

与次不变凸函数有关的拟平衡问题研究

曹玉茹, 郑戟明

(上海对外经贸大学商务信息学院, 上海 201600)

摘要: 本文研究了拟平衡问题解的存在性问题. 利用对 Subinvex 函数在 $\mathbb{R}^l$ 空间上的类变分问题的讨论及凸规划问题与平衡问题的同解性理论, 把次不变凸 (Subinvex) 函数特征由原 $\mathbb{R}^l$ 空间推广到一般拓扑线性空间的平衡问题上, 得到一类称之为拟平衡问题的解的存在性问题相关理论.

关键词: 次不变凸函数; 拟平衡; 拓扑线性空间

MR(2010) 主题分类号: 49J40

中图分类号: O174.13

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2015)06-1487-08

1 引言

平衡理论是非线性分析理论及其应用研究的重要组成部分. 平衡理论在数理经济学、运筹学、力学等方面都有着广泛的应用. 几十年来, 平衡问题的研究有了重要的发展. 文献 [1] 指出优化问题, 非合作对策中的 Nash 平衡问题, 相补问题以及不动点问题, 变分不等式问题都是平衡问题的特例, 并且讨论了将其他问题的某些特征推广到平衡问题中, 近年来, 关于拟平衡问题被提出并研究讨论. 虽然关于这方面的研究还不是很多, 但却推广了早先的一些重要结果.

早在 1981 年, Hanson 就在文 [2] 中针对 η -可微函数提出了不变凸 (invex) 的概念, 到 1997 年, Dutta, Vetrivel 和 Nanda 在文 [3] 中提出了半不变凸 (semi-invex) 的概念. 而针对 η -次可微函数类, Giamnessi 用次不变凸 (subinvex) 的概念代替了半不变凸的概念, 于是就不用再讨论上下半不变凸的概念, 只要将不变凸中的梯度改为次不变凸中的次梯度就可以了. 文 [4] 中作者讨论了有关 subinvex 函数在 $\mathbb{R}^l$ 上的类变分问题, 而我们知道, 平衡与优化, 变分问题有着密切关系, 对某个次可微凸函数 g , 由凸分析的知识知

凸规划问题: 求 $x \in K$ 使得 $g(\bar{x}) = \min\{g(x) | x \in K\}$ 与平衡问题: $x \in K, \xi \in \partial g(\bar{x})$
 $\forall y \in K, f(\bar{x}, y) = \max_{\xi \in \partial g(x)} \langle \xi, y - x \rangle \geq 0$ 是同解的, 其中 K 是实的线性拓扑空间的一个凸子集. 受此启发, 我们将把 subinvex 函数特征推广到一般拓扑向量空间的平衡问题上, 得到一类所谓的拟平衡问题的解, 放宽了替代条件的要求, 为多目标优化问题提供了更广泛的使用范围.

2 预备工作

为了后文的需要, 我们引进一些重要的定义和定理.

*收稿日期: 2013-03-13

接收日期: 2015-02-26

基金项目: 教育部人文社会科学研究项目 (15YJCZH201); 上海市教育委员会科研创新项目基金资助 (14YZ134).

作者简介: 曹玉茹 (1978-), 女, 安徽合肥, 副教授, 主要研究方向: 应用数学与计算机应用技术.

定义 2.1 ^[5] 映射 $F: E \rightarrow 2^E$ 是 KKM 映射, 若对任意有限集 $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq E$ 有

$$\text{co}(x_1, \dots, x_n) \subseteq \bigcup_{i=1}^n F(x_i). \quad (2.1)$$

定理 2.2 (KKM) ^[5] 设 E 是 Housdorff 线性拓扑空间 X 的子集, 映射 $F: E \rightarrow 2^E$ 是 KKM 映射, 若对每个 $x \in X, F(x)$ 是 E 的闭子集, 且至少存在一点 $x_0 \in E$ 使得 $F(x_0)$ 紧, 那么

$$\bigcap_{x \in E} F(x) \neq \emptyset. \quad (2.2)$$

定义 2.3 ^[5] (有限交性质) 设 $\{F_i\}_{i \in I}$ 是 Housdorff 拓扑空间 X 的一个子集簇, I 是指标集, 若对任意有限集 $I_0 \in I$ 有

$$\bigcap_{j \in I_0} F_j \neq \emptyset, \quad (2.3)$$

则称 $\{F_i\}_{i \in I}$ 具有有限交性质.

定理 2.4 ^[5] 拓扑空间 X 是紧集的充要条件是 X 中每个具有有限交性质的闭集簇 $\{F_i\}_{i \in I}$ 有非空的交.

3 与次不变凸函数有关的纯量平衡问题

在文 [4, 8] 中给出了有限维空间 R^l 上的次不变凸的概念, 这里我们将其推广到一般拓扑空间中去, 首先我们给出下面一些定义和引理, 这里 X 是实线性拓扑空间, K 是 X 中的凸子集.

定义 ^[2] 称集合 $K \subset R$ 是关于 η 的不变凸集, 如果存在向量函数 $\eta: R \times R \rightarrow R$ 使得 $\forall xy \in K, \forall \lambda \in [0, 1], y + \lambda\eta(x, y) \in K$.

定义 3.1 $g: K \rightarrow R$ 称为在点 $z \in K$ 关于 $\eta: K \times K \rightarrow K$ 是次不变凸 (subinvex) 的, 若存在 $\xi \in X^*$, 使得 $\forall x \in K$, 有

$$g(x) - g(z) \geq \langle \xi, \eta(x, z) \rangle, \quad (3.1)$$

这样的 ξ 称为 g 在 z 点的 η -次梯度 (subgradient), 且

$$\partial^\eta g(z) := \{\xi \in X^* : g(x) - g(z) \geq \langle \xi, \eta(x, z) \rangle, \forall x \in K\}, \quad (3.2)$$

称为 g 在 z 点的 η -次微分 (subdifferential), 称 $\partial^\eta g: K \rightarrow X^*$ 为函数 $g: K \rightarrow R$ 的 η -次微分映射, 其中 η 关于第一变元是仿射的, 且 $\forall x \in K, \eta(x, x) = 0$.

仿照上面的定义, 我们给出下列定义.

定义 3.2 集值映射 $\partial^\eta g: K \Rightarrow X^*$ 是 η -伪单调 (pseudomonotone) 的, 若 $\forall x, y \in K$ 及 $\forall \varsigma \in \partial^\eta g(x), \forall \xi \in \partial^\eta g(y)$ 有

$$\langle \varsigma, \eta(y, x) \rangle \geq 0 \Rightarrow \langle \xi, \eta(y, x) \rangle \geq 0, \quad (3.3)$$

又称 $\partial^\eta g$ 是弱 η -伪单调 (weakly pseudomonotone) 的, 若 $\forall x, y \in K$ 及 $\forall \varsigma \in \partial^\eta g(x), \exists \xi \in \partial^\eta g(y)$, 有

$$\langle \varsigma, \eta(y, x) \rangle \geq 0 \Rightarrow \langle \xi, \eta(y, x) \rangle \geq 0.$$

定义 3.3 集值映射 $\partial^\eta g : K \Rightarrow X^*$ 是 η - 半连续的 (hemicontinuous) 的, 若 $\forall x, y \in K, \alpha \in [0, 1]$, 映射

$$\alpha \mapsto (\partial^\eta g(x + \alpha(y - x)), \eta(y, x))$$

在 0 处是上半连续的.

注 相应于文 [4] 中的结果, 有若 g 是关于 η 次不变凸的, 则 $\forall z \in X, \partial^\eta g(z)$ 是 X^* 的非空凸子集. 我们知道, 线性化引理在变分不等式的研究中起着重要的作用, 为了讨论关于次不变凸函数的平衡问题, 现在我们建立相应的类线性化引理.

引理 3.4 $K \subset X$ 是凸子集, $\partial^\eta g : K \Rightarrow X^*$, 对下面三条

(1) $x \in K$, 使 $\forall y \in K, \exists t' \in \partial^\eta g(x)$,

$$\langle t', \eta(y, x) \rangle \geq 0;$$

(2) $x \in K$, 使 $\forall y \in K, \exists t'' \in \partial^\eta g(y)$,

$$\langle t'', \eta(y, x) \rangle \geq 0;$$

(3) $x \in K$, 使 $\forall t'' \in \partial^\eta g(y)$,

$$\langle t'', \eta(y, x) \rangle \geq 0$$

对任意 y 成立, 则有

(a) (3) $\Rightarrow$ (2).

(b) 若 $\partial^\eta g$ 是 η - 半连续的, 则 (2) $\Rightarrow$ (1).

(c) 若 $\partial^\eta g$ 是 η - 伪单调的, 则 (1) $\Rightarrow$ (3); 若 $\partial^\eta g$ 是弱 η - 伪单调的, 则 (1) $\Rightarrow$ (2).

证 (a) 显然.

(b) 设 $x \in K$ 使得 (2) 成立, 假设 $\exists y \in K, \forall t' \in \partial^\eta g(x)$ 有

$$\langle t', \eta(y, x) \rangle < 0.$$

令 $x_\alpha = \alpha y + (1 - \alpha)x$, $0 < \alpha < 1$, 则由 $\partial^\eta g$ 的 η - 半连续性得, 对 $0 < \varepsilon < -\langle t', \eta(y, x) \rangle, \exists \eta > 0$, 使得 $\alpha \in (0, \delta)$ 时, 有

$$\langle t, \eta(y, x) \rangle < \langle t', \eta(y, x) \rangle + \varepsilon < 0,$$

$\forall t \in \partial^\eta g(x_\alpha), t' \in \partial^\eta g(x)$ 成立, 又由 η 关于第一变元的仿射性有

$$\eta(x_\alpha, x) = \eta(\alpha y + (1 - \alpha)x, x) = \alpha \eta(y, x) + (1 - \alpha) \eta(x, x) = \alpha \eta(y, x),$$

所以

$$\langle t, \eta(x_\alpha, x) \rangle = \langle t, \alpha \eta(y, x) \rangle < 0,$$

此式与 (2) 矛盾, 从而 (b) 成立.

(c) 由定义显然.

下面给出本节的主要结果.

定理 3.5 令 X 是一个实 Banach 空间, $K \subset X$ 是非空弱紧凸集, $g : K \rightarrow R$, $\eta : K \times K \rightarrow K$, 且 $\eta(x, y)$ 关于第一变元仿射, 关于第二变元上半连续, 且 $\forall x \in K$, $\eta(x, x) = 0$, 若 η -次微分映射 $K \Rightarrow X^*$,

$$\partial^n g := \{\xi \in X^* : \langle \xi, \eta(y, x) \rangle \leq g(y) - g(x)\}$$

是 η -伪单调的且 η -半连续的, 则存在 $\bar{x} \in K$, 使得 $\forall y \in K$ 有

$$f(\bar{x}, y) := \max_{\xi \in \partial^n g(\bar{x})} \langle \xi, \eta(y, \bar{x}) \rangle \geq 0.$$

证 首先定义

$$\begin{aligned} F(y) &= \{x \in K \mid \exists t' \in \partial^n g(x) : \langle t', \eta(y, x) \rangle \geq 0\}, \\ G(y) &= \{x \in K \mid \forall t'' \in \partial^n g(x) : \langle t'', \eta(y, x) \rangle \geq 0\}. \end{aligned}$$

分以下几个步骤来证明:

(1) $\forall \{y_1, \dots, y_n\} \subset K$, 令 $\bar{x} = \sum \mu_i y_i$, $\sum \mu_i = 1$, $\mu_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$. 若 $\bar{x} \notin \bigcup_{i=1}^n F(y_i)$, 则 $\forall \bar{t} \in \partial^n g(\bar{x})$,

$$\langle \bar{t}, \eta(y_i, \bar{x}) \rangle < 0, \quad i = 1, \dots, n$$

成立, 从而 $\sum_{i=1}^n \mu_i \langle \bar{t}, \eta(y_i, \bar{x}) \rangle < 0$.

根据 η 对第一变元的仿射性知

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \bar{t}, \eta(\bar{x}, \bar{x}) \rangle = \langle \bar{t}, \eta(\sum_{i=1}^n \mu_i y_i, \bar{x}) \rangle \\ &= \langle \bar{t}, \sum_{i=1}^n \mu_i \eta(y_i, \bar{x}) \rangle = \sum_{i=1}^n \mu_i \langle \bar{t}, \eta(y_i, \bar{x}) \rangle < 0. \end{aligned}$$

显然矛盾, 因而有 $\text{co}\{y_1, \dots, y_n\} \subseteq \bigcup_{i=1}^n F(y_i)$. 即 F 是一个 KKM 映射.

(2) 由 $\partial^n g$ 的伪单调性知, 对 $\forall y \in K$, 有 $F(y) \subseteq G(y)$ 从而也是一个 KKM 映射.

(3) 由 (2) 得 $\bigcap_{y \in K} F(y) \subseteq \bigcap_{y \in K} G(y)$, 再根据上述的类线性化引理 3.4, 得到

$$\bigcap_{y \in K} F(y) \supseteq \bigcap_{y \in K} G(y),$$

从而得到

$$\bigcap_{y \in K} F(y) = \bigcap_{y \in K} G(y).$$

(4) 对每个 $y \in K$, $G(y)$ 是 K 的闭子集.

事实上, 对每个 $y \in K$ 令 $\{x_\alpha\}$ 是 $G(y)$ 中 ω 收敛到 $\bar{x} \in K$ 的网, 由 $x_\alpha \in G(y)$ 得 $\forall t'' \in \partial^n g(y)$ 有 $\langle t'', \eta(y, x_\alpha) \rangle \geq 0$. 假定对某个 $t'' \in \partial^n g(y)$ 有 $\langle t'', \eta(y, \bar{x}) \rangle < 0$, 则由 $t'' \in X^*$ 及 $\eta(y, \cdot)$ 的上半连续性, $\exists \alpha'$ 使

$$\langle t'', \eta(y, x_{\alpha'}) \rangle < 0, \quad x_{\alpha'} \in \{x_\alpha\},$$

这与 $\{x_\alpha\} \subset G(y)$ 矛盾. 从而对每个 $t'' \in \partial^\eta g(y)$ 有 $\langle t'', \eta(y, \bar{x}) \rangle \geq 0$, 即 $\bar{x} \in G(y)$, 从而 $G(y)$ 是 K 的弱子集.

(5) 由 (4) 知 $G(y)$ 是 K 的弱子集, 而 K 是紧集, 故对每个 $y \in K$ 由 KKM 引理得

$$\bigcap_{y \in K} G(y) \neq \emptyset.$$

由 (3) 得

$$\bigcap_{y \in K} F(y) \neq \emptyset,$$

即 $\forall y \in K, \exists \bar{t} \in \partial^\eta g(\bar{x})$, 使得 $\langle \bar{t}, \eta(y, \bar{x}) \rangle \geq 0$. 即

$$f(\bar{x}, y) = \max_{\bar{t} \in \partial^\eta g(\bar{x})} \langle \bar{t}, \eta(y, \bar{x}) \rangle \geq 0,$$

$\forall y \in K$ 成立, 至此定理证毕.

注 1 若在定理 3.5 中令 $\eta(y, x) = y - x$, 我们从定理的证明过程中发现拟平衡问题转化为次可微函数的平衡问题. 相关定理在文 [6] 中有详细论述, 这里不再阐述.

注 2 关于 K 的弱紧性, 我们通常采用某些强制条件来代替, 对于定理 3.5 中 K 的弱紧性我们可以用下面的强制条件来代替.

定理 3.6 存在一个非空紧集 $K^0 \subset K$ 和一个紧凸集 $B^0 \subset K$ 使对每个 $x \in K \setminus K^0, \exists y \in B^0$ 及 $\xi \in \partial^\eta g(x)$ 使

$$\langle \xi, \eta(y, x) \rangle < 0,$$

定理 3.5 的其它条件不变, 定理的结论照样成立.

证 令 $\{y_1, \dots, y_n\} \subset K, K' := \text{conv}(B^0 \cup \{y_1, \dots, y_n\})$, 由 B^0 的紧性和凸性知 K' 是紧集, 从而在 K' 上满足定理 3.6, 即存在 $x' \in K', \forall y \in K'$,

$$f(x', y) = \max_{\xi \in \partial^\eta g(x')} \langle \xi, \eta(y, x') \rangle \geq 0.$$

即

$$W(y) := \{x \in K^0 | \langle \xi, \eta(y, x) \rangle \geq 0\}, y \in K$$

的任意一个有限子集簇有非空的交, 由 η 关于 x 上半连续及 $\xi \in X^*$ 知 $W(y)$ 是闭集, 因而 $W(y)$ 在 K^0 上有非空的交, 根据有限交性质, 及 K^0 的紧性得 $\exists \bar{x} \in K^0, \xi \in \partial^\eta g(\bar{x})$ 使 $\forall y \in K$, 有

$$\langle \xi, \eta(y, \bar{x}) \rangle \geq 0.$$

即定理 3.5 的结论成立.

注 3 在定理 3.5 中, 若记

$$\begin{aligned} f(\bar{x}, \xi, y) &= \langle \xi, \eta(y, \bar{x}) \rangle, \\ A : K &\Rightarrow \partial^\eta g(\cdot), \end{aligned}$$

则定理中求解的问题就是文 [7] 中给出的关于拟平衡问题的解, 鉴于此, 我们称其为一类拟平衡问题解得存在性.

4 与次不变凸函数有关的向量拟平衡应用推广

若我们用实的拓扑向量空间 Y 代替 R , 且设 Y 中有一个闭、凸、尖锥 P , 考虑集值映射 $F: K \times K \Rightarrow Y$, 此时平衡问题可表述为 $\exists \bar{x} \in K, \forall y \in K$, 有

$$F(x, y) \subsetneq -\text{int}P.$$

首先在 Y 中定义序关系: C 为 Y 中的闭凸尖锥, 则 $\forall x, y \in Y$ 有

$$\begin{aligned} x > y &\Leftrightarrow y - x \notin C, \\ x \geq y &\Leftrightarrow y - x \notin \text{int}C, \\ x \leq y &\Leftrightarrow y - x \in C, \\ x < y &\Leftrightarrow y - x \in \text{int}C. \end{aligned}$$

仿照上节, 相应有

定义 4.1 X 是实的 Banach 空间, K 是 X 的凸子集,

$$\partial^\eta g(x) := \{\xi \in L(X, Y) : g(y) - g(x) \geq \langle \xi, \eta(y, x) \rangle, \forall y \in K\},$$

其中 $L(X, Y)$ 表示 X 到 Y 上的线性算子簇, $g: K \rightarrow Y$, $\eta: K \times K \rightarrow X$ 满足 $\eta(x, x) = 0, \forall x \in K$, 且 η 关于第一变元仿射, 关于第二变元上半连续.

定义 4.2 $\partial^\eta g$ 是 $C_x - \eta$ -伪单调的, 若 $\forall x, y \in K, \forall \zeta \in \partial^\eta g(x), \forall \xi \in \partial^\eta g(y)$, 有

$$\langle \zeta, \eta(y, x) \rangle \notin -\text{int}C(x),$$

从而

$$\langle \xi, \eta(y, x) \rangle \notin -\text{int}C(x),$$

其中 $C: K \Rightarrow Y$ 是一个集值映射, 且 $\forall x \in K, C(x)$ 是闭、凸锥且 $\text{int}C(x) \neq \emptyset$.

定义 4.3 $\partial^\eta g$ 是弱 $C_x - \eta$ -伪单调的, 若 $\forall x, y \in K, \forall \zeta \in \partial^\eta g(x), \exists \xi \in \partial^\eta g(y)$ 有 (a) 式成立.

定义 4.4 $\partial^\eta g: K \rightarrow 2^{L(X, Y)}$ 是 η -半连续的, 若 $\forall x, y \in K, \alpha \in [0, 1]$ 映射

$$\alpha \mapsto \langle \partial^\eta g(x + \alpha(y - x)), \eta(y, x) \rangle$$

在 0 处上半连续.

相应与上一节的类线性化引理, 下面给出推广的向量值情形的类线性化引理.

引理 4.5 $K \subset X$ 是凸子集, $\partial^\eta g: K \rightarrow 2^{L(X, Y)}$ 对于下面的三条

1) $x \in K$, 使 $\forall y \in K, \exists t' \in \partial^\eta g(x)$,

$$\langle t', \eta(y, x) \rangle \notin -\text{int}C(x);$$

2) $x \in K$, 使 $\forall y \in K, \exists t'' \in \partial^\eta g(y)$,

$$\langle t'', \eta(y, x) \rangle \notin -\text{int}C(x);$$

3) $x \in K$, 使 $\forall t'' \in \partial^\eta g(y)$,

$$\langle t'', \eta(y, x) \rangle \notin -\text{int}C(x),$$

$\forall y \in K$ 成立, 则有

(a) (3) $\Rightarrow$ (2).

(b) 若 $\partial^\eta g$ 是 η -上半连续的, 则 (2) $\Rightarrow$ (1).

(c) 若 $\partial^\eta g$ 是 $C_x - \eta$ -上半连续的, 则 (1) $\Rightarrow$ (3); 若 $\partial^\eta g$ 是弱 $C_x - \eta$ -上半连续的, 则 (1) $\Rightarrow$ (2).

证 类似纯量的情形, 故从略.

定义 4.6 $W : K \rightarrow 2^Y$ 定义为

$$W(x) := Y \setminus -\text{int}C(x).$$

$G(W)$ 是 W 的图, 定义为

$$G(W) := \{(x, y) \in X \times Y | y \in W(x), x \in K\}.$$

有了上面的定义及引理, 就得到了定理 3.6 的相应推广定理.

定理 4.7 X, Y 是实的 Banach 空间, 令 K 非空弱紧凸子集, 令 $C : K \rightarrow 2^Y$ 使的对每个 $x \in K, C(x)$ 是真、闭、凸锥且 $\text{int}C(x) \neq \emptyset$, $W : K \rightarrow 2^Y$ 定义为

$$W(x) := Y \setminus -\text{int}C(x),$$

使得 $G(W)$ 在 $X \times Y$ 上是弱闭的.

$$\partial^\eta g : K \rightarrow 2^{L(X, Y)}$$

是 $C_x - \eta$ -伪单调且 η -上半连续的, 则 $\exists \bar{x} \in K$ 使对任意 $y \in K$ 有

$$f(\bar{x}, y) = \langle \partial^\eta g(\bar{x}), \eta(y, \bar{x}) \rangle \not\subseteq -\text{int}C(\bar{x}),$$

其中 $\langle \partial^\eta g(\bar{x}), \eta(y, \bar{x}) \rangle = \{\langle \xi, \eta(y, \bar{x}) \rangle | \xi \in \partial^\eta g(\bar{x})\}$.

证 此定理的证明与定理 3.6 的证明类似, 故从略.

注 对于定理 4.7 中 K 的紧性, 相应的我们也可以给出替代条件如下:

存在非空紧集 $K^0 \subset K$ 和一个紧凸子集 $B^0 \subset K$, 使对每个 $x \in K \setminus K^0$, $\exists y \in B^0$ 使

$$\langle \partial^\eta g(x), \eta(y, x) \rangle \subseteq -\text{int}C(x).$$

证 与前面类似, 故从略.

参 考 文 献

- [1] Eugen Blum, Werner Oettli. From optimization and variational inequilibrium to equilibrium problems[J]. Math. Student, 1992, 63: 123–145.
- [2] Hanson M A. On the sufficiency of Kuhn-Tucker Conditions[J]. Math. Anal. Appl. 1981, 80: 545–550.
- [3] Dutta J, Vetrivel V, Nanda S. Semi-invex functions and their differentials[J]. J. Bulletin Australian Math. Soc., 2000, 19: 387–393.
- [4] Ansari Q H, Yao J C. On nondifferentiable and nonconvex vector optimization problems[J]. Optim. Theory. Appl., 2000, 106: 475–488.
- [5] Fan K. A generalization of Tychonoff's fixed point theorem[J]. Math. Ann., 1961, 87: 305–310.
- [6] Konnov I V, Yao J C. On the generalized vector variational inequality problem[J]. Math. Anal. Appl., 2005, 206: 42–58.
- [7] Fu J Y. Generalized Vector quasi-equilibrium problems[J]. Math. Meth. Oper. Res, 2000, 52: 57–64.
- [8] Yang Y J. Properties of subdifferentials of L_0 -valued functions on randomlocally convex modules[J]. J. Math., 2012, 3: 556–565.

A CLASS OF QUASI-EQUILIBRIUM PROBLEM RELATED TO SUBINVEX FUNCTIONS

CAO Yu-ru, ZHENG Ji-ming

(*School of Business Information, Shanghai University of International Business and Economics,
Shanghai 201620, China*)

Abstract: The problem of quasi-equilibrium problems' solutions is researched in this paper. By discussing of subinvex functions' quasi-variational problem on space R^l and the same solutions theory of convex-programming and equilibrium, we solve the problems of mending the feature of the subinvex function to topological linear space from the original space R^l . The solution of quasi-equilibrium problems is obtained.

Keywords: subinvex function; quasi-equilibrium; topological linear space

2010 MR Subject Classification: 49J40