Vol. 35 (2015)
No. 6

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

非奇异 H - 矩阵的一类新判定

王磊磊, 黄 浩, 李全兵, 刘建州
(湘潭大学数学与计算科学学院, 湖南 湘潭 411105)

摘 要: 本文研究了非奇异 H - 矩阵的数值判定问题. 利用不等式的放缩方法, 获得了一类判别非奇异 H - 矩阵的新判据, 推广了相关已有结果, 并通过数值实例说明了本文结果判断范围的更广泛性.

关键词: 非奇异 H - 矩阵; 对角占优矩阵; 不可约; 非零元素链
MR(2010) **主题分类号**: 15B57 **中图分类号**: O151.21
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2015)06-1504-07

1 引言

非奇异 H - 矩阵是一类在计算数学、数学物理、控制论等领域具有广泛应用的特殊矩阵, 其数值判定一直是矩阵计算研究的重要课题. 自文 [1] 给出非奇异 H - 矩阵的若干判定条件以来, 众多文献研究了这类问题的改进和推广 (见文 [2–10]). 最近, 文 [3] 给出了一组非奇异 H - 矩阵的新判据, 其中的定理 1 改进了文 [2] 中的定理 1. 本文继续这方面的研究, 建立了一类判别非奇异 H - 矩阵的新条件, 改进了文 [2] 中的定理 1, 并通过数值实例说明了本文所给非奇异 H - 矩阵的新判据的有效性. 另外, 通过实例可见, 本文所给新判据还局部优于文 [3] 中的定理 1.

本文用 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 表示所有 $n\times n$ 阶复矩阵集合. 设 $A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 记

$$\begin{cases} N=\{1,2,\cdots,n\},\ R_i=R_i(A)=\displaystyle\sum_{j\neq i}|a_{ij}|,\ i\in N,\\ N_1=\left\{i\in N:0<|a_{ii}|\leq\dfrac{R_i}{2}\right\},\ N_2=\left\{i\in N:\dfrac{R_i}{2}<|a_{ii}|<R_i\right\},\\ N_3=\{i\in N:0<|a_{ii}|=R_i\},\ N_4=\{i\in N:|a_{ii}|>R_i\}.\end{cases}$$

定义 1.1 [1] 设 $A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 如果 $|a_{ii}|>R_i(A)$ $(i\in N)$, 则称 A 为严格对角占优矩阵, 记为 $A\in D$; 若存在正对角阵 X, 使得 $AX\in D$, 则称 A 为广义严格对角占优矩阵 (也称 A 为非奇异 H - 矩阵), 记为 $A\in\overline{D}$.

若 $N_1\cup N_2\cup N_3=\emptyset$, 则 $A\in D$; 若 $A\in\overline{D}$, 则 A 的主对角线元素非零, 且 A 至少有一个严格对角占优行, 即 $N_4\neq\emptyset$. 故本文总假设 $N_1\cup N_2\cup N_3$ 和 N_4 均非空, 且矩阵 A 的主对角线元素非零.

定义 1.2 [4] 设 $A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 不可约, 如果 $|a_{ii}|\geq R_i(A)$ $(i\in N)$, 且其中至少有一个严格不等式成立, 则称 A 为不可约对角占优矩阵.

*收稿日期: 2013-10-11 接收日期: 2013-10-29
基金项目: 国家自然科学基金项目 (11361038); 湖南省教育厅重点资助项目 (12A137).
作者简介: 王磊磊 (1985–), 男, 陕西延安, 博士, 研究方向: 矩阵理论及其应用.

定义 1.3 [5] 设 $A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 如果 $|a_{ii}|\geq R_i(A)$ $(i\in N)$, 且其中至少有一个严格不等式成立, 又对每个等式成立的下标 i, 都存在非零元素链 $a_{ij_1}a_{j_1j_2}\cdots a_{j_{k-1}j_k}\neq 0$, 使得 $|a_{j_kj_k}|>R_{j_k}(A)$, 则称 A 为具非零元素链对角占优矩阵.

引理 1.1 [4] 设 $A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 为不可约对角占优矩阵, 则 $A\in\overline{D}$.

引理 1.2 [5] 设 $A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 为具非零元素链对角占优矩阵, 则 $A\in\overline{D}$.

根据文 [6] 中的引理 1, 本文总假定所讨论的矩阵中每一行的非对角元的模和为正.

本文首先引进文 [3] 中的记号. 设 $A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 记

$$
\begin{aligned}
&r=\max_{i\in N_4}\left(\frac{\sum\limits_{t\in N_1}|a_{it}|+\sum\limits_{t\in N_2}|a_{it}|+\sum\limits_{i\in N_3}|a_{it}|}{|a_{ii}|-\sum\limits_{t\in N_4,t\neq i}|a_{it}|}\right),\\
&P_i=\sum_{t\in N_1}|a_{it}|+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|+\sum_{t\in N_3}|a_{it}|+r\sum_{t\in N_4,t\neq i}|a_{it}|\ (\forall i\in N_4),\\
&x_i=\frac{|a_{ii}|}{R_i}\ (i\in N_1),\ y_i=\frac{R_i-|a_{ii}|}{R_i}\ (i\in N_2),\ z_i=\frac{P_i}{|a_{ii}|}\ (i\in N_4),\ w_i=\frac{R_i}{|a_{ii}|}\ (i\in N_4),\\
&h=\max_{i\in N_4}\left(\frac{\sum\limits_{t\in N_1}|a_{it}|+\sum\limits_{t\in N_2}|a_{it}|+\sum\limits_{t\in N_3}|a_{it}|}{P_i-\sum\limits_{t\in N_4,t\neq i}|a_{it}|z_t}\right).
\end{aligned}
$$

文 [2] 和文 [3] 给出了如下重要结果:

定理 1.1 [2] 设 $A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 若

$$|a_{ii}|x_i>\sum_{t\in N_1,t\neq i}|a_{it}|x_t+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|y_t+\sum_{t\in N_3}|a_{it}|+\sum_{t\in N_4}|a_{it}|w_t,\ i\in N_1, \tag{1.1}$$

$$|a_{ii}|y_i>\sum_{t\in N_1}|a_{it}|x_t+\sum_{t\in N_2,t\neq i}|a_{it}|y_t+\sum_{t\in N_3}|a_{it}|+\sum_{t\in N_4}|a_{it}|w_t,\ i\in N_2, \tag{1.2}$$

$$|a_{ii}|>\sum_{t\in N_1}|a_{it}|x_t+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|y_t+\sum_{t\in N_3,t\neq i}|a_{it}|+\sum_{t\in N_4}|a_{it}|w_t,\ i\in N_3, \tag{1.3}$$

则 $A\in\overline{D}$.

定理 1.2 [3] 设 $A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 若

$$|a_{ii}|x_i>\sum_{t\in N_1,t\neq i}|a_{it}|x_t+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|y_t+\sum_{t\in N_3}|a_{it}|+h\sum_{t\in N_4}|a_{it}|z_t,\ i\in N_1, \tag{1.4}$$

$$|a_{ii}|y_i>\sum_{t\in N_1}|a_{it}|x_t+\sum_{t\in N_2,t\neq i}|a_{it}|y_t+\sum_{t\in N_3}|a_{it}|+h\sum_{t\in N_4}|a_{it}|z_t,\ i\in N_2, \tag{1.5}$$

且 $|a_{ii}|\neq\sum\limits_{t\in N_3,t\neq i}|a_{it}|$ $(i\in N_3)$, 则 $A\in\overline{D}$.

下面将给出非奇异 H - 矩阵的一组新判定, 并通过数值实例来说明其有效性.

2 一类判别非奇异 H - 矩阵的新方法

为了便于叙述, 本文继续引入如下几个新记号. 设 $A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 记

$$r'=\max_{i\in N_4}\left(\frac{\sum\limits_{t\in N_1}|a_{it}|x_t+\sum\limits_{t\in N_2}|a_{it}|y_t+\sum\limits_{t\in N_3}|a_{it}|}{|a_{ii}|-\sum\limits_{t\in N_4,t\neq i}|a_{it}|}\right),$$

$$P_i'=\sum_{t\in N_1}|a_{it}|x_t+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|y_t+\sum_{t\in N_3}|a_{it}|+r'\sum_{t\in N_4,t\neq i}|a_{it}|\ (i\in N_4),$$

$$z_i'=\frac{P_i'}{|a_{ii}|}\ (i\in N_4),\ h'=\max_{i\in N_4}\left(\frac{\sum\limits_{t\in N_1}|a_{it}|x_t+\sum\limits_{t\in N_2}|a_{it}|y_t+\sum\limits_{t\in N_3}|a_{it}|}{P_i'-\sum\limits_{t\in N_4,t\neq i}|a_{it}|z_t'}\right),$$

$$F_i=\sum_{t\in N_1}|a_{it}|x_t+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|y_t+\sum_{t\in N_3,t\neq i}|a_{it}|+h'\sum_{t\in N_4,t\neq i}|a_{it}|z_t'\ (i\in N_3\cup N_4).$$

定理 2.1 设 $A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 若

$$|a_{ii}|x_i>\sum_{t\in N_1,t\neq i}|a_{it}|x_t+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|y_t+\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\frac{F_t}{|a_{tt}|}+\sum_{t\in N_4}|a_{it}|\frac{F_t}{|a_{tt}|},\ i\in N_1,\tag{2.1}$$

$$|a_{ii}|y_i>\sum_{t\in N_1}|a_{it}|x_t+\sum_{t\in N_2,t\neq i}|a_{it}|y_t+\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\frac{F_t}{|a_{tt}|}+\sum_{t\in N_4}|a_{it}|\frac{F_t}{|a_{tt}|},\ i\in N_2,\tag{2.2}$$

且 $|a_{ii}|\neq\sum\limits_{t\in N_3,t\neq i}|a_{it}|\ (i\in N_3)$, 则 $A\in\overline{D}$.

证 显然, $0<x_i\leq 1/2\ (i\in N_1),\ 0<y_i<1\ (i\in N_2),\ 0\leq r'<1\ (i\in N_4)$. 从而

$$r'|a_{ii}|\geq\sum_{t\in N_1}|a_{it}|x_t+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|y_t+\sum_{t\in N_3}|a_{it}|+r'\sum_{t\in N_4,t\neq i}|a_{it}|=P_i',\ i\in N_4,\tag{2.3}$$

即 $0\leq z_i'=P_i'/|a_{ii}|\leq r'<1\ \ (i\in N_4)$, 进而由式 (2.3) 可得

$$\frac{\sum\limits_{t\in N_1}|a_{it}|x_t+\sum\limits_{t\in N_2}|a_{it}|y_t+\sum\limits_{t\in N_3}|a_{it}|}{P_i'-\sum\limits_{t\in N_4,t\neq i}|a_{it}|z_t'}=\frac{P_i'-r'\sum\limits_{t\in N_4,t\neq i}|a_{it}|}{P_i'-\sum\limits_{t\in N_4,t\neq i}|a_{it}|z_t'}\leq 1,\ i\in N_4.$$

故 $0\leq h'\leq 1$, 且

$$h'P_i'\geq\sum_{t\in N_1}|a_{it}|x_t+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|y_t+\sum_{t\in N_3}|a_{it}|+h'\sum_{t\in N_4,t\neq i}|a_{it}|z_t',\ i\in N_4.\tag{2.4}$$

(a.1) 因对任意的 $i\in N_3$, 有 $|a_{ii}|\neq\sum\limits_{t\in N_3,t\neq i}|a_{it}|$, 故存在充分小的正数 ε_1, 使得

$$|a_{ii}|>\sum_{t\in N_1}|a_{it}|x_t+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|y_t+\sum_{t\in N_3,t\neq i}|a_{it}|+\sum_{t\in N_4}|a_{it}|(h'z_t'+\varepsilon_1),\ i\in N_3.\tag{2.5}$$

(a.2) 对任意的 $i\in N_4$, 由式 (2.4) 可得

$$\begin{aligned}|a_{ii}|(h'z_i'+\varepsilon_1)&=h'P_i'+\varepsilon_1|a_{ii}|>h'P_i'+\varepsilon_1\sum_{t\in N_4,t\neq i}|a_{it}|\\&\geq\sum_{t\in N_1}|a_{it}|x_t+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|y_t+\sum_{t\in N_3}|a_{it}|+\sum_{t\in N_4,t\neq i}|a_{it}|(h'z_t'+\varepsilon_1).\end{aligned}\tag{2.6}$$

取 $D_1=\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n)$, $B=(b_{ij})_{n\times n}=AD_1$, 其中

$$d_i=x_i\ (i\in N_1);\ d_i=y_i\ (i\in N_2);\ d_i=1\ (i\in N_3);\ d_i=h'z_i'+\varepsilon_1\ (i\in N_4).$$

由式 (2.5) 和式 (2.6) 可知, 一定存在充分小的正数 ε_2, 使得

$$0<R_i(B)+\varepsilon_2<|b_{ii}|,\ i\in N_3\cup N_4. \tag{2.7}$$

由式 (2.1) 和式 (2.2) 可知, 对上述充分小的正数 ε_1 和 ε_2, 有

$$\begin{aligned}&|a_{ii}|x_i-\sum_{t\in N_1,t\neq i}|a_{it}|x_t-\sum_{t\in N_2}|a_{it}|y_t-\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\frac{F_t}{|a_{tt}|}-\sum_{t\in N_4}|a_{it}|\frac{F_t}{|a_{tt}|}\\>&\sum_{t\in N_3\bigcup N_4}\frac{|a_{it}|}{|a_{tt}|}\left(\varepsilon_1\sum_{k\in N_4,k\neq t}|a_{tk}|+\varepsilon_2\right),\ i\in N_1;\end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}&|a_{ii}|y_i-\sum_{t\in N_1}|a_{it}|x_t-\sum_{t\in N_2,t\neq i}|a_{it}|y_t-\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\frac{F_t}{|a_{tt}|}-\sum_{t\in N_4}|a_{it}|\frac{F_t}{|a_{tt}|}\\>&\sum_{t\in N_3\bigcup N_4}\frac{|a_{it}|}{|a_{tt}|}\left(\varepsilon_1\sum_{k\in N_4,k\neq t}|a_{tk}|+\varepsilon_2\right),\ i\in N_2.\end{aligned} \tag{2.9}$$

进一步, 令 $D_2=\mathrm{diag}(d_1',d_2',\cdots,d_n')$, $C=(c_{ij})_{n\times n}=BD_2$, 其中

$$d_i'=\frac{R_i(B)+\varepsilon_2}{|b_{ii}|}\ (i\in N_3\cup N_4);\ d_i'=1\ (i\in N_1\cup N_2).$$

(b.1) 对任意的 $i\in N_3\cup N_4$, 由式 (2.7) 可得

$$\begin{aligned}R_i(C)&=\sum_{t\in N_3\cup N_4,t\neq i}|b_{it}|\frac{R_t(B)+\varepsilon_2}{|b_{tt}|}+\sum_{t\in N_1}|b_{it}|+\sum_{t\in N_2}|b_{it}|\\&<\sum_{t\in N_3\bigcup N_4,t\neq i}|b_{it}|+\sum_{t\in N_1}|b_{it}|+\sum_{t\in N_2}|b_{it}|\\&=R_i(B)=|b_{ii}|d_i'-\varepsilon_2<|b_{ii}|d_i'=|c_{ii}|.\end{aligned}$$

(b.2) 对任意的 $i\in N_1$, 由式 (2.8) 可得

$$\begin{aligned}R_i(C)=&\sum_{t\in N_3\bigcup N_4}|b_{it}|\frac{R_t(B)+\varepsilon_2}{|b_{tt}|}+\sum_{t\in N_1,t\neq i}|b_{it}|+\sum_{t\in N_2}|b_{it}|\\=&\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\frac{1}{|a_{tt}|}\left[\sum_{k\in N_1}|a_{tk}|x_k+\sum_{k\in N_2}|a_{tk}|y_k+\sum_{k\in N_3,k\neq t}|a_{tk}|\right.\\&\left.+\sum_{k\in N_4}|a_{tk}|(h'z_k'+\varepsilon_1)+\varepsilon_2\right]+\sum_{t\in N_4}|a_{it}|\frac{1}{|a_{tt}|}\left[\sum_{k\in N_1}|a_{tk}|x_k+\sum_{k\in N_2}|a_{tk}|y_k\right.\\&\left.+\sum_{k\in N_3}|a_{tk}|+\sum_{k\in N_4,k\neq t}|a_{tk}|(h'z_k'+\varepsilon_1)+\varepsilon_2\right]+\sum_{t\in N_1,t\neq i}|a_{it}|x_t+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|y_t\\=&\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\frac{1}{|a_{tt}|}\left[F_t+\varepsilon_1\sum_{k\in N_4}|a_{tk}|+\varepsilon_2\right]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{t\in N_4}|a_{it}|\frac{1}{|a_{tt}|}\left[F_t+\varepsilon_1\sum_{k\in N_4,k\neq t}|a_{tk}|+\varepsilon_2\right]+\sum_{t\in N_1,t\neq i}|a_{it}|x_t+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|y_t\\
=&\sum_{t\in N_1,t\neq i}|a_{it}|x_t+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|y_t+\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\frac{F_t}{|a_{tt}|}+\sum_{t\in N_4}|a_{it}|\frac{F_t}{|a_{tt}|}\\
&+\varepsilon_1\sum_{t\in N_3\bigcup N_4}\frac{|a_{it}|}{|a_{tt}|}\left(\sum_{k\in N_4,k\neq t}|a_{tk}|\right)+\varepsilon_2\sum_{t\in N_3\bigcup N_4}\frac{|a_{it}|}{|a_{tt}|}\\
<&|a_{ii}|x_i=|b_{ii}|=|c_{ii}|.
\end{aligned}
$$

(b.3) 对任意的 $i\in N_2$, 如同 (b.2) 的证法, 由式 (2.9) 亦可证得 $R_i(C)<|c_{ii}|,\ i\in N_2$. 综上所述, $C=AD_1D_2\in D$, 故 $A\in\overline{D}$. 证毕.

注 由于

$$
0\le\frac{F_i}{|a_{ii}|}\le\frac{R_i}{|a_{ii}|}=1\ (i\in N_3),\ 0\le\frac{F_i}{|a_{ii}|}\le\frac{R_i}{|a_{ii}|}=w_i<1\ (i\in N_4),
$$

故定理 2.1 改进了定理 1.1. 另外, 定理 2.1 还局部优于定理 1.2 (见例 3.1).

由引理 1.1– 引理 1.2 及定理 2.1 的证法, 易得到在不可约和非零元素链下的相应结果.

定理 2.2 设 $A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 且

$$
|a_{ii}|x_i\ge\sum_{t\in N_1,t\neq i}|a_{it}|x_t+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|y_t+\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\frac{F_t}{|a_{tt}|}+\sum_{t\in N_4}|a_{it}|\frac{F_t}{|a_{tt}|},\ i\in N_1, \tag{2.10}
$$

$$
|a_{ii}|y_i\ge\sum_{t\in N_1}|a_{it}|x_t+\sum_{t\in N_2,t\neq i}|a_{it}|y_t+\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\frac{F_t}{|a_{tt}|}+\sum_{t\in N_4}|a_{it}|\frac{F_t}{|a_{tt}|},\ i\in N_2. \tag{2.11}
$$

若 A 还满足下列条件之一, 则 $A\in\overline{D}$,

(i) A 不可约, 且 $N_3\neq\emptyset$ 或式 (2.10) 和式 (2.11) 的诸式中至少有一个严格不等式成立.

(ii) $N_1\cup N_2\cup N_3-W_1-W_2\neq\emptyset$, 且对任意的 $i\in W_1\cup W_2\cup N_4$, 存在非零元素链 $a_{is_1}a_{s_1s_2}\cdots a_{s_kk}\neq 0$, 使得 $k\in[N_1\cup N_2\cup N_3-W_1-W_2]$, 其中

$$
\begin{aligned}
&\overline{N_3}=\left\{i:|a_{ii}|=\sum_{t\in N_3,t\neq i}|a_{it}|,\ i\in N_3\right\},\\
&W_1=\left\{i:|a_{ii}|x_i=\sum_{t\in N_1,t\neq i}|a_{it}|x_t+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|y_t+\sum_{t\in N_3\cup N_4}|a_{it}|\frac{F_t}{|a_{tt}|},\ i\in N_1\right\}\cup\overline{N_3},\\
&W_2=\left\{i:|a_{ii}|y_i=\sum_{t\in N_1}|a_{it}|x_t+\sum_{t\in N_2,t\neq i}|a_{it}|y_t+\sum_{t\in N_3\cup N_4}|a_{it}|\frac{F_t}{|a_{tt}|},\ i\in N_2\right\}\cup\overline{N_3}.
\end{aligned}
$$

3 数值实例

例 3.1 设矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 & 0.5 & 1.5 \\ 1.5 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 1.5 & 0 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 0.5 & 2.5 & 0 & 9.5 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 20 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 40 \end{bmatrix},$$

则 $N_1=\{4\}$, $N_2=\{3\}$, $N_3=\{1,2\}$, $N_4=\{5,6\}$. 由于

$$|a_{44}|x_4=\frac{25}{40}<\frac{42}{40}=|a_{43}|y_3+|a_{41}|+|a_{42}|+|a_{45}|w_5+|a_{46}|w_6,$$

故矩阵 A 不满足定理 1.1 (即文 [2] 中定理 1) 的条件. 又因为

$$|a_{44}|x_4=\frac{200}{320}<\frac{211}{320}=|a_{43}|y_3+|a_{41}|+|a_{42}|+|a_{45}|z_5+|a_{46}|z_6,$$

故矩阵 A 不满足定理 1.2 (即文 [3] 中定理 1) 的条件. 而

$$\begin{aligned} & |a_{44}|x_4=\frac{1600}{2560}>\frac{947}{2560} \\ = \ & |a_{43}|y_3+|a_{41}|\frac{F_1}{|a_{11}|}+|a_{42}|\frac{F_2}{|a_{22}|}+|a_{45}|\frac{F_5}{|a_{55}|}+|a_{46}|\frac{F_6}{|a_{66}|}, \\ & |a_{33}|y_3=\frac{76800}{204800}>\frac{22107}{204800} \\ = \ & |a_{34}|x_4+|a_{31}|\frac{F_1}{|a_{11}|}+|a_{32}|\frac{F_2}{|a_{22}|}+|a_{35}|\frac{F_5}{|a_{55}|}+|a_{36}|\frac{F_6}{|a_{66}|}, \\ & |a_{11}|=4\neq\sum_{t\in N_3,t\neq 1}|a_{1t}|=1,\ |a_{22}|=4\neq\sum_{t\in N_3,t\neq 2}|a_{2t}|=1.5, \end{aligned}$$

故矩阵 A 满足定理 2.1 的条件, 即 $A\in\overline{D}$. 当取 $X=\mathrm{diag}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{8}{91},\frac{4}{91}\right)$ 时, 有 $AX\in D$.

参 考 文 献

[1] 黄廷祝. 非奇 H - 矩阵的简捷判据 [J]. 计算数学, 1993, 15(3): 318–328.

[2] Gan Taibin, Huang Tingzhu, Evans D J, Gao Jian. Sufficient conditions for H-matrices[J]. Int. J. Comput. Math., 2005, 82(2): 247–258.

[3] 韩涛, 陆全, 徐仲, 杜永恩. 一组非奇异 H - 矩阵的新判据 [J]. 工程数学学报, 2011, 28(4): 498–504.

[4] Varga R S. On recurring theorems on diagonally dominance[J]. Linear Algebra Appl., 1976, 13: 1–9.

[5] Gan Taibin, Huang Tingzhu. Simple criteria for nonsingular H-matrices[J]. Linear Algebra Appl., 2003, 374: 317–326.

[6] 干泰彬, 黄廷祝. 非奇异 H - 矩阵的实用充分条件 [J]. 计算数学, 2004, 26(1): 109–116.

[7] 高慧敏, 陆全, 徐仲, 山瑞平. 非奇 H - 矩阵的一组细分迭代判定条件 [J]. 数学杂志, 2013, 33(2): 329–337.

[8] Zhu Li, Liu Jianzhou. Some new conditions for generalized H-matrices[J]. Appl. Math. Mech. (English Edition), 2007, 28(11): 1495–1501.

[9] He Anqi, Liu Jianzhou. A parallel iterative criteria for H-matrices[J]. Appl. Math. Comput., 2007, 190: 1–5.

[10] Xie Qingming, He Anqi, Liu Jianzhou. On the iterative criteria for H-matrices[J]. Appl. Math. Comput., 2007, 189: 41–48.

[11] Berman A, Plemmons R J. Nonnegative matrices in the mathematical sciences[M]. Philadelphia: SIAM Press, 1994.

A TYPE OF NEW CRITERIA FOR JUDGING NONSINGULAR H-MATRICES

WANG Lei-lei, HUANG Hao, LI Quan-bing, LIU Jian-zhou

(*College of Mathematics and Computational Science, Xiangtan University, Xiangtan 411105, China*)

Abstract: The numerical criteria for judging nonsingular H-matrices is studied in this paper. A type of new criteria for identifying nonsingular H-matrices is obtained by applying some techniques of inequalities, which extends some related and existed results. The universality of the proposed criteria is illustrated by a numerical example.

Keywords: nonsingular H-matrices; diagonally dominant matrix; irreducibility; non-zero element chain

2010 MR Subject Classification: 15B57