

关于给定控制数的连通二部图的极大图的刻画

于 涵, 皮晓明, 刘焕平

(哈尔滨师范大学数学科学学院, 黑龙江 哈尔滨 150025)

摘要: 本文研究了给定控制数的连通二部图的极大图的结构问题. 利用分类讨论思想和数学归纳法, 刻画了控制数等于 3 和大于等于 4 这两类边数达到极值时的连通二部图. 本文所得结果可用于进一步研究给定全控制数的连通二部图的极大图问题.

关键词: 控制集; 控制数; 二部图; 极大图

MR(2010) 主题分类号: 05C69; 05C35

中图分类号: O157.5

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2015)06-1495-09

1 引言

本文所指的图均为连通的无向简单图, 文章中未说明的符号和术语同文献 [1].

设 v 是 $G = (V, E)$ 的一个顶点, $N_G(v)$ 表示 v 在 G 中的邻点集合. 对任意的非空集合 $S \subseteq V$, 记 $N_G(S) = \bigcup_{v \in S} N_G(v)$, G 中顶点 v 的度记为 $d(v)$, G 的最大度记为 $\Delta(G)$. 对任意的非空集合 $E' \subseteq E$, 由 E' 导出的 G 的子图记为 $G[E']$, 以 E' 为边集的 G 的支撑子图记为 $G(E')$, $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数, $\lceil x \rceil$ 表示不小于 x 的最小整数.

$G = (V, E)$ 的控制集是指 V 的一个子集 V' , 使得对任意的 $v \in V - V'$, 都存在某个 $u \in V'$ 与 v 相邻. 图 G 的控制数是它的最小控制集中的顶点数, 记为 $\gamma(G)$. 本文仅考虑一般的控制数.

Vizing 在文 [2] 中指出给定控制数的一般图的最大边数.

引理 1.1 [2] 若图 G 有 n 个顶点并且 $2 \leq \gamma(G) \leq n$, 则

$$E(G) \leq \left\lfloor \frac{(n - \gamma(G))(n - \gamma(G) - 2)}{2} \right\rfloor,$$

图 G 可以达到上界当且仅当 G 是从 $(n - \gamma(G) + 2)$ 个顶点的完全图中去掉一个最小的边覆盖, 然后并上 $\gamma(G) - 2$ 个孤立点得到的图.

根据引理 1.1 可知, 若 $\gamma \geq 3$ 并且 G 取最大可能的边数, 则 G 有孤立点, 因此是不连通的. Sanchis 在文 [3] 中得出了给定控制数的连通图的最大边数.

引理 1.2 [3] 设图 G 是有 n 个顶点的连通图. 若 $3 \leq \gamma(G) \leq \frac{n}{2}$, 则 G 的边数最多是 $\binom{n - \gamma - 1}{2}$.

*收稿日期: 2014-05-12 接收日期: 2014-09-25

基金项目: 黑龙江省自然科学基金项目 (A201412); 黑龙江省教育厅科学技术研究项目资助 (12531203; 12521148); 哈尔滨师范大学青年学术骨干项目基金资助 (10XBKQ08).

作者简介: 于涵 (1990-), 女, 黑龙江佳木斯, 硕士, 主要研究方向: 组合数学与图论.

通讯作者: 皮晓明.

如果我们限制在二部分图中, 则有下面的结论在文 [4] 中给出.

引理 1.3 [4] 对于任意的二部图 G , 有 $\gamma(G) \leq |V| - \Delta(G) - \lceil \frac{|E|}{\Delta(G)} \rceil + 2$.

引理 1.4 [4] 设 G 是有 n 个顶点且控制数为 $\gamma(G) \geq 2$ 的二部图, 则可以达到最大边数的图是一个 $n - \gamma(G) + 2$ 个顶点的几乎平衡的完全二部图与 $\gamma(G) - 2$ 个孤立点的并.

从引理 1.4 可知, 若 $\gamma(G) \geq 3$, 则可以达到这个界的图是不连通的. 陈宏宇和张丽在文 [5] 中给出二部图 G 的最大度至少为 $n - \gamma(G) + 1$ 时的最大边数.

引理 1.5 [5] 设图 G 是有 n 个顶点的连通二部图且 $\gamma(G) \geq 3$, $\Delta(G) \geq n - \gamma(G) - 1$, 则 $|E(G)| \leq \lfloor \frac{(n-\gamma)^2 + 4(n-\gamma)}{4} \rfloor$ ($\gamma(G) = 3, n = 8$ 除外).

高超和侯新民在文 [6] 进一步给出给定控制数的二部图的最大边数.

引理 1.6 [6] 设 $G = (V, E)$ 为 n 阶二部图, 控制数为 γ , 则如下结论成立:

$$(1) |E| \leq \lfloor (\frac{n-\gamma+2}{2})^2 \rfloor;$$

$$(2) \text{若 } \Delta(G) \neq \lfloor \frac{n-\gamma+2}{2} \rfloor \text{ 或 } \lceil \frac{n-\gamma+2}{2} \rceil, \text{ 则 } |E(G)| \leq \lfloor \frac{(n-\gamma)^2 + 4(n-\gamma)}{4} \rfloor.$$

本文将对给定控制数的边数达到上界 $\lfloor (\frac{n-\gamma+2}{2})^2 \rfloor$ 时的极大 n 阶连通二部图进行刻画.

以下用 $G = (M \cup N, E) \cong K_{m, (m+k)} - E'$ 表示二部划分为 M 和 N 的 n 阶连通二部图, 其中 $|M| = m$, $|N| = m + k = n - m$, $k \geq 0$, E' 表示从完全二部图 $K_{m, (m+k)}$ 中删去的边数的集合.

2 主要结果及证明

引理 2.1 设 $G = (M \cup N, E) \cong K_{m, (m+k)} - E'$ 是 n 阶连通二部图, 且 $\gamma(G) = 2$, 则 $|E(G)| = \lfloor (\frac{n}{2})^2 \rfloor \Leftrightarrow G \cong K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$.

证 首先证明必要性. 设 $G = (M \cup N, E) \cong K_{m, (m+k)} - E'$ 是 n 阶连通二部图, 则有

$$n = 2m + k, |E(G)| = m(m+k) - |E'| \leq m(m+k).$$

因为 $|E(G)| = \lfloor (\frac{n}{2})^2 \rfloor = \lfloor (\frac{2m+k}{2})^2 \rfloor = m^2 + mk + \lfloor \frac{k^2}{4} \rfloor \geq m(m+k)$, 所以 $|E(G)| = m(m+k)$, $k = 0$ 或 1 , 从而得 $G \cong K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$.

再证明充分性. 因为 $G \cong K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$, 所以不论 n 为奇数或偶数, 都有 $|E(G)| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \cdot \lceil \frac{n}{2} \rceil = \lfloor (\frac{n}{2})^2 \rfloor$, 并且完全二部图的控制数为 2 , 故充分性得证.

引理 2.2 设 $G = (M \cup N, E) \cong K_{m, (m+k)} - E'$ 是 n 阶连通二部图, 且 $\gamma(G) = 3$, $|E(G)| = \lfloor (\frac{n-1}{2})^2 \rfloor$, 则有如下结论:

(1) $G[E']$ 的每个连通分支中的边数均不小于 2 ;

(2) $|E'| = m$, $k = 0, 1, 2$, 且对于任意的 $u \in M$, 均有 $d_{G[E']}(u) = 1$.

证 设 $G = (M \cup N, E) \cong K_{m, (m+k)} - E'$ 是 n 阶连通二部图, 则有 $n = 2m + k$, $|E(G)| = m(m+k) - |E'|$. 假设存在 $G[E']$ 的一个连通分支的边数为 1 , 那么与该边关联的两个顶点即为 G 的一个控制集, 与 $\gamma(G) = 3$ 矛盾.

一方面, $|E'| = m(m+k) - |E(G)| = m(m+k) - \lfloor (\frac{n-1}{2})^2 \rfloor = m - \lfloor (\frac{k-1}{2})^2 \rfloor \leq m$.

另一方面, 因为 $\gamma(G) = 3$, 所以 $E' \neq \emptyset$, 且 $|E'| \geq m$. 否则存在点 $u \in M$, $v \in N$, 使得 u, v 均不与 E' 中的边关联, 从而 $\{u, v\}$ 为 G 的一个控制集, 与 $\gamma(G) = 3$ 矛盾. 综上所述可得 $|E'| = m$, $k = 0, 1, 2$.

当 $k = 1$ 或 2 , 即 $|N| > |M|$ 时, 由于 $|E'| = m$, 若存在 $u \in M$, 且 u 不与 E' 中的边关联, 则也存在 $v \in N$, 使得 v 也不与 E' 中的边关联, 从而 $\{u, v\}$ 为 G 的一个控制集, 与 $\gamma(G) = 3$ 矛盾, 所以对任意的 $u \in M$, $d_{G[E']}(u) = 1$.

当 $k = 0$, 即 $|N| = |M|$ 时, 若存在 $u \in M$ 使 u 不与 E' 中的边关联, 则对任意的 $v \in N$, $d_{G[E']}(v) = 1$. 否则由于 $G[E']$ 中的每个连通分支中的边数均不小于 2 可知, 若存在一点 $v \in N$, 使得 v 不与 E' 中的边关联, 则 $\{u, v\}$ 为 G 的一个控制集, 与 $\gamma(G) = 3$ 矛盾. 由于 $|M| = |N|$, 故将集合 M 与集合 N 对换, 从而得对任意的 $u \in M$, $d_{G[E']}(u) = 1$.

综上可得 $|E'| = m$, $k = 0, 1, 2$, 且对于任意的 $u \in M$, 均有 $d_{G[E']}(u) = 1$.

引理 2.3 设 $G = (M \cup N, E) \cong K_{m, (m+k)} - E'$ 是 n 阶连通二部图, 且 $\gamma(G) \geq 4$, $|E(G)| = \lfloor (\frac{n-\gamma+2}{2})^2 \rfloor$, 则有

$$|E'| = m(\gamma - 2), \quad k = \gamma - 3, \gamma - 2, \gamma - 1,$$

且对于任意的 $u \in M$, 有 $d_{G(E')}(u) = \gamma - 2$.

证 设 $G = (M \cup N, E) \cong K_{m, (m+k)} - E'$ 是 n 阶连通二部图, 则有

$$\begin{aligned} n &= 2m + k, \quad |E(G)| = m(m + k) - |E'|, \\ |E'| &= m(m + k) - \lfloor (\frac{2m + k - \gamma + 2}{2})^2 \rfloor = m(\gamma - 2) - \lfloor (\frac{k - \gamma + 2}{2})^2 \rfloor \leq m(\gamma - 2). \end{aligned}$$

假设 $|E'| < m(\gamma - 2)$, 则存在 $u \in M$, 使得 $d_{G(E')}(u) \leq \gamma - 3$. 任取 $x \in M$ 且

$$d_{G(E')}(x) = \min\{d_{G(E')}(u) | u \in M\}.$$

令

$$Y = N_{G(E')}(x), \quad X = \bigcap_{y \in Y} N_{G(E')}(y),$$

则 $X \cup Y$ 是 G 的一个控制集, 因图 G 的控制数为 γ , 故 $|X| \geq \gamma - |Y|$. 对于任意的 $y' \in N - Y$, 令

$$Z(y') = N_{G(E')}(y') \cap X,$$

因为 $\{x, y'\} \cup Z(y') \cup Y$ 是 G 的一个控制集, 且图 G 的控制数为 γ , 所以 $|Z(y')| \geq \gamma - 2 - |Y|$. 于是有

$$\begin{aligned} (m - |X|)|Y| &\leq \sum_{x' \in M-X} d_{G(E')}(x') \\ &\leq |E'| - (\gamma - 2 - |Y|)(m + k - |Y|) - |X||Y| \\ &= m(\gamma - 2) - \lfloor (\frac{k - \gamma + 2}{2})^2 \rfloor - m(\gamma - 2) \\ &\quad + m|Y| + (\gamma - 2 - |Y|)(|Y| - k) - |X||Y| \\ &= (|Y| - k)(\gamma - 2) + |Y|(m + k - |Y| - |X|) - \lfloor (\frac{k - \gamma + 2}{2})^2 \rfloor \\ &= (m - |X|)|Y| - (|Y| - \frac{k + \gamma - 2}{2})^2 + (\frac{k - \gamma + 2}{2})^2 - \lfloor (\frac{k - \gamma + 2}{2})^2 \rfloor \\ &\leq (m - |X|)|Y|. \end{aligned}$$

上式等号成立当且仅当

$$-(|Y| - \frac{k + \gamma - 2}{2})^2 + (\frac{k - \gamma + 2}{2})^2 - [(\frac{k - \gamma + 2}{2})^2] = 0,$$

并且在 $G(E')$ 中 $M' = (M - X) \cup \{x\}$ 中每一点的度均为 $|Y|$, $N - Y$ 中每一点在 X 中的度恰为 $\gamma - 2 - |Y|$. 对于任意的 $y'_1, y'_2 \in N - Y$, 令

$$|N_{G(E')}(y'_1) \cap N_{G(E')}(y'_2) \cap X| = l_{(y'_1, y'_2)},$$

则 $\{y'_1, y'_2, x\} \cup Y \cup (N_{G(E')}(y'_1) \cap N_{G(E')}(y'_2) \cap X)$ 为 G 的一个控制集, 且图 G 的控制数为 γ , 所以 $l_{(y'_1, y'_2)} \geq \gamma - 3 - |Y|$. 又对于任意的 $y' \in N - Y$, $|N_{G(E')}(y') \cap X| = \gamma - 2 - |Y|$, 由 G 是连通的可得 $l_{(y'_1, y'_2)} = \gamma - 3 - |Y|$, 进而得 $|X| - 1 = |\bigcup_{y' \in N - Y} N_{G(E')}(y') \cap X| = \gamma - 1 - |Y|$, 即 $|X| = \gamma - |Y|$. 选取 $x' \in M - X$, 令

$$Y' = N_{G(E')}(x'), X' = \bigcap_{y' \in Y'} N_{G(E')}(y')$$

且 $Y' \neq Y$, (这样的 x' 必存在, 否则 G 有孤立点). 因为 $|N_{G(E')}(x)| = |N_{G(E')}(x')| = |Y|$, 则通过之前对 x 的讨论, 可得 $|Y'| = |Y|$, $|X'| = |X|$. 因为 $Y' \neq Y$, 所以 $|Y' \cap Y| \leq |Y| - 1$, 进而存在 $y' \in Y' - (Y \cap Y')$, 使得

$$|N_{G(E')}(y') \cap X| = \gamma - 2 - |Y|,$$

所以 $|X' \cap X| \leq \gamma - 2 - |Y|$, 且存在

$$x_1 \in X - (X' \cap X) - \{x\}, x'_1 \in X' - (X' \cap X) - \{x'\}.$$

当 $|Y' \cap Y| = |Y| - 1$ 时, 若 $N = Y' \cup Y$, 由于 $|X| + |Y| = \gamma$, 可得 $|N| + |X| = \gamma + 1$. 若 $|X| = 1, |N| = \gamma$, 则 $|M| = |N| = \gamma$, 且 $\{x\} \cup Y$ 为 G 的一个控制集. 由于 G 的控制数为 γ , 从而有 $|Y| + 1 \geq \gamma$, 与 $|Y| \leq \gamma - 3$ 矛盾. 若 $|X| > 1$, 则 $|N| < \gamma$, 与 $|N| \geq \gamma$ 矛盾, 故存在一点 $y_1 \in N - (Y \cap Y')$, 且 $|N_{G(E')}(y_1) \cap (X \cap X')| = \gamma - 3 - |Y|$, 否则与 G 为连通图矛盾. 由于 $|N_{G(E')}(y_1) \cap X'| = \gamma - 2 - |Y|$, 故 y_1 在 $G(E')$ 中, 与 $X' - (X' \cap X) - \{x'\}$ 中一点相邻, 这与 $|N_{G(E')}(x'_1)| = |Y'| = |Y|$ 矛盾.

当 $|Y' \cap Y| < |Y| - 1$ 时, 存在 $y_1, y_2 \in Y - (Y \cap Y')$, 因为 $|N_{G(E')}(y_1) \cap N_{G(E')}(y_2) \cap X'| = \gamma - 3 - |Y|$, 所以存在 $x'' \in X' - (X' \cap X) - \{x'\}$ 在 $G(E')$ 中, 与 y_1, y_2 中至少一个点相邻, 这与 $|N_{G(E')}(x'_1)| = |Y'| = |Y|$ 矛盾.

所以有 $|E'| = m(\gamma - 2)$, $k = \gamma - 3, \gamma - 2, \gamma - 1$, 且对任意的 $u \in M$, $d_{G(E')}(u) \geq \gamma - 2$. 因为 $\sum_{u \in M} d_{G(E')}(u) = m(\gamma - 2)$, 所以对任意的 $u \in M$, $d_{G(E')}(u) = \gamma - 2$.

下面将刻画对于给定控制数为 γ 的连通二部图边数达到上界 $[(\frac{n-r+2}{2})^2]$ 时图的结构.

令

$$\begin{aligned} \Gamma_m^3 &= \{G = (M \cup N, E) \cong K_{m, (m+k)} - E' | M = \{u_1, u_2, \dots, u_{m-1}, u_m\}, \\ N &= \{v_1, \dots, v_l, v_{l+1}, \dots, v_{m+k}\}, \\ E' &= \{u_i v_{l+1} | i = 1, 2, \dots, k_1\} \cup \{u_i v_{l+2} | i = k_1 + 1, \dots, k_2\} \cup \dots \\ &\quad \cup \{u_i v_{m+k} | i = k_{m+k-l-1} + 1, \dots, m\}, \end{aligned}$$

其中 $2 \leq m + k - l \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$, $k = 0, 1, 2, k_1 \geq 2, k_{i+1} - k_i \geq 2, (i = 1, 2, \dots, m + k - l - 2), m - k_{m+k-l-1} \geq 2$.

定理 2.4 设 $G = (M \cup N, E) \cong K_{m, (m+k)} - E'$ 是 n 阶连通二部图, 且 $\gamma(G) = 3$, 则 $|E(G)| = \lfloor (\frac{n-1}{2})^2 \rfloor \Leftrightarrow G \in \Gamma_m^3$.

证 先证明必要性. 由引理 2.2 知 $|E'| = m$, 对于任意的 $u \in M, d_{G[E']}(u) = 1$, 且 $G[E']$ 的每个连通分支中的边数均不小于 2, 所以在 $G[E']$ 中存在孤立点, 且若 $v \in N$ 在 $G[E']$ 中与 M 中的点相邻, 则 $d_{G[E']}(v) \geq 2$. 若 $d_{G[E']}(v) = m$, 则 v 在 G 中是孤立点, 与 G 为二部连通图矛盾, 于是 $G[E']$ 中最少有两个连通分支, 最多有 $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ 个连通分支. 设 $N_t = \{v \in N | d_{G[E']}(v) \geq 2\}$, 则 $2 \leq |N_t| \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$, 且 $N' = N - N_t$ 中的每个点在 G 中与 M 中的所有点均相邻. 由于任意的 $u \in M, d_{G[E']}(u) = 1$, 因此对任意的 $v_1, v_2 \in N_t$, 有 $N_{G[E']}(v_1) \cap N_{G[E']}(v_2) = \emptyset$. 综上 $G \in \Gamma_m^3$.

再证明充分性. 设 $G \in \Gamma_m^3$ 且 $G \cong K_{m, (m+k)} - E'$ 是 n 阶连通二部图, 则有

$$n = 2m + k, k = 0, 1, 2, |E'| = m, |E(G)| = m(m + k) - m = m(m + k - 1)$$

且 $G[E']$ 中每个连通分支中的数不小于 2.

$$\text{当 } k = 0 \text{ 时, } |E(G)| = m(m - 1) = \lfloor (\frac{2m - 3 + 2}{2})^2 \rfloor = \lfloor (\frac{n - 1}{2})^2 \rfloor,$$

$$\text{当 } k = 1 \text{ 时, } |E(G)| = m^2 = \lfloor (\frac{2m + 1 - 3 + 2}{2})^2 \rfloor = \lfloor (\frac{n - 1}{2})^2 \rfloor,$$

$$\text{当 } k = 2 \text{ 时, } |E(G)| = m(m + 1) = \lfloor (\frac{2m + 2 - 3 + 2}{2})^2 \rfloor = \lfloor (\frac{n - 1}{2})^2 \rfloor,$$

所以 $|E(G)| = \lfloor (\frac{n-1}{2})^2 \rfloor$. 假设 $\gamma(G) = 2$, 令 $\{u, v\}$ 是 G 的一个控制集, 则 $u, v \in G[E']$ 且 $N_G(u) \cup N_G(v) = M \cup N - \{u, v\}$, 从而 $G[E']$ 中有一个连通分支只含一条边, 与 $G[E']$ 的每个连通分支中的边数均不小于 2 矛盾, 所以 $\gamma(G) \geq 3$, 又 $\{v_{m+k}, v_{m+k-1}, u_1\}$ 为 G 的一个控制集, 从而 $\gamma(G) = 3$.

例 2.5 当 $\gamma(G) = 3, |M| = 7, |N| = 8, k = 1$ 时, 此时的极大图如图 1, 图中实点为控制点.

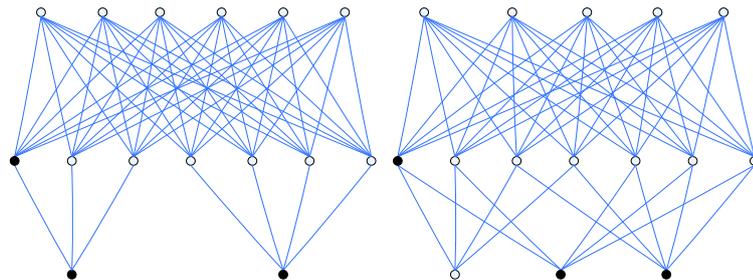


图 1: $|M| = 7, |N| = 8, k = 1$ 时控制数为 3 的极大图

令

$$\begin{aligned}\Gamma_m^\gamma &= \{G = (M \cup N, E) \cong K_{m, (m+k)} - E' \mid M = \{u_1, \dots, u_m\}, \\ N &= \{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_{m+k}\}, \\ E &= \{u_i v_j \mid i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, m+k - (\gamma - 1)\} \cup \{u_i v_{m+k - (\gamma - 2)} \mid i = 1, \dots, k_1\} \\ &\quad \cup \{u_i v_{m+k - (\gamma - 3)} \mid i = k_1 + 1, \dots, k_2\} \cup \dots \cup \{u_i v_{m+k} \mid i = k_{\gamma-2} + 1, \dots, m\},\end{aligned}$$

其中 $k = \gamma - 3, \gamma - 2, \gamma - 1$, $k_1 \geq 2$, $k_{i+1} - k_i \geq 2$, ($i = 1, \dots, \gamma - 3$), $m - k_{\gamma-2} \geq 2$.

定理 2.6 设 $G = (M \cup N, E) \cong K_{m, (m+k)} - E'$ 是 n 阶连通二部图, 且 $\gamma(G) = \gamma \geq 4$, 则 $|E(G)| = \lfloor (\frac{n-\gamma+2}{2})^2 \rfloor \Leftrightarrow G \in \Gamma_m^\gamma$.

证 先证明必要性. 由引理 2.3 知 $|E'| = m(\gamma - 2)$ 且任意的 $u \in M$, $d_{G(E')}(u) = \gamma - 2$ 且 $k = \gamma - 3, \gamma - 2, \gamma - 1$. 对任意的 $u_1, u_2 \in M$, 令

$$N' = N_{G(E')}(u_1) \cap N_{G(E')}(u_2),$$

假设 $|N'| = l_{(u_1, u_2)} \leq \gamma - 4$. 若 $l_{(u_1, u_2)} = 0$, 即 $N' = \emptyset$, 则有

$$m + k > m(\gamma - 2) \geq 2m.$$

解得 $k > m$, 但 $m \geq \gamma$, 矛盾于 $k \leq \gamma - 1$, 因此 $l_{(u_1, u_2)} \geq 1$. 令

$$X = \bigcap_{v' \in N'} N_{G(E')}(v') - \{u_1\},$$

对任意的 $v \in N - N'$, 令

$$l(v) = |N_{G(E')}(v) \cap X|.$$

因为 $(N_{G(E')}(v) \cap X) \cup N' \cup \{u_1, u_2, v\}$ 是 G 的一个控制集, 且图 G 的控制数为 γ , 所以 $l(v) \geq \gamma - 3 - l_{(u_1, u_2)}$. 由于

$$\sum_{v \in N - N'} l(v) + l_{(u_1, u_2)} |X| = (\gamma - 2) |X|,$$

所以

$$(\gamma - 3 - l_{(u_1, u_2)})(m + k - l_{(u_1, u_2)}) + l_{(u_1, u_2)} |X| \leq (\gamma - 2) |X|,$$

化简得

$$(2 + l_{(u_1, u_2)} - \gamma)(l_{(u_1, u_2)} + |X| - m - k) \leq m + k - l_{(u_1, u_2)}. \quad (2.1)$$

因为 $X \cup \{u_1\} \cup N'$ 是 G 的一个控制集, 且图 G 的控制数为 γ , 所以 $l_{(u_1, u_2)} \geq \gamma - |X| - 1$, 即 $|X| \geq \gamma - l_{(u_1, u_2)} - 1 \geq 3$. 由式 (2.1) 可知

$$(2 + \gamma - |X| - 1 - \gamma)(\gamma - |X| - 1 + |X| - m - k) + \gamma - |X| - 1 \leq m + k,$$

整理得

$$(1 - |X|)(\gamma - 1 - m - k) + \gamma - |X| - 1 \leq m + k. \quad (2.2)$$

当 $k = \gamma - 1$ 时, 带入式 (2.2) 可得

$$(1 - |X|)(\gamma - 1 - m - \gamma + 1) + \gamma - |X| - 1 \leq m + \gamma - 1,$$

整理得

$$(|X| - 2)(m - 1) \leq 2. \quad (2.3)$$

因为 $|X| \geq 3$, 所以 $|X| - 2 \geq 1$. 由于 $m \geq \gamma \geq 4$, 故 $m - 1 \geq 3$. 所以式 (2.3) 不成立.

当 $k = \gamma - 2$ 时, 带入式 (2.2) 可得

$$(1 - |X|)(\gamma - 1 - m - \gamma + 2) + \gamma - |X| - 1 \leq m + \gamma - 2,$$

整理得

$$(|X| - 2)(m - 2) \leq 2.$$

由于 $|X| - 2 \geq 1$, $m - 2 \geq 2$, 所以有

$$\begin{cases} |X| - 2 = 1, \\ m - 2 = 2, \end{cases}$$

解得 $|X| = 3$, $m = 4$, 此时 N' 中的点在 G 中为孤立点, 与 G 是连通图矛盾.

当 $k = \gamma - 3$ 时, 带入式 (2.2) 可得

$$(1 - |X|)(\gamma - 1 - m - \gamma + 3) + \gamma - |X| - 1 \leq m + \gamma - 3,$$

整理得

$$(|X| - 2)(m - 3) \leq 2.$$

由于 $|X| - 2 \geq 1$, $m - 3 \geq 1$, 所以有

$$\begin{cases} |X| - 2 = 2, \\ m - 3 = 1, \end{cases} \quad \text{或者} \quad \begin{cases} |X| - 2 = 1, \\ m - 3 = 2. \end{cases}$$

前式解得 $|X| = 4$, $m = 4$, 与 $m > |X|$ 矛盾. 后式解得 $|X| = 3$, $m = 5$, 从而有 $\gamma(G) \leq 5$, $l_{(u_1, u_2)} \leq 1$. 由于 $\gamma(G) \geq 4$, $l_{(u_1, u_2)} \geq 1$, 进而得 $\gamma(G) = 5$, $l_{(u_1, u_2)} = 1$, $k = 2$, $|N| = 7$. 因为任意的 $u_1, u_2 \in M$, $|N_{G(E')}(u_1) \cap N_{G(E')}(u_2)| = 1$, 且 $|N_{G(E')}(u_1)| = \gamma - 2 = 3$, 所以 $\{u_1\} \cup X$ 中这四个点在 $G(E')$ 中还要与 N 中除共邻点外的 8 个点相邻, 故 $|N| \geq 9$ 与 $|N| = 7$ 矛盾.

综上所述可得 $l_{(u_1, u_2)} \geq \gamma - 3$, 即任意的 $u_1, u_2 \in M$, $|N_{G(E')}(u_1) \cap N_{G(E')}(u_2)| \geq \gamma - 3$. 由引理 2.3 可知, 对任意的 $u \in M$, 均有 $|d_{G(E')}(u)| = \gamma - 2$, 所以对任意的 $u_1, u_2 \in M$, 有

$$\gamma - 2 \geq |N_{G(E')}(u_1) \cap N_{G(E')}(u_2)| \geq \gamma - 3.$$

若任意的 $u_1, u_2 \in M$, $|N_{G(E')}(u_1) \cap N_{G(E')}(u_2)| = \gamma - 2$, 则与 G 是连通图矛盾. 若任意的 $u_1, u_2 \in M$, $|N_{G(E')}(u_1) \cap N_{G(E')}(u_2)| = \gamma - 3$, 则 $|M| = \gamma - 1$, 与 $|M| \geq \gamma$ 矛盾. 故 M

中的一部分顶点, 其中任何两顶点在 $G(E')$ 中共邻点的个数为 $\gamma - 2$, 另一部分顶点, 其中任何两顶点在 $G(E')$ 中共邻点的个数为 $\gamma - 3$, 且

$$\left| \bigcap_{u \in M} N_{G(E')}(u) \right| = \emptyset, \quad \left| \bigcup_{u \in M} N_{G(E')}(u) \right| = \gamma - 1.$$

M 中的点与 $N - N'$ 中 $m + k - (\gamma + 1)$ 个点在 G 中全相邻, 所以 $N - N'$ 中 $m + k - (\gamma + 1)$ 个点只需用 M 中任意一个点便可控制, 而图 G 的控制数为 γ , 故 N' 中 $\gamma - 1$ 个点需控制 M 中的所有点. 若在 G 中, N' 中存在一点仅与 M 中的一个点相邻, 此时图 G 的控制数为 $\gamma - 1$, 与 $\gamma(G) = \gamma$ 矛盾, 所以在 G 中, N' 中的每个点与 M 中至少两个点相邻. 综上 $G \in \Gamma_m^\gamma$.

再证明充分性. 设 $G \in \Gamma_m^4$, 从而有 $k = 1, 2, 3$, $|E'| = 2m$, 且

$$\begin{aligned} |E(G)| &= m(m+k) - 2m = (m+k-2)m, \\ \text{当 } k=1 \text{ 时, } |E(G)| &= m(m-1) = \lfloor (\frac{n-2}{2})^2 \rfloor \\ \text{当 } k=2 \text{ 时, } |E(G)| &= m^2 = \lfloor (\frac{n-2}{2})^2 \rfloor \\ \text{当 } k=3 \text{ 时, } |E(G)| &= m(m+1) = \lfloor (\frac{n-2}{2})^2 \rfloor \end{aligned}$$

所以 $|E(G)| = \lfloor (\frac{n-2}{2})^2 \rfloor$. 令 $A = \{v_{m+k-2}, v_{m+k-1}, v_{m+k}\}$, 假设 $\gamma(G) = 3$. 为了控制 A 中所有点, 至少需要 3 个控制点, 若这 3 个控制点全在 A 中, 则无法控制 $N - A$ 中的顶点, 所以这 3 个控制点不全在 A 中, 但此时无法控制 M 中的所有顶点, 所以 $\gamma(G) \geq 4$, 又 $\{v_{m+k}, v_{m+k-1}, v_{m+k-2}, u_1\}$ 为 G 的一个控制集, 所以 $\gamma(G) = 4$, $|E(G)| = \lfloor (\frac{n-\gamma+2}{2})^2 \rfloor$.

假设 $\gamma > 4$, 且结论对 $\gamma - 1$ 成立. 令

$$G = (M \cup N, E(G)) \in \Gamma_m^\gamma, \quad G' = (M \cup N', E(G')),$$

其中

$$N' = N - \{v_{m+k}\}, \quad E(G') = (E(G) - \{v_{m+k}u | u \in M\}) \cup \{v_{m+k-1}u | u \in N_G(v_{m+k})\}.$$

于是 $G' \in \Gamma_m^{\gamma-1}$, 由归纳假设知 $|E(G')| = \lfloor (\frac{n-1-(\gamma-1)+2}{2})^2 \rfloor$ 且 $\gamma(G') = \gamma - 1$, 进而有 $|E(G)| = |E(G')| = \lfloor (\frac{n-1-(\gamma-1)+2}{2})^2 \rfloor = \lfloor (\frac{n-\gamma+2}{2})^2 \rfloor$. 令

$$B = \{v_{m+k}, v_{m+k-1}, \dots, v_{m+k-(\gamma-2)}\},$$

假设 $\gamma(G) = \gamma - 1$. 为了控制 B 中所有点, 至少需要 $\gamma - 1$ 个控制点, 若这 $\gamma - 1$ 个控制点全在 B 中, 则无法控制 $N - B$ 中的顶点, 所以这 $\gamma - 1$ 个控制点不全在 B 中, 但此时无法控制 M 中的所有顶点, 因此 $\gamma(G) \geq \gamma - 1$, 又 $\{v_{m+k}, v_{m+k-1}, \dots, v_{m+k-(\gamma-2)}, u_1\}$ 为 G 的一个控制集, 所以当 $G \in \Gamma_m^\gamma$ 且 $\gamma(G) = \gamma$ 时, 有 $|E(G)| = \lfloor (\frac{n-\gamma+2}{2})^2 \rfloor$.

由定理 2.4 和 2.6 的证明易得如下推论:

推论 2.7 设 $G = (M \cup N, E) \cong K_{m, (m+k)} - E'$ 是 n 阶连通二部图, 且 $\gamma(G) = \gamma$, $|E(G)| = \lfloor (\frac{n-\gamma+2}{2})^2 \rfloor$, 则有 $|M| \geq 2(\gamma - 1)$, $\Delta(G) = \lfloor \frac{n-\gamma+2}{2} \rfloor$ 或 $\lceil \frac{n-\gamma+2}{2} \rceil$.

参 考 文 献

- [1] Bondy J A, Murty U S R. Graph theory with applications[M]. New York: American Elsevier, 1976.
- [2] Vizing V G. A bound on the external stability number of a graph[J]. Dokl Akad Nauk SSSR, 1965, 164: 729–731.
- [3] Sanchis L A. Maximum number of edges in connected graphs with a given domination number[J]. Discrete Math, 1991, 87: 65–72.
- [4] Ferneyhough S, Haas R, Hanson D. Star forests, dominating sets and ramsey-type problems[J]. Discrete Math, 2002, 245: 255–262.
- [5] 陈宏宇, 张丽. 给定控制数的连通二部图的最大边数 [J]. 山东大学学报 (理学版), 2012, 47(8): 11–15.
- [6] 高超, 侯新民. 关于“给定控制数的二部图的最大边数”的一点注记 [J]. 山东大学学报 (理学版), 2013, 48(8): 21–23.
- [7] 皮晓明. 关于图的反符号圈控制数 [J]. 数学杂志, 2013, 33(2), 309–312.

**ON THE CHARACTERIZATION OF THE MAXIMAL
CONNECTED BIPARTITE GRAPHS WITH GIVEN DOMINATION
NUMBER**

YU Han , PI Xiao-ming , LIU Huan-ping

(School of Mathematical Sciences, Harbin Normal University, Harbin 150025, China)

Abstract: In this paper, the structure of the maximal connected bipartite graphs with a given domination number are studied. Using classification method and mathematical induction, this paper will assume the domination number is 3 or equal or greater than 4, respectively, and characterize connected bipartite graphs with the maximal size. The main results can be used in the future for studying the maximal connected bipartite graphs with given total domination number.

Keywords: dominating set; domination number; bipartite graph; maximal graph

2010 MR Subject Classification: 05C69; 05C35