

双指标非交换鞅的收敛性和不等式

曹 芳, 侯友良

(武汉大学数学与统计学院, 湖北 武汉 430072)

摘 要: 本文研究了双指标非交换鞅的收敛性和不等式问题. 利用非交换代数和单指标鞅的方法, 获得了双指标 L_p -有界鞅 ($1 \leq p \leq \infty$) 的收敛性, L_1 -收敛性和一致可积的关系; 推广了双指标非交换鞅的两个不等式, 即 Burkholder-Gundy 不等式和强鞅的 Davis 不等式.

关键词: von Neumann 代数; 双指标鞅; Burkholder-Gundy 不等式; Davis 不等式; 强鞅

MR(2010) 主题分类号: 46L52; 46L53; 60G42

中图分类号: O177.5

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2015)06-1511-10

1 引言

非交换数学 (也称量子数学) 是与量子物理并驾齐驱的数学领域. 从 20 世纪 20 年代量子力学建立之初, 以 von Neumann 为代表的一批数学家就致力于量子力学的数学基础研究, 他与 Mautner、Gelfand、Naimark 在 20 世纪 40 年代创立算子代数理论, 从而奠定了非交换数学的基础. 随后经过众多数学家的努力, 非交换数学取得重要进展. 1971 年 Cuculescu^[1] 研究了非交换鞅的弱 (1, 1) 型不等式并提出了著名的 Cuculescu 构造以取代停时方法. 1997 年 Pisier-Xu^[2] 取得重大的突破, 他们通过引进列均方函数和行均方函数对 $p < 2$ 和 $p \geq 2$ 分别定义了恰当的非交换 H_p 鞅空间, 并由此证明了经典情形的 Burkholder-Gundy 鞅不等式的非交换类比. 依据 Pisier-Xu 的开拓性工作, 非交换 H_p 鞅空间理论得到巨大的发展, 这主要表现在经典鞅论中的各种鞅不等式几乎都成功地推广到非交换情形.

对于经典的情形, Weisz^[3] 研究了双指标交换鞅, 他证明了双指标鞅的一些收敛定理以及一些基本不等式. 本文考虑了双指标非交换鞅的一些基本问题. 首先研究了关于双指标非交换鞅的收敛性. 这包括 L_p -有界鞅 ($1 < p \leq \infty$) 的收敛性, L_1 -收敛性和一致可积的关系. 然后我们考虑了双指标非交换鞅的两个不等式, 即 Burkholder-Gundy 不等式和强鞅的 Davis 不等式.

2 预备知识与记号

先回顾一下关于非交换 L_p 空间的一些基本概念. 设 $(\mathcal{M}, \tau)$ 是一个非交换概率空间, 这里 $\mathcal{M}$ 代表 von Neumann 代数, τ 为 $\mathcal{M}$ 的正规忠实的迹, 满足 $\tau(1) = 1$. 记 $L_0(\mathcal{M})$ 为关于 $(\mathcal{M}, \tau)$ 的可测算子全体组成的拓扑 $*$ -代数. 设 $1 \leq p < \infty$, 令

$$L_p(\mathcal{M}) = \{x \in L_0(\mathcal{M}) : \tau(|x|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty\},$$

*收稿日期: 2014-06-28

接收日期: 2014-09-15

基金项目: 国家自然科学基金资助 (11271293).

作者简介: 曹芳 (1991-), 女, 湖南郴州, 硕士, 主要研究方向: H_p 鞅空间.

其中 $|x| = (x^*x)^{\frac{1}{2}}$ 表示 x 的模. 我们定义

$$\|x\|_p = \tau(|x|^p)^{\frac{1}{p}}, \quad x \in L_p(\mathcal{M}),$$

则 $(L_p(\mathcal{M}), \|\cdot\|_p)$ 是 Banach 空间, 称之为关于 $(\mathcal{M}, \tau)$ 的非交换的 L_p -空间, 当 $p = \infty$ 时, 规定 $L_\infty(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$, 且 $L_\infty(\mathcal{M})$ 上的范数 $\|\cdot\|_\infty$ 为算子范数. 设 $(\mathcal{M}_n)_{n \geq 0}$ 是 $\mathcal{M}$ 的一列单调增加的子 von Neumann 代数, 用 $\mathcal{E}_n$ 表示 $\mathcal{M}$ 到 $\mathcal{M}_n$ 的条件期望算子. $L_p(\mathcal{M})$ 中的序列 $x = (x_n)_{n \geq 0}$ 称为是关于 $(\mathcal{M}_n)_{n \geq 0}$ 的鞅, 若对任意的 $m \geq n$, 有 $\mathcal{E}_n(x_m) = x_n$. 关于非交换 L_p -空间与非交换鞅的更多信息可参见文献 [4].

设 $\mathbb{N}$ 是非负整数的集合, $\mathbb{N}^2 = \{(n_1, n_2) : n_1, n_2 \in \mathbb{N}\}$. 在 $\mathbb{N}^2$ 上定义半序如下: 对于任意的 $n = (n_1, n_2), m = (m_1, m_2) \in \mathbb{N}^2$, 定义 $n \leq m$ 当且仅当 $n_1 \leq m_1, n_2 \leq m_2$ 以及 $n < m$ 若 $n \leq m$ 并且 $n \neq m$. 设 $(\mathcal{M}_n, n \in \mathbb{N}^2)$ 是 $\mathcal{M}$ 的一列单调增加的子 von Neumann 代数, 并且 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^2} \mathcal{M}_n$ 在 $\mathcal{M}$ 中 w^* -稠密. 对任意的 $n = (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$, 用 $\mathcal{E}_n$ 或者 $\mathcal{E}_{n_1, n_2}$ 表示 $\mathcal{M}$ 到 $\mathcal{M}_n$ 的条件期望算子. 一般地, 对于 $\mathcal{M}$ 的任意一列子 von Neumann 代数 $(\mathcal{N}_n)_{n \geq 0}$, 令 $\bigvee_{n \geq 0} \mathcal{N}_n$ 表示包含 $\bigcup_{n \geq 0} \mathcal{N}_n$ 的最小的 von Neumann 代数. 对每个 $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$, 定义

$$\mathcal{M}_{n_1, \infty} = \bigvee_{k \geq 0} \mathcal{M}_{n_1, k}, \quad \mathcal{M}_{\infty, n_2} = \bigvee_{k \geq 0} \mathcal{M}_{k, n_2}.$$

以后总是设 $(\mathcal{M}_n, n \in \mathbb{N}^2)$ 满足 (F_4) 条件 (在经典的情形是由 Cairoli 和 Walsh 引入的): 对任意的 $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$, $\mathcal{M}_{n_1, \infty}$ 和 $\mathcal{M}_{\infty, n_2}$ 关于 $\mathcal{M}_{n_1, n_2}$ 条件独立, 即对任意的有界算子 $x \in \mathcal{M}$ 和任意的 $n = (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$, 有

$$\mathcal{E}_n(x) = \mathcal{E}_{n_1, \infty}(\mathcal{E}_{\infty, n_2}(x)) = \mathcal{E}_{\infty, n_2}(\mathcal{E}_{n_1, \infty}(x)).$$

为了方便, 我们规定对任意的 $x \in L_1(\mathcal{M})$, 当 $n_1 = 0$ 或者 $n_2 = 0$ 时, $\mathcal{E}_{n_1, n_2}(x) = 0$.

定义 2.1 设 $x = (x_n, n \in \mathbb{N}^2)$ 是 $L_1(\mathcal{M})$ 中的序列. 称 x 为关于 $(\mathcal{M}_n)_{n \in \mathbb{N}^2}$ 的鞅 (在不至于引起混淆的情况下, 简称为鞅), 如果满足 $\mathcal{E}_n(x_m) = x_n, \forall n \leq m$, 若进一步对每个 $n \in \mathbb{N}^2$, 有

$$x_n \in L_p(\mathcal{M}) \quad (1 \leq p \leq \infty),$$

则称 x 为关于 $(\mathcal{M}_n)_{n \in \mathbb{N}^2}$ 的 L_p -鞅. 此时令 $\|x\|_p = \sup_{n \in \mathbb{N}^2} \|x_n\|_p$. 若 $\|x\|_p < \infty$, 则称 x 为 L_p -有界鞅.

设 $x = (x_n, n \in \mathbb{N}^2)$ 是关于 $(\mathcal{M}_n)_{n \in \mathbb{N}^2}$ 的鞅, $n = (n_1, n_2)$. 令

$$dx_n = x_{n_1, n_2} - x_{n_1, n_2-1} - x_{n_1-1, n_2} + x_{n_1-1, n_2-1}.$$

约定当 $n_1 = 0$ 或者 $n_2 = 0$ 时, $dx_{n_1, n_2} = 0$. 称 $dx = (dx_n)$ 为 x 的鞅差序列. 容易验证, 当 $(\mathcal{M}_n, n \in \mathbb{N}^2)$ 满足 (F_4) 条件时, 若 $(dx_n, n \in \mathbb{N}^2)$ 是一个鞅差序列, 则 $\mathcal{E}_n(dx_m) = 0 (\forall n \not\leq m)$.

本文将要考虑双指标非交换情形的几种收敛, 包含 L_p -收敛, 依测度收敛和几乎一致收敛. 设 $(x_n, n \in \mathbb{N}^2)$ 是 $L_0(\mathcal{M})$ 中的序列, $x \in L_0(\mathcal{M})$. 称 $(x_n, n \in \mathbb{N}^2)$ 依测度收敛于 x (记为 $x_n \xrightarrow{\mu} x$), 若对任意的 $\varepsilon > 0$ 和 $\delta > 0$, 存在 $n_0 \in \mathbb{N}^2$, 使得对任意的 $n \in \mathbb{N}^2$, 当 $n \geq n_0$

时, 存在 $e \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, $\tau(e^\perp) \leq \delta$, 并且 $\|(x_n - x)e\| < \varepsilon$, 这里 $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ 代表 $\mathcal{M}$ 中的投影. 熟知 $x_n \xrightarrow{\mu} x$ 当且仅当对任意 $\varepsilon > 0$, 有

$$\tau(e_\varepsilon^\perp(|x_n - x|)) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty),$$

其中 $e_\varepsilon^\perp(|x_n - x|)$ 表示 $|x_n - x|$ 的谱投影. 称 $(x_n, n \in \mathbb{N}^2)$ 几乎一致收敛于 x (记作 $x_n \xrightarrow{\text{a.u.}} x$), 若对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $e \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, 使得 $\tau(e^\perp) \leq \varepsilon$, 并且 $\|(x_n - x)e\| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$. 在非交换情形, 点态收敛是没有意义的. 由于 $\mathcal{M}$ 有限, 由经典的 Lusin 定理知道, 上面定义的几乎一致收敛是几乎处处收敛的替代.

本文要用到利用下面的引理 2.2, 有时候可以将网的收敛转化为序列收敛, 从而将双指标问题转化为单指标问题.

引理 2.2 ^[5] 设 (X, d) 是一完备度量空间, I 是一定向集, 设 $(x_\alpha, \alpha \in I)$ 是 X 中的网. 若对 I 中任意单调增加的子序列 $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots$, $(x_{\alpha_k}, k \geq 1)$ 在 (X, d) 中收敛, 则网 $(x_\alpha, \alpha \in I)$ 也在 (X, d) 中收敛.

3 双指标的收敛性

本节考虑双指标非交换鞅的 L_p -有界性, 收敛性和一致可积. 我们得到了与单指标非交换鞅类似的结果.

我们要用到下面的几个引理, 它们是关于单指标鞅非交换的一些结果.

引理 3.1 ^[4] (i) 设 $x_\infty \in L_p(\mathcal{M})$, $1 \leq p \leq \infty$, 令 $x_n = \mathcal{E}_n(x_\infty)$. 则 $x = (x_n)_{n \geq 1}$ 是 L_p -有界鞅, 并且 x_n 在 $L_p(\mathcal{M})$ 中收敛到 x_∞ ($p = \infty$ 时依 w^* -拓扑收敛).

(ii) 反之, 设 $1 < p \leq \infty$, $x = (x_n)_{n \geq 1}$ 是 L_p -有界鞅, 则存在 $x_\infty \in L_p(\mathcal{M})$, 使得对每个 $n \geq 1$, 有 $x_n = \mathcal{E}_n(x_\infty)$.

引理 3.2 ^[6] 设 $x = (x_n)_{n \geq 1}$ 是 L_1 -鞅, 则 $x = (x_n)_{n \geq 1}$ 一致可积当且仅当存在 $x_\infty \in L_1(\mathcal{M})$, 使得对每个 $n \geq 1$, 有 $x_n = \mathcal{E}_n(x_\infty)$.

引理 3.3 ^[1] 设 $x = (x_n)_{n \geq 1}$ 是 L_1 -有界鞅. 则存在 $x_\infty \in L_1(\mathcal{M})$, 使得 $x_n \xrightarrow{\text{a.u.}} x_\infty$.

引理 3.4 ^[7] 设 $(x_n)_{n \geq 1}$ 是 $L_1(\mathcal{M})$ 中的序列, $x \in L_1(\mathcal{M})$. 则 x_n 在 $L_1(\mathcal{M})$ 中收敛到 x 当且仅当以下条件成立: $x_n \xrightarrow{\mu} x$, 并且对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 和 $n_0 \in \mathbb{N}$, 使得对任意的 $n \geq n_0$, 任意的 $e \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, $\tau(e) \leq \delta$, 有 $\|x_n e\|_1 < \varepsilon$ 且 $\|x e\|_1 < \varepsilon$.

本文将把上述引理中关于单指标鞅的结论推广到双指标情形.

引理 3.5 设 $(\mathcal{M}_n)_{n \geq 1}$ 是 $\mathcal{M}$ 的一列单调增加的子 von Neumann 代数. 令 $\mathcal{M}_\infty = \bigvee_{n \geq 1} \mathcal{M}_n$. 则 $\bigcup_{n \geq 1} \mathcal{M}_n$ 在 $\mathcal{M}_\infty$ 中是 w^* -稠密的.

证 由于 $(\mathcal{M}_n)_{n \geq 1}$ 是单调增加的, 故 $\bigcup_{n \geq 1} \mathcal{M}_n$ 是对合的子代数, 并且单位算子 $1 \in \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{M}_n$, 于是

$$\overline{\bigcup_{n \geq 1} \mathcal{M}_n}^{\sigma\text{-w}} = \overline{\bigcup_{n \geq 1} \mathcal{M}_n}^{\sigma\text{-s}}.$$

对任意的 $x \in \mathcal{M}_\infty$, 令 $x_n = \mathcal{E}_n(x) (n \geq 1)$, 则 $x_n \in \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{M}_n$, 并且 $x_n \xrightarrow{\sigma\text{-s}} x$ (见文 [4]). 这说

明

$$\mathcal{M}_\infty \subset \overline{\bigcup_{n \geq 1} \mathcal{M}_n}^{\sigma-s},$$

从而 $\mathcal{M}_\infty \subset \overline{\bigcup_{n \geq 1} \mathcal{M}_n}^{\sigma-w}$. 另一方面, 由于 $\mathcal{M}_\infty$ 是 σ -w 闭的, 故 $\overline{\bigcup_{n \geq 1} \mathcal{M}_n}^{\sigma-w} \subset \mathcal{M}_\infty$, 于是

$$\overline{\bigcup_{n \geq 1} \mathcal{M}_n} = \mathcal{M}_\infty,$$

又由于 von Neumann 代数上的 w^* 拓扑和 σ -w 拓扑是一致的, 故 $\bigcup_{n \geq 1} \mathcal{M}_n$ 在 $\mathcal{M}_\infty$ 中是 w^* 稠密的. 引理证毕.

定理 3.6 (i) 设 $1 \leq p \leq \infty, x_\infty \in L_p(\mathcal{M})$. 令 $x_n = \mathcal{E}_n(x_\infty) (n \in \mathbb{N}^2)$, 则 $x = (x_n, n \in \mathbb{N}^2)$ 是 L_p -有界鞅, 并且 x_n 在 $L_p(\mathcal{M})$ 中收敛到 x_∞ ($p = \infty$ 时依 w^* -拓扑收敛).

(ii) 反之, 设 $1 < p \leq \infty, x = (x_n, n \in \mathbb{N}^2)$ 是 L_p -有界鞅; 当 $p = 1$ 时, $x = (x_n, n \in \mathbb{N}^2)$ 是一致可积的鞅, 则存在 $x_\infty \in L_p(\mathcal{M})$, 使得对每个 $n \in \mathbb{N}^2, x_n = \mathcal{E}_n(x_\infty)$.

证 (i) 先证明 $p < \infty$ 情形. 由于 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^2} \mathcal{M}_n$ 在 $\mathcal{M}$ 中 w^* 稠密, 则 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^2} \mathcal{M}_n$ 在 $L_p(\mathcal{M})$ 中稠密 (见文 [4]), 从而 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^2} L_p(\mathcal{M}_n)$ 也在 $L_p(\mathcal{M})$ 中稠密. 因此, 由条件期望算子 $\mathcal{E}_n$ 在 $L_p(\mathcal{M})$ 上的压缩性, 只需对 $x_\infty \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}^2} L_p(\mathcal{M}_n)$ 进行证明. 不妨设 $x_\infty \in L_p(\mathcal{M}_N)$, 这里 N 为 $\mathbb{N}^2$ 中一固定元. 则对任意的 $n \geq N$, 有 $x_n = \mathcal{E}_n(x_\infty) = x_\infty$. 因而 x_n 在 $L_p(\mathcal{M})$ 中收敛到 x_∞ .

当 $p = \infty$ 时, 利用对偶性. 事实上, 任给一 $y \in L_1(\mathcal{M})$, 由已证明的 $p = 1$ 情形知道, 在 $L_1(\mathcal{M})$ 中 $\mathcal{E}_n(y) \rightarrow y$. 因此

$$\lim_n \tau(\mathcal{E}_n(x_\infty)y) = \lim_n \tau(x_\infty \mathcal{E}_n(y)) = \tau(x_\infty y).$$

(ii) 先证明 $1 < p \leq \infty$ 的情形. 设 $x = (x_n, n \in \mathbb{N}^2)$ 是 L_p -有界鞅, 在 $\mathbb{N}^2$ 中任取一单调递增的子序列 $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots$, 则 $(x_{\alpha_k})_{k \geq 1}$ 是 L_p -有界鞅. 令 $\mathcal{M}_\infty = \bigvee_{k \geq 1} \mathcal{M}_{\alpha_k}$, 根据引理 3.5 知道 $\bigvee_{k \geq 1} \mathcal{M}_{\alpha_k}$ 在 $\mathcal{M}_\infty$ 中是 w^* -稠密的. 根据引理 3.1, 存在 $y \in L_p(\mathcal{M}_\infty)$, 使得 $x_{\alpha_k} = \mathcal{E}_{\alpha_k}(y) (\forall k \geq 1)$, 并且在 $L_p(\mathcal{M}_\infty)$ 中 x_{α_k} 收敛到 y , 又 $L_p(\mathcal{M}_\infty) \subset L_p(\mathcal{M})$, 则 x_{α_k} 也在 $L_p(\mathcal{M})$ 中收敛到 y . 因而 $x = (x_n, n \in \mathbb{N}^2)$ 的每个指标单调增加的子序列 $(x_{\alpha_k})_{k \geq 1}$ 都在 $L_p(\mathcal{M})$ 中收敛. 根据引理 2.2 知道, $x = (x_n, n \in \mathbb{N}^2)$ 在 $L_p(\mathcal{M})$ 中收敛. 设收敛极限为 x_∞ , 对任意固定的 $m \in \mathbb{N}^2$, 由鞅的性质可知, 当 $n \geq m$ 时,

$$\|x_m - \varepsilon_m(x_\infty)\|_p = \|\varepsilon_m(x_n - x_\infty)\|_p \leq \|x_n - x_\infty\|_p.$$

对 $n \in \mathbb{N}^2$ 取极限, 得到 $x_m = \varepsilon_m(x_\infty) (\forall m \in \mathbb{N}^2)$.

现转到 $p = 1$ 情形. 设 $(x_n, n \in \mathbb{N}^2)$ 是一致可积的. 在 $\mathbb{N}^2$ 中任取一单调递增的子序列 $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots$, 则 $(x_{\alpha_k})_{k \geq 1}$ 也是一致可积的. 根据引理 3.2 知道, 存在 $x_\infty \in L_1(\mathcal{M})$, 使得对每个 $k \geq 1$, 有 $x_{\alpha_k} = \mathcal{E}_{\alpha_k}(x_\infty)$. 类似定理 3.6 (i) 的证明, 可得到 $x_n = \mathcal{E}_n(x_\infty) (\forall n \in \mathbb{N}^2)$. 定理证毕.

定理 3.7 设 $x = (x_n, n \in \mathbb{N}^2)$ 是一个 L_1 -有界鞅, 则存在 $x_\infty \in L_1(\mathcal{M})$, 使得 $x_n \xrightarrow{\mu} x_\infty$.

证 我们知道 $L_0(\mathcal{M})$ 中可以引进一个完备的距离 d , 使得依测度收敛就是按距离 d 收敛. 设 $x = (x_n, n \in \mathbb{N}^2)$ 是 L_1 -有界鞅, 在 $\mathbb{N}^2$ 中任取一单调递增的子序列 $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots$, 那么 $(x_{\alpha_k})_{k \geq 1}$ 是关于 $(\mathcal{M}_{\alpha_k}; k \in \mathbb{N})$ 的单指标 L_1 -有界鞅, 根据引理 3.3, 存在 $y \in L_1(\mathcal{M})$, 使得 $x_{\alpha_k} \xrightarrow{\text{a.u.}} y$, 从而 $x_{\alpha_k} \xrightarrow{\mu} y$. 再由引理 2.2 知道, 存在 $x_\infty \in L_1(\mathcal{M})$, 使得 $x_n \xrightarrow{\mu} x_\infty$. 定理证毕.

我们知道, 即使是在经典的情形下, 依测度收敛也不能推出 L_1 -收敛. 但是在附加一致可积的条件下, 依测度收敛推出 L_1 -收敛. 下面的定理 3.9 是关于 $L_1(\mathcal{M})$ 中的双指标序列对应的结果. 先列出在定理 3.9 的证明中要用到的一个引理.

引理 3.8 ^[7] 设 $x \in L_1(\mathcal{M})$, 则对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对任意的 $e \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, $\tau(e) \leq \delta$, 有 $\|xe\|_1 < \varepsilon$.

注 引理 3.8 是交换情形积分的绝对连续性在非交换中的类比.

定理 3.9 设 $x = (x_n, n \in \mathbb{N}^2)$ 是 $L_1(\mathcal{M})$ 中的序列, $x \in L_1(\mathcal{M})$. 则 $x_n \xrightarrow{L_1} x$ 当且仅当 $x_n \xrightarrow{\mu} x$, 并且满足如下的条件:

(C) 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 和 $n_0 \in \mathbb{N}^2$, 使得对每个 $n \geq n_0$, 任意的 $e \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, 当 $\tau(e) \leq \delta$, 有 $\|x_n e\|_1 < \varepsilon$.

证 必要性. 设 $x_n \xrightarrow{L_1} x$, 由 Kolmogorov 不等式得到

$$\tau(e_\varepsilon^\perp(x_n - x)) \leq \frac{1}{\varepsilon} \|x_n - x\|_1 \rightarrow 0.$$

从而 $x_n \xrightarrow{\mu} x$. 又因为 $x_n \xrightarrow{L_1} x$, 故对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $n_0 \in \mathbb{N}^2$, 使得对任意的 $n \in \mathbb{N}^2$, 当 $n \geq n_0$, 有 $\|x_n - x\|_1 < \varepsilon/2$. 又 $x \in L_1(\mathcal{M})$, 根据引理 3.8, 存在 $\delta > 0$, 使得对任意的 $e \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, $\tau(e) \leq \delta$, 有 $\|xe\|_1 \leq \varepsilon/2$. 于是当 $n \geq n_0$ 时,

$$\|x_n e\|_1 \leq \|(x_n - x)e\|_1 + \|xe\|_1 \leq \|x_n - x\|_1 + \|xe\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

充分性. 由于 $x_n \xrightarrow{\mu} x$, 故对任意的 $\varepsilon > 0$ 和 $\delta > 0$, 存在 $n_1 \in \mathbb{N}^2$, 使得对任意的 $n \in \mathbb{N}^2, n \geq n_1$, 存在 $e \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, $\tau(e^\perp) \leq \delta$, 使得 $\|(x_n - x)e\| < \varepsilon$. 根据引理 3.8, 不妨设 $\|xe^\perp\|_1 < \varepsilon$. 又由假设条件 (C), 存在 $n_2 \in \mathbb{N}^2$, 使得对每个 $n \geq n_2$, 任意的 $e \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, $\tau(e) \leq \delta$, 有 $\|x_n p\|_1 < \varepsilon$. 取 $n_0 \in \mathbb{N}^2$ 使得 $n_0 \geq n_1, n_0 \geq n_2$, 则当 $n \geq n_0$ 时, 有

$$\|(x_n - x)e^\perp\|_1 \leq \|x_n e^\perp\|_1 + \|xe^\perp\|_1 \leq 2\varepsilon.$$

因此当 $n \geq n_0$ 时,

$$\|x_n - x\|_1 \leq \|(x_n - x)e\|_1 + \|(x_n - x)e^\perp\|_1 \leq \|(x_n - x)e\| + 2\varepsilon \leq 3\varepsilon.$$

定理证毕.

注 容易看出在单指标情形, 条件 (C) 等价于 $(x_n)_{n \geq 1}$ 的一致可积. 但是在双指标的情形, 条件 (C) 比一致可积条件更弱. 结合定理 3.7 和定理 3.9 得到如下的推论:

推论 3.10 设 $(x_n, n \in \mathbb{N}^2)$ 是一个 L_1 -有界鞅, 并且满足条件 (C), 则 $(x_n, n \in \mathbb{N}^2)$ 在 $L_1(\mathcal{M})$ 中收敛.

4 Burkholder-Gundy 不等式和强鞅的 Davis 不等式

本节考虑双指标非交换的 Hardy 空间, 证明了双指标情形的 Burkholder-Gundy 不等式和强鞅的 Davis 不等式. 先给出双指标非交换鞅的列和行均方函数和相应的 Hardy 空间定义.

当 $1 \leq p < \infty$ 时, 对 $L_p(\mathcal{M})$ 中有限序列 $x = (x_n)$, 令

$$\|x\|_{L_p(\mathcal{M}; l_2^c)} = \|(\sum_n |x_n|^2)^{\frac{1}{2}}\|_p, \quad \|x\|_{L_p(\mathcal{M}; l_2^r)} = \|(\sum_n |x_n^*|^2)^{\frac{1}{2}}\|_p,$$

则 $\|\cdot\|_{L_p(\mathcal{M}; l_2^c)}$ 和 $\|\cdot\|_{L_p(\mathcal{M}; l_2^r)}$ 在 $L_p(\mathcal{M})$ 的有限序列上定义了范数, 相应的完备化空间分别记作 $L_p(\mathcal{M}; l_2^c)$ 和 $L_p(\mathcal{M}; l_2^r)$. 熟知 $x = (x_n)_{n \geq 1} \in L_p(\mathcal{M}; l_2^c)$ (或 $L_p(\mathcal{M}; l_2^r)$) 当且仅当 $(\sum_{k=1}^n |x_k|^2)^{\frac{1}{2}}$ (相应的, $(\sum_{k=1}^n |x_k^*|^2)^{\frac{1}{2}}$) 在 $L_p(\mathcal{M})$ 中是有界的. 关于 $L_p(\mathcal{M}; l_2^c)$ 和 $L_p(\mathcal{M}; l_2^r)$ 更详细内容见文献 [4].

当 $p \geq 2$ 时, 定义 $CR_p[L_p(\mathcal{M})] = L_p(\mathcal{M}; l_2^c) \cap L_p(\mathcal{M}; l_2^r)$, 赋予范数

$$\|(x_n)\|_{CR_p[L_p(\mathcal{M})]} = \max \{ \|(x_n)\|_{L_p(\mathcal{M}; l_2^c)}, \|(x_n)\|_{L_p(\mathcal{M}; l_2^r)} \}.$$

当 $1 \leq p < 2$ 时, 定义 $CR_p[L_p(\mathcal{M})] = L_p(\mathcal{M}; l_2^c) + L_p(\mathcal{M}; l_2^r)$, 赋予范数

$$\|(x_n)\|_{CR_p[L_p(\mathcal{M})]} = \inf_{x_n = y_n + z_n} \{ \|(y_n)\|_{L_p(\mathcal{M}; l_2^c)} + \|(z_n)\|_{L_p(\mathcal{M}; l_2^r)} \}.$$

下面我们仿照单指标的情形, 对双指标鞅定义 Hardy 空间 $H_p(\mathcal{M})$. 设 $x = (x_n, n \in \mathbb{N}^2)$ 是一个鞅, 令

$$S_{c,(n,n)}(x) = (\sum_{k,l \leq n} |dx_{k,l}|^2)^{\frac{1}{2}}, \quad S_{r,(n,n)}(x) = (\sum_{k,l \leq n} |dx_{k,l}^*|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

如果 $(S_{c,(n,n)}(x))_{n \geq 1}$ 和 $(S_{r,(n,n)}(x))_{n \geq 1}$ 在 $L_p(\mathcal{M})$ 中有界. 令

$$S_c(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{c,(n,n)}(x) = (\sum_{k \in \mathbb{N}^2} |dx_k|^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$S_r(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{r,(n,n)}(x) = (\sum_{k \in \mathbb{N}^2} |dx_k^*|^2)^{\frac{1}{2}},$$

称 $S_c(x)$ 和 $S_r(x)$ 分别为鞅 $x = (x_n, n \in \mathbb{N}^2)$ 的列均方函数和行均方函数.

定义 4.1 (i) 设 $1 \leq p < \infty$. 定义双指标鞅的列 Hardy 空间

$$H_p^c(\mathcal{M}) = \left\{ x = (x_n) : (S_{c,(n,n)}(x))_{n \geq 1} \text{ 在 } L_p(\mathcal{M}) \text{ 中有界, } \|x\|_{H_p^c(\mathcal{M})} = \|S_c(x)\|_p \right\}.$$

类似地, 定义双指标鞅的行 Hardy 空间

$$H_p^r(\mathcal{M}) = \left\{ x = (x_n) : (S_{r,(n,n)}(x))_{n \geq 1} \text{ 在 } L_p(\mathcal{M}) \text{ 中有界, } \|x\|_{H_p^r(\mathcal{M})} = \|S_r(x)\|_p \right\}.$$

(ii) 定义非交换 Hardy 空间 $H_p(\mathcal{M})$ 如下:

当 $1 \leq p \leq 2$ 时, 定义 $H_p(\mathcal{M}) = H_p^c(\mathcal{M}) + H_p^r(\mathcal{M})$, 赋予范数

$$\|x\|_{H_p(\mathcal{M})} = \inf \{ \|y\|_{H_p^c(\mathcal{M})} + \|z\|_{H_p^r(\mathcal{M})} : x = y + z, y \in H_p^c(\mathcal{M}), z \in H_p^r(\mathcal{M}) \}.$$

当 $2 \leq p < \infty$ 时, 定义 $H_p(\mathcal{M}) = H_p^c(\mathcal{M}) \cap H_p^r(\mathcal{M})$, 赋予范数

$$\|x\|_{H_p(\mathcal{M})} = \max \{ \|x\|_{H_p^c(\mathcal{M})}, \|x\|_{H_p^r(\mathcal{M})} \}.$$

注 对一个双指标鞅 $x = (x_n, n \in \mathbb{N}^2)$ 的鞅差序列 $dx = (dx_n)_{n \in \mathbb{N}^2}$, 把它重新编号变为一个单指标的序列, 则 dx 可以视为一个单指标序列. 由定义知道, 对 $1 \leq p < \infty$ 有

$$\|x\|_{H_p} = \|dx\|_{CR_p[L_p(\mathcal{M})]}.$$

下面给出非交换双指标鞅的 Burkholder-Gundy 不等式.

引理 4.2 (双指标非交换情形的 Khintchine 不等式) 设 $x = (x_n)$ 为 $L_p(\mathcal{M})$ 中的有限序列, $\{r_i(t)\}_{i \in \mathbb{N}}$ 是 $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), P)$ 上的 Rademacher 序列. 令 $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, 考虑其上的乘积概率空间 $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), P)$ (这里 P 表示乘积测度). 则存在两个只依赖于 p 的常数 A_p 和 B_p , 使得

$$A_p \|dx\|_{CR_p[L_p(\mathcal{M})]} \leq \left\| \sum_{i,j} x_{i,j} r_i(s) r_j(t) \right\|_{L_p(\Omega; L_p(\mathcal{M}))} \leq B_p \|dx\|_{CR_p[L_p(\mathcal{M})]}.$$

证 令 $r_{i,j}(s, t) = r_i(s) r_j(t)$, 容易验证 $\{r_{i,j}, (i, j) \in \mathbb{N}^2\}$ 是 Ω 上的 Rademacher 序列. 将 $\{r_{i,j}, (i, j) \in \mathbb{N}^2\}$ 重新编号为一个单指标的独立同分布的序列, 利用非交换单指标的 Khintchine 不等式 (见文 [4]), 就可得到我们所需的不等式. 引理证毕.

定理 4.3 设 $1 < p < \infty$, $x = (x_n, n \in \mathbb{N}^2)$ 是鞅并且 $x_n \in L_p(\mathcal{M})$. 则 x 是 L_p -有界鞅当且仅当 $x \in H_p(\mathcal{M})$. 进一步有

$$\alpha_p^{-1} \|x\|_{H_p} \leq \|x\|_p \leq \beta_p \|x\|_{H_p}, \quad (4.1)$$

这里 α_p 和 β_p 为仅与 p 有关的正常数.

证 设 x 是一个 L_p -有界鞅, 令

$$y_{n,m} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m u_k v_l dx_{k,l}, \quad z_{n,m} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m v_l dx_{k,l},$$

其中 $u = (u_k; k \in \mathbb{N}), v = (v_l; l \in \mathbb{N})$ 是有界实数列. 从而对每一个固定的 $m, (z_{n,m}; n \geq 1)$ 是单指标鞅, $(y_{n,m}; n \geq 1)$ 是 $(z_{n,m}; n \geq 1)$ 的关于 $u = (u_k)$ 的鞅变换. 同时, 对每一个固定的 $n, (x_{n,m}; m \geq 1)$ 是单指标鞅, $(z_{n,m}; m \geq 1)$ 是 $(x_{n,m}; m \geq 1)$ 的关于 $v = (v_l)$ 的鞅变换. 利用单指标鞅变换的强 (p, p) 型不等式 (见文 [4]), 得到

$$\sup_{n \geq 1} \|y_{n,m}\|_p \leq C_p \sup_{n \geq 1} \|z_{n,m}\|_p, \quad \sup_{m \geq 1} \|z_{n,m}\|_p \leq C_p \sup_{n \geq 1} \|x_{n,m}\|_p.$$

在不等式两端分别对 m, n 取上确界, 得到

$$\|y\|_p \leq C'_p \|z\|_p \leq C_p \|x\|_p. \quad (4.2)$$

设 $(x_n) \subset L_p(\mathcal{M})$, 令 $x_{k,l} = dx_{k,l}$, $u_k = r_k(s)$, $v_l = r_l(t)$, 由引理 4.2 和式 (4.2) 可知, 为方便, 用 $dx^{(n)}$ 表示 $(dx_{i,j})_{i,j \leq n}$,

$$\begin{aligned} A_p \|dx^{(n)}\|_{CR_p[L_p(\mathcal{M})]}^p &\leq \left\| \sum_{i,j \leq n} r_i(s) r_j(t) dx_{i,j} \right\|_{L_p(\Omega; L_p(\mathcal{M}))}^p \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \left\| \sum_{i,j \leq n} r_i(s) r_j(t) dx_{i,j} \right\|_p^p ds dt \\ &\leq \int_0^1 \int_0^1 \|y_{n,n}\|_p^p ds dt \leq \|y\|_p^p \leq C_p \|x\|_p^p. \end{aligned} \quad (4.3)$$

令 $n \rightarrow \infty$, 得到 $A_p C_p^{-1} \|x\|_{H_p}^p \leq \|x\|_p^p$. 在 (4.3) 式中将 $dx_{k,j}$ 换成 $r_k r_j dx_{k,j}$, 得到 $\|x\|_p \leq C_p \|x\|_{H_p}$. 从而当 $1 < p < \infty$ 时, (4.1) 式得证. 定理证毕.

对每个 $n = (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$, 定义 $n-1 = (n_1-1, n_2-1)$. 令

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{n_1, n_2}^- &= \mathcal{M}_{n_1-1, n_2} \vee \mathcal{M}_{n_1, n_2-1}, \\ \mathcal{M}_{n_1, n_2}^+ &= \mathcal{M}_{n_1+1, n_2} \vee \mathcal{M}_{n_1, n_2+1}, \\ \mathcal{M}_{n_1, n_2}^* &= \mathcal{M}_{n_1, \infty} \vee \mathcal{M}_{\infty, n_2}, \end{aligned}$$

相应的条件期望算子分别记为 $\mathcal{E}_n^-$, $\mathcal{E}_n^+$, $\mathcal{E}_n^*$.

定义 4.4 设 $x = (x_n, n \in \mathbb{N}^2)$ 是一个鞅. 称 x 是强鞅, 若满足 $\mathcal{E}_n^-(dx_n) = 0$, $n \in \mathbb{N}^2$.

由 (F_4) 条件可知, $\mathcal{M}_{n-1}^*$ 和 $\mathcal{M}_n$ 关于 $\mathcal{M}_n^-$ 条件独立等价于 $\mathcal{E}_{n-1}^* \circ \mathcal{E}_n = \mathcal{E}_n^-$. 由于

$$\mathcal{E}_n^-(dx_n) = \mathcal{E}_{n-1}^* \circ \mathcal{E}_n(dx_n) = \mathcal{E}_{n-1}^*(dx_n),$$

从而强鞅的定义可等价于对每个 $n \in \mathbb{N}^2$, 有 $\mathcal{E}_{n-1}^*(dx_n) = 0$.

下面我们要考虑双指标非交换强鞅的条件均方函数不等式. 为此先定义条件型的列和行均方函数和相应的 Hardy 空间.

设 $1 \leq p < \infty$. 对有限的鞅 $x = (x_n)$, 定义

$$\|x\|_{H_p^c(\mathcal{M})} = \left\| \left(\sum_{n \in \mathbb{N}^2} \mathcal{E}_{n-1} |dx_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p, \quad \|x\|_{H_p^r(\mathcal{M})} = \left\| \left(\sum_{n \in \mathbb{N}^2} \mathcal{E}_{n-1} |dx_n^*|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p.$$

记 $h_p^c(\mathcal{M})$ 和 $h_p^r(\mathcal{M})$ 分别为按上述范数完备化的 Banach 空间. 对 $L_2(\mathcal{M})$ 中任意有限的鞅 $x = (x_n)$, 令

$$s_c(x) = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}^2} \mathcal{E}_{n-1} |dx_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad s_r(x) = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}^2} \mathcal{E}_{n-1} |dx_n^*|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

则

$$\|x\|_{h_p^c(\mathcal{M})} = \|s_c(x)\|_p, \quad \|x\|_{h_p^r(\mathcal{M})} = \|s_r(x)\|_p.$$

我们还需考虑 $\ell_p(L_p(\mathcal{M}))$. 定义

$$\ell_p(L_p(\mathcal{M})) = \{a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}^2} : a_n \in L_p(\mathcal{M}), \|a\|_{\ell_p(L_p(\mathcal{M}))} = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}^2} \|a_n\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty\}.$$

记 $h_p^d(\mathcal{M})$ 为 $\ell_p(L_p(\mathcal{M}))$ 中由所有鞅差序列构成的子空间, 并且定义 $\|x\|_{h_p^d(\mathcal{M})} = \|dx\|_{\ell_p(L_p(\mathcal{M}))}$.

定理 4.5 (i) 设 $1 \leq p < 2$. 定义 $h_p(\mathcal{M}) = h_p^d(\mathcal{M}) + h_p^c(\mathcal{M}) + h_p^r(\mathcal{M})$, 赋予范数

$$\|x\|_{h_p(\mathcal{M})} = \inf_{x=y+z+w} \{\|y\|_{h_p^d(\mathcal{M})} + \|z\|_{h_p^c(\mathcal{M})} + \|w\|_{h_p^r(\mathcal{M})}\}.$$

(ii) 设 $2 \leq p < \infty$. 定义 $h_p(\mathcal{M}) = h_p^d(\mathcal{M}) \cap h_p^c(\mathcal{M}) \cap h_p^r(\mathcal{M})$, 赋予范数

$$\|x\|_{h_p(\mathcal{M})} = \max(\|x\|_{h_p^d(\mathcal{M})}, \|x\|_{h_p^c(\mathcal{M})}, \|x\|_{h_p^r(\mathcal{M})}).$$

设映射 $\rho: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^2$, 满足

$$\rho(k^2 + i) = \begin{cases} (k, i), & 0 \leq i \leq k-1; \\ (i-k, k), & k \leq i \leq 2k, \end{cases}$$

则 ρ 是一个双射. 令

$$\tilde{x}_k = \sum_{l=0}^k dx_{\rho(l)}, \quad \tilde{\mathcal{M}}_k = \bigvee_{l \leq k} \mathcal{M}_{\rho(l)}.$$

注意到 $\tilde{\mathcal{M}}_k \subset \mathcal{M}_{\rho(l)}^*$ 并且 x 是强鞅, 有

$$\tilde{\mathcal{E}}_{k-1}(d\tilde{x}_k) = \tilde{\mathcal{E}}_{k-1}\mathcal{E}_{\rho(k)-1}^*(dx_{\rho(k)}) = 0.$$

因此 $\tilde{x} = (\tilde{x}_k, k \geq 1)$ 是关于 $\tilde{\mathcal{M}} = (\tilde{\mathcal{M}}_k, k \geq 1)$ 的单指标鞅. 记 $\tilde{\mathcal{E}}_k$ 为关于 $\tilde{\mathcal{M}}_k$ 的条件期望算子. 我们用 ${}_sH_p$ 和 ${}_sh_p$ 分别表示强鞅的 H_p 和 h_p 空间, 用 $\tilde{H}_p$ 和 $\tilde{h}_p$ 分别表示与强鞅 $x = (x_n, \mathcal{M}_n)$ 对应的单指标鞅 $\tilde{x} = (\tilde{x}_k, \tilde{\mathcal{M}}_k)$ 的 H_p 和 h_p 空间.

定理 4.6 若 $x = (x_n, n \in \mathbb{N}^2)$ 是强鞅, 则 $\tilde{x}$ 是关于 $\tilde{\mathcal{M}}$ 的单指标鞅, 并且

$$\|x\|_{{}_sH_p(\mathcal{M})} = \|\tilde{x}\|_{\tilde{H}_p(\mathcal{M})}, \quad \|x\|_{{}_sh_p(\mathcal{M})} = \|\tilde{x}\|_{\tilde{h}_p(\mathcal{M})}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

证 设 $x = (x_n, n \in \mathbb{N}^2)$ 是强鞅, 上面已经说明 $\tilde{x} = (\tilde{x}_k, k \geq 1)$ 是关于 $\tilde{\mathcal{M}} = (\tilde{\mathcal{M}}_k, k \geq 1)$ 的单指标鞅. 对任意的 $k \geq 1$, 注意到 $\tilde{\mathcal{M}}_k \subset \mathcal{M}_{\rho(l)}^*$, 有

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}}_{k-1}|d\tilde{x}_k|^2 &= \tilde{\mathcal{E}}_{k-1}\mathcal{E}_{\rho(k)-1}^*|dx_{\rho(k)}|^2 = \tilde{\mathcal{E}}_{k-1}(\mathcal{E}_{\rho(k)-1}^*\mathcal{E}_{\rho(k)})|dx_{\rho(k)}|^2 \\ &= \tilde{\mathcal{E}}_{k-1}\mathcal{E}_{\rho(k)}^-|dx_{\rho(k)}|^2 = \mathcal{E}_{\rho(k)}^-|dx_{\rho(k)}|^2. \end{aligned}$$

故 $s_c(x) = s_c(\tilde{x}), s_r(x) = s_r(\tilde{x})$. 又由 $d\tilde{x}_k = dx_{\rho(k)}$, 得到

$$S_c(x) = S_c(\tilde{x}), S_r(x) = S_r(\tilde{x}).$$

从而

$$\|x\|_{{}_sh_p(\mathcal{M})} = \|\tilde{x}\|_{\tilde{h}_p(\mathcal{M})}, \quad \|x\|_{{}_sH_p(\mathcal{M})} = \|\tilde{x}\|_{\tilde{H}_p(\mathcal{M})}.$$

关于交换鞅的 Davis 不等式可以推广到双指标强鞅 [8]. 另一方面, Perrin [9] 证明了单指标非交换鞅的 Davis 不等式. 下面的定理说明 Davis 不等式对双指标非交换强鞅也成立.

定理 4.7 (Davis 不等式) 在范数等价意义下 ${}_sh_1(\mathcal{M}) = {}_sH_1(\mathcal{M})$, 并且

$$\frac{1}{2}\|x\|_{{}_sh_1(\mathcal{M})} \leq \|x\|_{{}_sH_1(\mathcal{M})} \leq \sqrt{6}\|x\|_{{}_sh_1(\mathcal{M})}.$$

证 设 $\tilde{x}$ 是与 x 对应的单指标鞅, 则由单指标非交换结果 (见文 [9]), 有

$$\frac{1}{2}\|\tilde{x}\|_{\tilde{h}_1(\mathcal{M})} \leq \|\tilde{x}\|_{\tilde{H}_1(\mathcal{M})} \leq \sqrt{6}\|\tilde{x}\|_{\tilde{h}_1(\mathcal{M})}.$$

再由引理 4.6 得到所要的不等式.

参 考 文 献

- [1] Cuculescu I. Martingales on von Neumann algebras[J]. J. Multivariate Anal., 1971, 1: 17–27.
- [2] Pisier G, Xu Quanhua. Non-commutative martingale inequalities[J]. Comm. Math. Phys., 1997, 189: 667–698.
- [3] Ferenc Weisz. On duality problems of two-parameter martingale Hardy spaces[J]. Bull. Sci. Math., 1990, 114: 395–410.
- [4] Pisier G, Xu Quanhua. Non-commutative L_p -spaces[M]. Holland: Elsevier, 2003.
- [5] Neveu J. Discrete parameter martingales[M]. New York: American Elsevier, 1975.
- [6] Cuculescu I. Supermartingales on W^* -algebras[J]. Rev. Roumaine Math. Pures. Appl., 1969, 14: 759–773.
- [7] Padmanabhan A. Probabilistic aspects of von Neumann algebras[J]. Funct. Anal., 1979, 31: 139–149.
- [8] Ferenc Weisz. Inequalities and duality results with respect to two-parameter strong martingales[J]. Anal. Math., 1997, 23: 45–75.
- [9] Mathilde Perrin. A noncommutative Davis’s decomposition for martingales[J]. London Math. Soc., 2009, 80(2): 627–648.
- [10] Zhang Chao, Hou Youliang. Convergence of weighted averages of martingales in noncommutative Banach function spaces[J]. Acta Math. Scientia, 2012, 32B(2): 735–744.
- [11] Zhang Chao, Hou Youliang. Convergence of weighted averages of martingales[J]. Sci. China Math., 2013, 56: 823–830.

CONVERGENCE AND INEQUALITIES OF TWO-PARAMETER
NONCOMMUTATIVE MARTINGALES

CAO Fang, HOU You-liang

(School of Mathematics and Statistics, Wuhan University, Wuhan 430072, China)

Abstract: In this paper, we discuss the convergence and inequalities of two-parameter noncommutative martingales. By using noncommutative algebra and one-parameter martingales methods, we have the convergence of L_p -bounded martingales ($1 \leq p \leq \infty$), the relation between L_1 -convergence and uniformly integrability of L_p -bounded martingales. And we generalize two inequalities of two-parameter noncommutative martingales, i.e., Burkholder-Gundy inequality and Davis’s inequality for strong martingales.

Keywords: von Neumann algebra; two-parameter martingales; Burkholder-Gundy inequality; Davis’s inequality; strong martingales

2010 MR Subject Classification: 46L52; 46L53; 60G42