Vol. 35 (2015)
No. 6

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

具有马氏调制的风险模型的均值 - 方差组合选择问题

杨 鹏
(西京学院应用统计与理学系; 应用统计科学研究中心, 陕西 西安 710123)

摘 要: 本文研究了保险市场上的均值 - 方差组合选择问题. 本文利用线性二次控制理论, 得到了最优策略和有效的均值 - 方差边界的显示解.

关键词: 均值 - 方差; 组合选择; 马氏链; 风险模型
MR(2010) **主题分类号**: 91A30; 91B30 **中图分类号**: O225
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2015)06-1541-10

1 引言

最近, 有大量的文献研究风险模型在投资和再保险下, 最大化或最小化一些目标函数. 文 [1] 首先研究了该问题. 它假设保险公司的盈余过程满足扩散过程, 风险资产满足几何布朗运动, 获得了最大化终值财富的最优策略和值函数. 文 [2] 研究了类似的问题, 获得了最优投资 - 再保险策略和最优值函数. 文 [3] 研究了跳 - 扩散过程的最优投资问题, 获得了最优投资策略和最优值函数及破产概率的数值解.

均值 - 方差问题的目标是, 在终值财富的均值给定时同时使方差最小. 文 [4] 首先研究了该问题. 之后, 许多学者都研究了该问题. 文 [5] 研究了动态多个时代的均值 - 方差组合问题, 文 [6] 在随机 LQ 的框架下研究了连续时间均值 - 方差组合问题, 通过通过随机线性二次控制 (LQ) 的方法得到了最优策略和有效边界. 文 [7] 研究了马尔柯夫调制市场上具有资产负债的均值 - 方差组合问题, 获得了最优策略和有效边界.

研究中发现很少有学者在具有马氏调制的风险模型中研究均值 - 方差问题. 研究该问题, 可以指导保险公司进行合理的投资, 使自身获得一定的财富, 而且面临的风险最小. 因此, 研究该问题具有很大的现实意义. 本文就致力于这方面的研究. 在研究中, 我们假设保险公司的盈余满足扩散过程, 可以通过再保险减小风险, 同时通过在金融市场上投资来增加财富. 金融市场由一个无风险资产和 n 个风险资产上投资, 风险资产满足跳 - 扩散过程. 假设保险公司的盈余过程和金融市场都具有马氏调制. 应用线性二次控制理论解决该问题, 获得了最优的再保险、投资策略和有效的均值 - 方差边界的显示解.

2 模型

为了使数学上更为严格, 假设所有的随机过程和随机变量都定义在完备的概率空间 (Ω, F_t, P) 上, 并且有一满足通常条件的 σ - 流 $\{F_t, t \geq 0\}$, 即 F_t 右连续且 P 完备. 允许连续交易, 不考虑交易费用和税收, 且所有资产都是无穷可分的.

*收稿日期: 2013-07-05 接收日期: 2013-11-07
基金项目: 陕西省教育厅科研计划项目资助 (15JK2183).
作者简介: 杨鹏 (1983–), 男, 山东临沂, 讲师, 研究方向: 数理金融, 风险理论.

设理赔过程 $C(t)$ 满足如下的马氏调制的几何布朗运动

$$dC(t)=\alpha(t,X(t))dt-\beta(t,X(t))dW_t^0,$$

这里 $\{W_t^0,t\geq 0\}$ 是标准布朗运动, $X(t)$ 是概率空间 (Ω,F,P) 上的连续时间有限状态马尔柯夫链, 状态空间为 $E:=(1,2,\cdots,N)$, 假设 $\{W_t^0,t\geq 0\}$ 和 $X(t)$ 相互独立. 为了使该马尔柯夫链 $X(t)$ 更加具体, 设它的的转移矩阵为 $P=(p_{ij}(t))_{N\times N}$, 其中 N 是状态空间元素的总数. 更精确地, 转移概率可定义为

$$p_{ij}(t)=p(X(s+t)=j\mid X(s)=i),i,j=1,2,\cdots,N;$$

密度矩阵为 $Q=(q_{ij})_{N\times N}$,

$$q_{ij}:=\lim_{t\to 0^+}\frac{p_{ij}}{t},i\neq j,q_{ii}:=\lim_{t\to 0^+}\frac{p_{ii}-1}{t},i,j=1,2,\cdots,N,$$

这里对每个 i 有 $\sum\limits_{i=1}^{N}q_{ij}=0$, 对于 $i,j=1,2,\cdots,N(i\neq j)$ 有 $q_{ij}>0$.

保费支付率满足下面的方程

$$m_t=(1+\theta)\alpha(t,X(t)),$$

其中 θ 为保险公司的安全负载, 所以保险公司在进行投资和再保险之前, 盈余 $R(t)$ 满足下面的方程

$$dR(t)=m_tdt-dC(t)=\theta\alpha(t,X(t))dt+\beta(t,X(t))dW_t^0.$$

设 $q_t\in[0,1]$ 为时刻 t 的再保险比例, 再保险的安全负载为 $\eta(\eta>\theta)$, 则进行再保险后, 保险公司的盈余满足下面的方程

$$dR(t,q)=(\theta-\eta q_t)\alpha(t,X(t))dt+(1-q_t)\beta(t,X(t))dW_t^0.$$

假设金融市场由一个无风险资产和 n 个风险资产组成. 无风险资产在时刻 t 的价格为 $S_0(t)$, 满足下面的方程

$$dS_0(t)=r(t,X(t))S_0(t)dt.$$

风险险资产在时刻 t 的价格为 $S_i(t),i=1,\cdots,n$, 满足下面的方程

$$\begin{aligned}dS_i(t) &= S_i(t-)\{r_i(t,X(t-))dt+\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}(t,X(t-))dW_t^j\\ &\quad+\sum_{j=1}^{n}\int_{R-\{0\}}\gamma_{ij}(t,y,X(t-))\hat{M}_{X(t-)}^j(dt,dy)\},\ \ i=1,\cdots,n,\end{aligned}$$

这里 $\{W_t^j,t\geq 0\}$, $j=1,\cdots,n$ 是标准布朗运动, 假设 $\{W_t^j,t\geq 0\}$, $j=0,\cdots,n$ 相互独立.

$$\hat{M}_{X(t-)}^j(dt,dy):=M_{X(t-)}^j(dt,dy)-\nu_{X(t-)}^j(dy\mid t)\eta(dt),j=1,2,\cdots,n$$

相互独立, 是马氏调制的泊松补偿随机测度. 进一步, 假设 $r_i(t,i) > r(t,i)$, $\eta(dt) = dt$, 马氏调制的泊松补偿随机测度和布朗运动相互独立.

设 $\pi_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 是时刻 t 在第 $i(i = 1,2,\cdots,n)$ 个风险资产上投资的金额, 令 $\pi = (\pi_1,\cdots,\pi_n)$. 选择 π 和风险暴露 q 作为控制变量. 在任意时刻 $t \geq 0$, $q = q(t)$, $\pi = \pi(t)$ 由保险公司选择, 记 $u(\cdot) = (q(\cdot),\pi(\cdot))$. 一旦策略 $u(\cdot)$ 被选定, 则盈余过程变为

$$\begin{aligned} dz(t) =& [(\theta - \eta q_t)\alpha(t,X(t)) + r(t,X(t))z(t) + B(t,X(t))\pi(t)]dt + (1-q_t)\beta(t,X(t))dW_t^0 \\ &+ \pi(t)^\top\sigma(t,X(t))dW_t + \pi(t)^\top\int_{R-\{0\}}\gamma(t,y,X(t-))\hat{M}_{X(t-)}(dt,dy), \end{aligned} \tag{1}$$

$z(0) = z$, 这里

$$\begin{aligned} &\sigma(t,X(t)) := (\sigma_{ij}(t,X(t)))_{n\times n}, \gamma(t,y,X(t-)) = (\gamma_{ij}(t,y,X(t-)))_{n\times n}, \\ &\hat{M}_{X(t-)}(dt,dy) := (\hat{M}^1_{X(t-)}(dt,dy),\cdots,\hat{M}^n_{X(t-)}(dt,dy))^\top, \\ &B(t,X(t)) := [r_1(t,X(t)) - r(t,X(t)), r_2(t,X(t)) - r(t,X(t)),\cdots,r_n(t,X(t)) - r(t,X(t))]^\top, \end{aligned}$$

其中 $A^\top$ 是 A 的转置.

定义 1 一个控制策略 $u(\cdot) = (q(\cdot),\pi(\cdot))$ 称为可行的, 如果 $q(\cdot)$ 和 $\pi(\cdot)$ 关于流 F 可料, 对任意的 $t \geq 0$, $q(\cdot)$ 和 $\pi(\cdot)$ 满足下面的条件

(1) $0 \leq q(t) \leq 1$;

(2) 对所有的 $T < \infty, i = 1,\cdots,n$ 有 $P\{\int_0^T[\pi_i^2(t)dt]^2 < \infty\} = 1$.

所有可行的策略记为 $\mathscr{U}$.

3 均值 - 方差组合选择问题

保险人的目的是, 在所有可行策略中找到一个策略 $u(\cdot)$, 使得 $Ez(t) = d$, 同时使

$$\mathrm{Var}z(T) \equiv E[z(T) - Ez(T)]^2 = E[z(T) - d]^2$$

最小. 该问题称为均值 - 方差组合选择问题.

定义 2 均值 - 方差组合选择问题是以参数 $d \in R^1$ 为限制的随机最优化问题, 也就是

$$\begin{cases} \min J_{MV}(z_0,i,u(\cdot)) := E_{z_0,i}[z(T) - d]^2 \\ \text{使得}\ \ Ez(T) = d, u(\cdot) \in \mathfrak{U}, (z(\cdot),u(\cdot))\ \text{满足}\ (1), \end{cases} \tag{2}$$

这里 $E_{z_0,i}$ 是在概率测度 $P_{z_0,i} := P(\cdot \mid z(0) = z_0, X(0) = i)$ 下的条件期望.

引理 1 均值 - 方差问题 (2) 对于 $d \in R$ 称为是可行的当且仅当

$$E\int_0^T B(t,X(t))^\top B(t,X(t))dt > 0.$$

该引理的证明和文 [6] 相似, 这里就不再证明了.

引理 2 设 $f_t(t,i) = h(t,i)f(t,i) - \sum\limits_{j=1}^N q_{ij}f(t,j)$, $f(T) = e$, 记 $B(t)$ 如下

$$B(t) = (h(t,1),h(t,2),\cdots,h(t,N))_{\mathrm{diag}} - A,$$

这里 $A=(q_{ij})_{N\times N}$, 则由 Feynman-Kac 公式获得 $f(t,i)$ 满足下式

$$f(t,i)=E_{t,i}\{\exp[-\int_t^T h(s,X(s))ds]\},$$

这里 $E_{t,i}$ 是以 $X(t)=i$ 为条件的条件期望.

证 从文 [8] 知如下定义的 $M_v, v\geq t$ 为鞅

$$M_v:=f(v,X(v))-f(t,X(t))-\int_t^T[f_t(s,X(s))+<f(s),A'X(s)>]ds.$$

设 $K(v)$ 定义如下

$$K(v)=\exp\{-\int_t^T h(s,X(s))ds\}.$$

应用 Itö公式, 有

$$\begin{aligned} d(K(v)f(v,X(v))) &= K(v)\{df(v,X(v))-h(v,X(v))f(v,X(v))dv\} \\ &= K(v)\{dM(v)+[f_t(v,X(v))+\langle f(v),A'X(v)\rangle]dv \\ &\quad -h(v,X(v))f(v,X(v))dv\}, \end{aligned}$$

因为

$$f_t(v,X(v))=\langle f_t(v),X(v)\rangle=\langle A(v)f(v),X(v)\rangle=h(v,X(v))f(v,X(v))-\langle f(v),A'X(v)\rangle.$$

所以

$$K(v)f(v,X(v))-f(t,X(t))=\int_t^T K(s)dM(s).$$

设 $v=T$ 然后取期望得到

$$f(t,i)=E_{t,i}K(T)=E_{t,i}\{\exp[-\int_t^T h(s,X(s))ds]\}.$$

证毕.

有了引理 1 和引理 2 的保证, 我们继续研究均值 - 方差最优化问题. 因为问题 (2) 是一个凸的最优化问题, 限制 $Ez(T)=d$ 能够用拉格朗日乘数因子 $\lambda\in R$ 做进一步的处理. 问题 (2) 可转化为如下的问题

$$\begin{cases} J_{MVL}(z_0,i,u(\cdot),\lambda)=E_{z_0,i}[z(T)+\lambda-d]^2-\lambda^2 \\ \text{使得 } Ez(T)=d, u(\cdot)\in\mathfrak{U}, (z(\cdot),u(\cdot)) \text{ 满足 } (1). \end{cases} \tag{3}$$

4 没有限制时的解

在这一节里求解问题 (3). 首先设

$$\rho(t,i)=B(t,i)D(t,i)^{-1}B(t,i)^\top,$$

其中 $D(t,i)$ 为

$$D(t,i)=\sigma(t,i)\sigma(t,i)^\top+\int_{R-\{0\}}\gamma(t,y,i)C(\nu_i(dy\mid t))\gamma(t,y,i)^\top,$$

$C(\nu_i(dy\mid t))=\mathrm{diag}(\nu_i^1(dy\mid t),\cdots,\nu_i^n(dy\mid t))$, $i=1,2,\cdots,N$.

引理 3 假设 $P(t,i)$, $H(t,i)$ 满足下面的 Riccati 方程

$$dP(t,i)=[\rho(t,i)+\frac{\eta^2\alpha^2(t,i)}{\beta^2(t,i)}-2r(t,i)]P(t,i)-\sum_{j=1}^N q_{ij}P(t,i),$$

边界条件 $P(T,i)=1, i=1,2,\cdots,N$,

$$dH(t,i)=r(t,i)H(t,i)-\frac{1}{P(t,i)}\sum_{j=1}^N q_{ij}[H(t,j)-H(t,i)],$$

边界条件 $H(T,i)=1, i=1,2,\cdots,N$, 则

$$P(t,i)=E_{t,i}\{\exp[-\int_t^T f(s,X(s))ds]\},\tag{4}$$

$$H(t,i)=1-\int_t^T\exp\{-\int_t^s[r(\tau,i)+\sum_{j\neq i}q_{ij}]\}d\tau\times[r(s,i)+\frac{1}{P(s,i)}\sum_{j\neq i}q_{ij}P(s,j)[1-H(t,i)]],\tag{5}$$

这里

$$f(t,i)=\rho(t,i)+\frac{\eta^2\alpha^2(t,i)}{\beta^2(t,i)}-2r(t,i), i=1,2,\cdots,N.$$

证 由引理 2 可得 (4) 式成立, (5) 式的证明和文献 [6] 相似, 不再证明.

引理 4 假设 $G(t,i)$, $F(t,i)$ 满足下面的 Riccati 方程

$$dG(t,i)=[\rho(t,i)-2r(t,i)]G(t,i)-\sum_{j=1}^N q_{ij}G(t,i),$$

边界条件 $G(T,i)=1, i=1,2,\cdots,N$,

$$dF(t,i)=r(t,i)F(t,i)-\frac{1}{G(t,i)}\sum_{j=1}^N q_{ij}[F(t,j)-F(t,i)],$$

边界条件 $F(T,i)=1, i=1,2,\cdots,N$, 则

$$G(t,i)=E_{t,i}\{\exp[-\int_t^T g(s,X(s))ds]\},\tag{6}$$

$$F(t,i)=1-\int_t^T\exp\{-\int_t^s[r(\tau,i)+\sum_{j\neq i}q_{ij}]\}d\tau\times[r(s,i)+\frac{1}{G(s,i)}\sum_{j\neq i}q_{ij}G(s,j)[1-F(t,i)]],\tag{7}$$

这里

$$g(t,i)=\rho(t,i)-2r(t,i), i=1,2,\cdots,N.$$

证 和引理 3 相似的即可获得引理 4.

定理 1 设

$$\hat{q}(t,z,i)=1+\frac{\eta\alpha(t,i)}{\beta(t,i)^2}[z+(\lambda-d)H(t,i)],$$
$$\gamma=\sum_{i=j}\int_0^T P(t,j)q_{ij}[H(t,j)-H(t,x(t))]^2dt.$$

(1) 如果 $\hat{q}(t,z,i)>0$, 问题 (3) 的最优投资策略为

$$\pi^*(t,z,i)=-D(t,i)^{-1}B(t,i)^\top[z+(\lambda-d)H(t,i)]; \tag{8}$$

最优再保险策略为

$$q^*(t,z,i)=\hat{q}(t,z,i)=1+\frac{\eta\alpha(t,i)}{\beta(t,i)^2}[z+(\lambda-d)H(t,i)], \tag{9}$$

最优的值函数为

$$\begin{aligned}&\inf_{\pi(\cdot)\text{admissible}} J(z_0,i_0,\pi(\cdot),\lambda)\\=&[P(0,i_0)H(0,i_0)^2+\gamma-1](\lambda-d)^2+2[P(0,i_0)H(0,i_0)z_0-d](\lambda-d)+P(0,i_0)z_0^2-d^2\\&+2P(t,x(t))\alpha(t,i)(\theta-\eta)[z+(\lambda-d)H(t,x(t))].\end{aligned} \tag{10}$$

(2) 如果 $\hat{q}(t,z,i)\le 0$ 问题 (3) 的最优再保险策略 $q^*(t,z,i)=0$, 最优的投资策略为

$$\pi^*(t,z,i)=-D(t,i)^{-1}B(t,i)^\top[z+(\lambda-d)F(t,i)], \tag{11}$$

最优的值函数为

$$\begin{aligned}&\inf_{\pi(\cdot)\text{admissible}} J(z_0,i_0,\pi(\cdot),\lambda)\\=&[G(0,i_0)F(0,i_0)^2+\gamma-1](\lambda-d)^2+2[G(0,i_0)F(0,i_0)z_0-d](\lambda-d)+G(0,i_0)z_0^2-d^2\\&+2G(t,x(t))\alpha(t,i)\theta[z+(\lambda-d)F(t,x(t))]+\beta(t,i)^2.\end{aligned} \tag{12}$$

证 (1) 对 $P(t,i)[z+(\lambda-d)H(t,i)]^2$ 应用 Itö公式得到

$$\begin{aligned}&d\{P(t,x(t))[z+(\lambda-d)H(t,x(t))]^2\}\\=\;&P_t(t,x(t))[z+(\lambda-d)H(t,x(t))]^2+P(t,x(t))\\&\{2[z+(\lambda-d)H(t,x(t))][dz(t)+(\lambda-d)H_t(t,x(t))]\\&+\pi^\top\sigma(t,i)\sigma^\top(t,i)\pi+\beta^2(t,i)(1-q)^2\}dt+\sum_{j=1}^N q_{x(t)j}P(t,j)[z+(\lambda-d)H(t,j]^2\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +\sum_{j=1}^{n}\int_{R-\{0\}} P(t,x(t))\{[z+\pi^\top\gamma(t,y,i)+(\lambda-d)H(t,x(t))]^2-[z+(\lambda-d)H(t,x(t))]^2 \\
& -2[z+(\lambda-d)H(t,x(t))]\pi^\top\gamma(t,y,i)\}\nu_i^j(dy\mid t) \\
= \ & [z+(\lambda-d)H(t,x(t))]^2[\rho(t,i)+\frac{\eta^2\alpha(t,i)^2}{\beta(t,i)^2}-2r(t,i)]P(t,x(t)) \\
& -\sum_{j=1}^{N} q_{x(t)j}P(t,j)[z+(\lambda-d)H(t,x(t))]^2+\sum_{j=1}^{N} q_{x(t)j}P(t,j)[z+(\lambda-d)H(t,j)]^2 \\
& -2(\lambda-d)[z+(\lambda-d)H(t,x(t))]\sum_{j=1}^{N} q_{ij}[H(t,j)-H(t,X(t))] \\
& +P(t,x(t))\{\pi(t)^\top(\sigma(t,i)\sigma^\top(t,i))\pi+\pi(t)^\top\int_{R-\{0\}}\gamma(t,y,i)C(\nu_i(dy\mid t))\gamma(t,y,i)^\top\pi(t)\} \\
& +\beta^2(t,i)(1-q)^2+2[z+(\lambda-d)H(t,x(t))][B\pi(t)+(\theta-\eta q(t))\alpha(t,i)] \\
& +2r(t,i)[z+(\lambda-d)H(t,x(t))]^2\}dt \\
& +2P(t,x(t))[z+(\lambda-d)H(t,x(t))][\pi(t)^\top\sigma(t,X(t))dW_t+(1-q_t)\beta(t,X(t))dW_t^0] \\
= \ & P(t,x(t))\{(\pi-\pi^*)^\top D(t,i)(\pi-\pi^*)+\beta^2(t,i)[q-q^*]^2\} \\
& +2P(t,x(t))\alpha(t,i)(\theta-\eta)[z+(\lambda-d)H(t,x(t))] \\
& +(\lambda-d)^2\sum_{j=1}^{N} q_{x(t)j}P(t,j)[H(t,j)-H(t,x(t))]^2+2P(t,x(t)) \\
& [z+(\lambda-d)H(t,x(t))][\pi(t)^\top\sigma(t,X(t))dW_t+(1-q_t)\beta(t,X(t))dW_t^0],
\end{aligned}
$$

这里 $\pi^*(t,z,i), q^*(t,z,i)$ 分别是 (8) 和 (9) 的右手边. 对上式在 0 到 T 上求积分, 然后再求期望, 得到

$$
\begin{aligned}
& E[z(T)+\lambda-d]^2=P(0,i_0)[z+(\lambda-d)H(0,i_0)]^2+\gamma(\lambda-d)^2 \\
& +E\int_0^T P(t,x(t))\{(\pi-\pi^*)^\top D(t,i)(\pi-\pi^*)+\beta^2[q-q^*]^2\} \\
& +2P(t,x(t))\alpha(t,i)(\theta-\eta)[z+(\lambda-d)H(t,x(t))],
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
& J(z_0,i_0,u(\cdot),\lambda)=E[z(T)+\lambda-d]^2-\lambda^2 \\
= \ & [P(0,i_0)H(0,i_0)^2+\gamma-1](\lambda-d)^2+2[P(0,i_0)H(0,i_0)z_0-d](\lambda-d)+P(0,i_0)z_0^2-d^2 \\
& +2P(t,x(t))\alpha(t)(\theta-\eta)[z+(\lambda-d)H(t,x(t))] \\
& +E\int_0^T P(t,x(t))\{(\pi-\pi^*)^\top D(t,i)(\pi-\pi^*)+\frac{\beta^2(t,i)}{2}[q-q^*]^2\}.
\end{aligned}
$$

由引理 1 知 $P(t,X(t))>0$ 所以最优的投资、再保险策略分别满足 (8), (9) 式, 最优的值函数满足 (10) 式.

(2) 因为最优的再保险策略 $q^*(t,z,i)\in[0,1]$. 所以当 $\hat{q}(t,z,i)\in[0,1]$ 时, $q^*(t,z,i)=\hat{q}(t,z,i)$); $\hat{q}(t,z,i)\le 0$ 时 $q^*(t,z,i)=0$. 这种情况和 (1) 相似的证明, 可得 $\pi^*(t,z,i)$, $\inf_{\pi(\cdot)\text{admissible}} J(z_0,i_0,\pi(\cdot),\lambda)$ 分别满足 (11), (12) 式.

5 有效边界和最优策略

本节求解均值 - 方差问题 (2). 和文 [6] 类似的有 $P(0,i_0)H(0,i_0)^2+\gamma-1<0$. 注意到 $J_{z_0,i_0,u(\cdot)}$ 关于 $u(\cdot)$ 是严格凸的, 所以应用 Lagrange duality 定理得到

$$J_{MV}(z_0,i_0)=\sup_{\lambda\in R^1}\inf_{\pi(\cdot)\ \text{admissible}} J(z_0,i_0,\pi(\cdot),\lambda)>-\infty. \tag{13}$$

显然 $\inf\limits_{\pi(\cdot)\text{admissible}} J(z_0,i_0,\pi(\cdot),\lambda)>-\infty$ 是关于 λ 的二次函数. 下面分两种情况讨论.

(1) 如果 $q^*(t,z,i)=\hat{q}(t,z,i)$, 则 $\inf\limits_{\pi(\cdot)\text{admissible}} J(z_0,i_0,\pi(\cdot),\lambda)>-\infty$ 在 λ^* 处获得最大值, λ^* 满足下式

$$\lambda^*-d=\frac{d-P(0,i_0)H(0,i_0)z_0-(\theta-\eta)P(t,X(t))\alpha(t,i)z}{P(0,i_0)H(0,i_0)^2+\gamma-1}, \tag{14}$$

把 λ^* 代入 (13) 式得到

$$\begin{aligned} &J_{MV}(z_0,i_0)\\ =&[P(0,i_0)H(0,i_0)^2+\gamma-1](\lambda^*-d)^2\\ &+2[P(0,i_0)H(0,i_0)z_0-d](\lambda^*-d)+P(0,i_0)z_0^2-d^2\\ &+2P(t,x(t))\alpha(t,i)(\theta-\eta)[z+(\lambda^*-d)H(t,x(t))]P(t,x(t)). \end{aligned} \tag{15}$$

(2) 如果 $q^*(t,z,i)=0$, 则 $\inf_{\pi(\cdot)\text{admissible}} J(z_0,i_0,\pi(\cdot),\lambda)>-\infty$ 在 λ^* 处获得最大值, λ^* 满足下式

$$\lambda^*-d=\frac{d-G(0,i_0)F(0,i_0)z_0-\theta G(t,X(t))\alpha(t,i)z}{G(0,i_0)F(0,i_0)^2+\gamma-1}, \tag{16}$$

把 λ^* 代入 (13) 式得到

$$\begin{aligned} &J_{MV}(z_0,i_0)\\ =&[G(0,i_0)F(0,i_0)^2+\gamma-1](\lambda^*-d)^2\\ &+2[G(0,i_0)F(0,i_0)z_0-d](\lambda^*-d)+G(0,i_0)z_0^2-d^2\\ &+2G(t,x(t))\alpha(t,i)\theta[z+(\lambda^*-d)F(t,x(t))]G(t,x(t))+\beta(t,i)^2. \end{aligned} \tag{17}$$

通过上述分析, 得到下面的定理.

定理 2 (1) 如果 $\hat{q}(t,z,i)>0$, 均值 - 方差问题 (2) 在时刻 t, 财富为 z, 马氏链的状态为 i 时, 最优的再保险策略 $\pi^*(t,z,i)$ 为

$$q^*(t,z,i)=\hat{q}(t,z,i)=1+\frac{\eta\alpha(t,i)}{\beta(t,i)^2}[z+(\lambda^*-d)H(t,i)], \tag{18}$$

最优的投资策略 $\pi^*(t,z,i)$ 为

$$\pi^*(t,z,i) = -D(t,i)^{-1}B(t,i)^\top[z+(\lambda^*-d)H(t,i)], \tag{19}$$

最优的边界 $\mathrm{Var}Z(T)$ 为

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}Z(T) =& J_{MV}(z_0,i_0)\\ =& [P(0,i_0)H(0,i_0)^2+\gamma-1](\lambda^*-d)^2\\ &+2[P(0,i_0)H(0,i_0)z_0-d](\lambda^*-d)+P(0,i_0)z_0^2-d^2\\ &+2P(t,x(t))\alpha(t,i)(\theta-\eta)[z+(\lambda^*-d)H(t,x(t))]P(t,x(t)),\end{aligned} \tag{20}$$

其中 λ^* 满足下式

$$\lambda^* = d+\frac{d-P(0,i_0)H(0,i_0)z_0-(\theta-\eta)P(t,X(t))\alpha(t,i)z}{P(0,i_0)H(0,i_0)^2+\gamma-1},$$

$P(t,i)$, $H(t,i)$ 分别满足 (4), (5) 式.

(2) 如果 $\hat{q}(t,z,i)\le 0$, 均值 - 方差问题 (2) 在时刻 t, 财富为 z, 马氏链的状态为 i 时, 最优的再保险策略 $q^*(t,z,i)=0$ 最优的投资策略 $\pi^*(t,z,i)$,

$$\pi^*(t,z,i) = -D(t,i)^{-1}B(t,i)^\top[z+(\lambda^*-d)F(t,i)], \tag{21}$$

最优的边界 $\mathrm{Var}Z(T)$ 为

$$\begin{aligned}&\mathrm{Var}Z(T) = J_{MV}(z_0,i_0)\\ =&[G(0,i_0)F(0,i_0)^2+\gamma-1](\lambda^*-d)^2\\ &+2[G(0,i_0)F(0,i_0)z_0-d](\lambda^*-d)+G(0,i_0)z_0^2-d^2\\ &+2G(t,x(t))\alpha(t,i)\theta[z+(\lambda^*-d)F(t,x(t))]G(t,x(t))+\beta(t,i)^2,\end{aligned} \tag{22}$$

其中 λ^* 满足下式

$$\lambda^* = d+\frac{d-G(0,i_0)F(0,i_0)z_0-\theta G(t,X(t))\alpha(t,i)z}{G(0,i_0)F(0,i_0)^2+\gamma-1},$$

$G(t,i)$, $F(t,i)$ 分别满足 (6), (7) 式.

参 考 文 献

[1] Browne S. Optimal investment policies for a firm with a random risk process: exponential utility and minimizing the probability of ruin[J]. Mathematics Methods Operator Research, 1995, 20(4): 937–957.

[2] Bai L, Guo J. Optimal proportional reinsurance and investment with multiple risky assets and no-shorting constraint[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2008, 52(2): 968–975.

[3] Yang H, Zhang L. Optimal investment for insurer with jump-diffusion risk process[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2005, 35(1): 21–51.

[4] Markowitz H M. Portfolio section[J]. Journal of Finance, 1952, 7(1): 77–91.

[5] Li D, Ng W L. Optimal dynamic portfolio selection; multi-period mean-variance formulation[J]. Mathematics Finance, 2000, 10: 387–406.

[6] Zhou X, Yin G. Markowitz's mean-variance portfolio selection with regime switching: a continuous-time model[J]. SIAM J. Control Optimal, 2003, 42(4): 1466–1482.

[7] Xie S X. Continuous-time portfolio selection with liability and regime switching[J]. Insurance: Mathematical and Economics, 2009, 45(1): 148–155.

[8] Elliott R J, Aggoun L, Moore J B. Hidden Markov models: estimation and control[M]. Berlin, Heilderberg, New York: Springer-Verlage, 1994.

MEAN-VARIANCE PORTFOLIO SELECTION IN MARKOV-SWITCHING JUMP-DIFFUSION MARKET FOR RISK MODEL

YANG Peng

(*Department of Applied Statistics and Science; Center for Applied Statistics Science, Xijing University, Xi'an 710123, China*)

Abstract: In this paper, we study mean-variance portfolio selection problem in insurance market. By using linear-quadratic control, we obtain some wealth meanwhile make their own risks to the minimum, which generalize mean-variance portfolio selection problem to jump diffusion insurance market with markov modulated.

Keywords: mean-variance; portfolio selection; Markov chain; risk model

2010 MR Subject Classification: 91A30; 91B30