$$

其中 m, r, b 为常数, m 表示种群的极大增长率, r 表示半饱和数.

但是, 实验表明在微生物动力学和化学动力学中, 非单调反应的函数也会经常出现. 这种现象经常会在利用生物有机体进行废物分解和水的净化过程中看到. 例如反应函数

$$p(u) = \frac{mu}{a + u^2}, p(u) = \frac{mu}{a + bu + u^2},$$

*收稿日期: 2014-06-09

接收日期: 2014-09-16

基金项目: 四川省教育厅青年基金资助 (12ZB108).

作者简介: 李军燕 (1986-), 女, 河南林州, 讲师, 研究方向: 微分方程与动力系统.

关于单调和非单调反应函数的详细背景可参见文献 [13, 14]. 特别是在文献 [14] 中, 对带非单调反应函数和齐次 Neumann 边界条件的两物种食饵 - 捕食生物模型 (1.1), 作者讨论了以下内容: 非零正常平衡态解的稳定性, 正平衡态解的先验估计, 不存在性及全局存在性.

本文主要依据分歧理论, 在以上文献研究基础之上进一步讨论系统 (1.1) 的动态分歧问题.

2 准备工作

2.1 建立抽象方程

给方程 (1.1) 配以 Neumann 边界条件, 表示所研究的食饵 - 捕食系统是封闭的, 种群与外界无流通. 显然 $U = (0, 0)^T$ 是方程的一个平衡解, 本文研究方程 (1.1) 在 $U = (0, 0)^T$ 附近的分歧情况.

首先对方程 (1.1) 在 $U = (0, 0)^T$ 的邻域内做 Taylor 展开, 并考虑初始条件和边界条件, 得到下面方程

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = d_1 \Delta u + au - bu^2 - \frac{c}{r} uv + o(|U|^2), \\ \frac{\partial v}{\partial t} = d_2 \Delta v + dv - ev^2 + \frac{f}{r} uv + o(|U|^2), \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = \frac{\partial v}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0, \\ u(x, 0) = u_0, v(x, 0) = v_0. \end{cases} \quad (2.1)$$

在系统 (2.1) 中假设两个物种的扩散率不相等, 即

$$d_1 \neq d_2. \quad (2.2)$$

本文中为方便讨论, 取区间 $\Omega = [0, L] \subset R^1$, 对 R^2, R^3 的情况可类似讨论. 下面取 $\lambda = d_2$ 为控制参量, 并且建立如下空间:

$$\begin{aligned} X &= \{(u, v) | u, v \in L^2(\Omega)\}, \\ X_1 &= \{(u, v) | u, v \in H^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = \frac{\partial v}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0\}. \end{aligned}$$

显然由此定义的 X, X_1 是两个 Hilbert 空间, 且 X_1 嵌入到 X 是一个稠密的紧包含 [13].

定义算子: $L_\lambda = -A_\lambda + B : X_1 \rightarrow X$, $G : X_1 \rightarrow X$, 其中

$$\begin{aligned} -A_\lambda U &= \begin{pmatrix} d_1 \Delta u \\ \lambda \Delta v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \Delta & 0 \\ 0 & \lambda \Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \\ B_\lambda U &= \begin{pmatrix} au \\ dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \\ G(U) &= \begin{pmatrix} -bu^2 - \frac{c}{r} uv + o(|U|^2) \\ -ev^2 + \frac{f}{r} uv + o(|U|^2) \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

上述定义的算子 $-A_\lambda$ 是一个线性同胚, B 是紧算子, $L_\lambda = -A_\lambda + B$ 是一个线性全连续场, 则方程 (1.1) 可以转化为如下抽象形式:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = L_\lambda U + G(U), \\ U(x, 0) = U_0(x), \end{cases} \quad (2.3)$$

其中 $U_0(x) = (u_0(x), v_0(x))$.

2.2 特征值和特征向量及临界参数的分析

假设 ρ_k 和 ψ_k 分别是下面 Laplace 算子的特征值和特征向量:

$$\begin{cases} -\Delta \psi_k = \rho_k \psi_k, \\ \frac{\partial \psi_k}{\partial n} \Big|_{x \in \partial \Omega} = 0, \\ \int_{\Omega} \psi_k^2 dx = 1, \quad \Omega = [0, L]. \end{cases} \quad (2.4)$$

则 ρ_k 满足 $0 = \rho_0 < \rho_1 < \rho_2 < \dots$, 且 $\rho_k = \frac{k^2 \pi^2}{L^2}$, $\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{L}}$, $\psi_k = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos \frac{k\pi x}{L}$.

设 $\beta_k^\pm$ 和 $e_k^\pm$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots$) 分别为算子 L_λ 对应的特征值和特征向量, $(\beta_k^\pm)^*$ 和 $(e_k^\pm)^*$ 分别为 L_λ 的共轭算子 L_λ^* 的特征值和特征向量

$$\begin{aligned} (\beta_k^+)^* &= \beta_k^+(\lambda) = d - \lambda \rho_k, & (\beta_k^-)^* &= \beta_k^-(\lambda) = a - d_1 \rho_k, \\ e_k^+ &= (e_k^+)^* = \begin{pmatrix} \psi_k \\ 0 \end{pmatrix}, & e_k^- &= (e_k^-)^* = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_k \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

它们满足如下关系:

$$\begin{aligned} L_\lambda e_k^+ &= \beta_k^+ e_k^+, & L_\lambda e_k^- &= \beta_k^- e_k^-, \\ L_\lambda^* (e_k^+)^* &= \beta_k^+ (e_k^+)^*, & L_\lambda^* (e_k^-)^* &= \beta_k^- (e_k^-)^*, \end{aligned}$$

且算子 L 的特征值 $\beta_k^\pm(\lambda)$ 满足以下关系:

$$\begin{aligned} \beta_k^+(\lambda) &= d - \lambda \rho_k \begin{cases} > 0, & \lambda < \lambda_0, \\ = 0, & \lambda = \lambda_0, \\ < 0, & \lambda > \lambda_0, \end{cases} \\ \beta_i^-(\lambda_0) &= a - d_1 \rho_i \neq 0, \forall i \in N, & \beta_i^+(\lambda_0) &= d(1 - \frac{\rho_i}{\rho_k}) \neq 0, \forall i \neq k, \end{aligned} \quad (2.5)$$

这里 $\lambda_0 = \frac{d}{\rho_k}$, $k \geq 1$.

3 主要定理及其证明

定理 3.1 设方程 (2.1) 满足条件 (2.2), (2.5), 则对方程 (2.1) 有如下结论成立:

(1) 若 $J(\lambda_0) > 0$, 则方程 (2.1) 在 $(U, \lambda) = (0, \lambda_0) = (0, \frac{d}{\rho_k})$ 处有一个跳跃型跃迁, 并且在 $\lambda > \lambda_0$ 一侧分歧出严格两个鞍点 $U_1(\lambda)$ 和 $U_2(\lambda)$, 其 Morse 指数为 1, 这里的

$$J(\lambda) = \frac{b}{L(d - \lambda\rho_{2k})}.$$

(2) 若 $J(\lambda_0) < 0$, 则方程 (2.1) 在 $(U, \lambda) = (0, \lambda_0) = (0, \frac{d}{\rho_k})$ 处有一个连续型跃迁, 即有一个吸引子分歧, 并且严格分歧出两个奇点 $U_1(\lambda)$ 和 $U_2(\lambda)$, 分别吸收 $\bar{U}$ 的两个开集, 其中 $\bar{U}$ 是以 $U = (u, v) = (0, 0)^T$ 为中心的一个小邻域.

(3) 在上述两种情况下, 分歧出的鞍点和奇点 $U_1(\lambda)$ 和 $U_2(\lambda)$ 可表达为

$$U_{1,2}(\lambda) = \pm |\frac{\beta_k^+(\lambda)}{J(\lambda_0)}|^{\frac{1}{2}} e_k + o(|\frac{\beta_k^+(\lambda)}{J(\lambda_0)}|^{\frac{1}{2}}).$$

证 由 2.2 节的特征值和特征向量的分析及全连续场的谱定理得, 在 $\lambda = \lambda_0 = \frac{d}{\rho_k}$ 的邻域内有如下的空间分解:

$$X_1 = E_1 \oplus E_2, \quad X = E_1 \oplus \overline{E_2},$$

其中 $E_1 = \text{span}\{e_k^+\}$, $E_2 = \text{span}\{e_0^\pm, e_1^\pm, \dots, e_{k-1}^\pm, e_k^-, e_{k+1}^\pm, \dots\}$, $\overline{E_2}$ 为 E_2 在 X 中的闭包. 即对 $\forall u \in X_1$, 有下列分解:

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = x_k e_k^+ + \sum_{i \neq k} y_i^+ e_i^+ + \sum_{i=0}^{\infty} y_i^- e_i^-, \quad (3.1)$$

将 (3.1) 式中的 U 代入方程 (2.3) 得

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}(x_k e_k^+ + \sum_{i \neq k} y_i^+ e_i^+ + \sum_{i=0}^{\infty} y_i^- e_i^-) \\ &= L(x_k e_k^+ + \sum_{i \neq k} y_i^+ e_i^+ + \sum_{i=0}^{\infty} y_i^- e_i^-) + G(x_k e_k^+ + \sum_{i \neq k} y_i^+ e_i^+ + \sum_{i=0}^{\infty} y_i^- e_i^-). \end{aligned} \quad (3.2)$$

对 (3.2) 式同时乘以 $e_k^+, e_i^+ (i \neq k), e_i^- (i = 0, 1, 2, \dots)$ 做内积, 得

$$\begin{cases} \frac{dx_k}{dt} \int_{\Omega} (e_k^+)^2 dx = \beta_k^+ x_k \int_{\Omega} (e_k^+)^2 dx + \int_{\Omega} G(U) e_k^+ dx, \\ \frac{dy_i^+}{dt} \int_{\Omega} (e_i^+)^2 dx = \beta_i^+ y_i^+ \int_{\Omega} (e_i^+)^2 dx + \int_{\Omega} G(U) e_i^+ dx, & i \neq k, \\ \frac{dy_i^-}{dt} \int_{\Omega} (e_i^-)^2 dx = \beta_i^- y_i^- \int_{\Omega} (e_i^-)^2 dx + \int_{\Omega} G(U) e_i^- dx, \end{cases} \quad (3.3)$$

注意到上式中的 $\int_{\Omega} (e_k^\pm)^2 dx = 1, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$

下面利用中心流形函数定理^[4] 计算中心流形函数

$$\Phi(x_k, \lambda) = \sum_{i \neq k} y_i^+ e_i^+ + \sum_{i=0}^{\infty} y_i^- e_i^- + O(|\beta_k^+(\lambda) x_k^2|) + o(x_k^2).$$

由 (3.3) 式可得

$$y_i^+ = -\frac{\langle G_2(x_k e_k^+), (e_i^+)^* \rangle}{\beta_i^+} + O(|\beta_k^+(\lambda)x_k^2|) + o(x_k^2),$$

其中

$$G_2(U) = \begin{pmatrix} -bu^2 - \frac{c}{r}uv \\ -ev^2 + \frac{f}{r}uv \end{pmatrix}.$$

经计算

$$y_i^+ = \begin{cases} \frac{bx_k^2}{\sqrt{L}\beta_0^+} + O(|\beta_k^+(\lambda)x_k^2|) + o(x_k^2), & i = 0, \\ \frac{bx_k^2}{\sqrt{2L}\beta_{2k}^+} + O(|\beta_k^+(\lambda)x_k^2|) + o(x_k^2), & i = 2k, \\ O(|\beta_k^+(\lambda)x_k^2|) + o(x_k^2), & i \neq 0, i \neq 2k. \end{cases}$$

同理可得

$$y_i^- = O(|\beta_k^+(\lambda)x_k^2|) + o(x_k^2), \forall i \in N.$$

则得到方程 (2.3) 的中心流形函数为

$$\Phi(x_k, \lambda) = \frac{bx_k^2}{\sqrt{L}\beta_0^+} e_0^+ + \frac{bx_k^2}{\sqrt{2L}\beta_{2k}^+} e_{2k}^+ + O(|\beta_k^+(\lambda)x_k^2|) + o(x_k^2),$$

代入 (3.2) 式中可得到约化方程的二阶近似

$$\frac{dx_k^+}{dt} = \beta_k^+(\lambda)x_k + J(\lambda)x_k^3 + o(|x_k|^3), \quad (3.4)$$

其中

$$J(\lambda) = \frac{b}{L\beta_{2k}^+} = \frac{b}{L(d - \lambda\rho_{2k})}.$$

容易看出, 当 $\beta_k^+(\lambda) > 0$ (即 $\lambda < \lambda_0$), 方程 (3.4) 的解满足

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |x_k(t, x_0)| > \delta, \quad \forall |x_0| < \varepsilon,$$

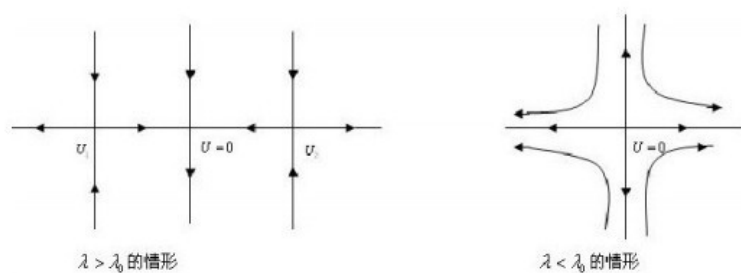
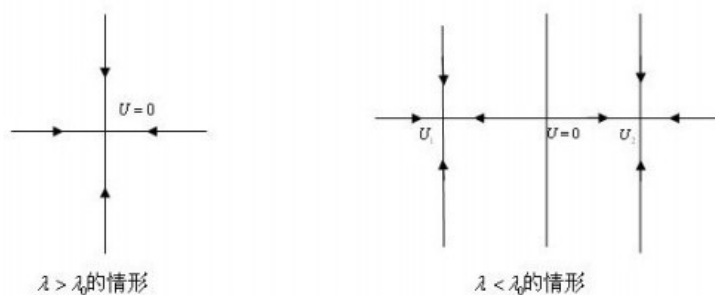
这里 $\delta > 0$ 是一个常数, $x_k(0, x_0) = x_0$. 由跃迁的基本定理^[4]知, 方程 (2.4) 在 $(x_k, \lambda) = (0, \lambda_0)$ 处发生跳跃型跃迁. 同时, 在 $x_k = 0$ 附近有严格的两个解:

$$x_k^\pm(\lambda) = \pm \left| \frac{\beta_k^+(\lambda)}{J(\lambda_0)} \right|^{\frac{1}{2}} + o\left(\left| \frac{\beta_k^+(\lambda)}{J(\lambda_0)} \right|^{\frac{1}{2}} \right),$$

即原方程 (2.1) 在 $(0, \lambda_0)$ 附近分歧出的解可表达为

$$U_{1,2}(\lambda) = \pm \left| \frac{\beta_k^+(\lambda)}{J(\lambda_0)} \right|^{\frac{1}{2}} e_k + o\left(\left| \frac{\beta_k^+(\lambda)}{J(\lambda_0)} \right|^{\frac{1}{2}} \right).$$

由以上分析, 可得定理 3.1 中的结论 (1) 成立, 同理可得结论 (2) 和 (3).

图 3.1 $J(\lambda_0) > 0$ 时中心流形上的拓扑结构图 3.2 $J(\lambda_0) < 0$ 时中心流形上的拓扑结构

3 对定理的分析

本文找到了方程 (2.1) 发生动态分歧的临界参数 $\lambda_0 = \frac{d}{\rho_k}$, 并且给出了分歧解的判别式 $J(\lambda_0)$ 和分歧解的表达式, 同时判定了跃迁的类型. 跃迁在中心流形上的拓扑结构如图 3.1 和图 3.2 所示.

图 3.1 是 $J(\lambda_0) > 0$ 的情形, 可以看出方程在 $\lambda > \lambda_0$ 的一侧分歧出两个鞍点, 并且这种跃迁是跳跃型跃迁; 图 3.2 是 $J(\lambda_0) < 0$ 的情形, 在 $\lambda < \lambda_0$ 的一侧发生连续型跃迁, 分歧出两个奇点, 这两个奇点都是吸引子, 即如果两个种群的密度初始值落在 U_1 或者 U_2 的吸引域内, 其密度最后趋向奇点 U_1 或者 U_2 , 这个结论可以为生态研究提供一定的理论依据.

参 考 文 献

- [1] Crandall M G, Rabinowitz P H. Bifurcation from simple eigenvalues[J]. J. Funct. Anal., 1971, 8(4): 321–330.
- [2] Kirchgassner K. Bifurcation in nonlinear hydrodynamic stability[J]. SIAM Review, 1975, 17(4): 652–659.
- [3] Rabinowitz P H. A bifurcation theorem for nonlinear eigenvalue problems[J]. J. Funct. Anal., 1971, 7(2): 214–238.
- [4] 马天, 汪守宏. 非线性演化方程的稳定性与分歧 [M]. 北京: 科学出版社, 2007.
- [5] Ma T, Wang S. Bifurcation theory and applications[M]. Singapore: World Scientific, 2005.

- [6] Ma T, Wang S. Dynamic bifurcation of nonlinear-volution equations[J]. Chin Ann Math: Ser B, 2005, 26(2): 185–206.
- [7] Li L M. Steady state bifurcation of the reaction-diffusion system for gene propagation[R]. Chongqing: Proceedings of the 7th Conference on Biological Dynamic Syatem And Stabillity of Differential Equation, 2010.
- [8] 张强, 张正丽. 一类反应扩散方程的定态分歧 [J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2010, 47(3): 461–463.
- [9] Pang P Y H, Wang M X. Non-constant positive steady states of a predator-prey system with non-monotonic functional response and diffusion[J]. Proc. London Math. Soc., 2004, 88(1): 135–157.
- [10] Yamada Y. Stability of steady states for prey-predator diffusion equations with homgeneous Dirichlet conditions[J]. SIAM J. Math. Anal., 1990, 21(2): 327–345.
- [11] Hsu S B. On global stability of predator-prey syetem[J]. Math. Biosci., 1978, 39(1-2): 1–10.
- [12] Sugie J, Kohno R, Miyazaki R. On a predator-prey system of Holling type[J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1997, 125(7): 2041–2050.
- [13] Xiao D M, Ruan S G. Multiple bifurcation in adelayed predator-prey system with nonmonotonic function response[J]. J. Diff. Equ., 2001, 176(2): 494–510.
- [14] Pang P Y H, Wang M X. Non-constant positive steaty states of a predator-prey system with non-monotonic functional response and diffusion[J]. Proc. London Math. Soc., 2004, 88(1): 135–157.
- [15] Kooij R E, Zegeling A. Qualitative properties of two-dimentional predator-prey systems[J]. Nonl. Anal., 1997, 29(6): 693–715.
- [16] Sugie J, Kohno R, Miyzaki R. On a predator-prey system of Holling type[J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1997, 125(7): 2041–2050.
- [17] 陈兰荪. 数学生态学模型与研究方法 [M]. 北京: 科学出版社, 1988.
- [18] 王元明, 徐君祥. 索伯列夫空间讲义 [M]. 南京: 东南大学出版社, 2003.

DYNAMIC BIFURCATION OF A CLASS OF PREDATOR-PREY BIOLOGICAL MODEL

LI Jun-yan¹, LI Li-mei²

(1. Jincheng College, Sichuan University, Chengdu 611731, China)

(2. College of Math. and Software Science, Sichuan Normal University, Chengdu 610068, China)

Abstract: In this paper, we disscuss the dynamic bifurcation of a class of predator-prey biological model. By using the spectrum theory of the linear completely continuous fields and transition theory, the distinguished number of transition is judged under certain conditions. At the same time, the expression bifurcation solution is given and necessary justification is also made for the results obtained.

Keywords: predator-prey biological model; center manifold; spectrum theory; transition theory; dynamic bifurcation

2010 MR Subject Classification: 35B32