Vol. 35 (2015)
No. 6

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

一类对称多项式在微分几何中的应用

曹 然, 王宝富

(四川大学数学学院, 四川 成都 610064)

摘 要: 本文研究了卵形面特征刻画. 利用麦克劳林不等式及对称多项式的性质, 获得了一个 A^{n+1} 中的卵形面, 若其任意三个连续高阶仿射平均曲率乘积为常熟, 且 $L_n \neq 0$, 则该卵形面为椭圆的结果. 推广了现有文献关于卵形面的刻画结果.

关键词: 对称多项式; 卵形面; 椭球

MR(2010) **主题分类号:** 53A15 **中图分类号:** O186.12

文献标识码: A **文章编号:** 0255-7797(2015)06-1481-06

1 引言

设 A^{n+1} 是幺模实仿射空间, $x: M \to A^{n+1}$ 是 A^{n+1} 中的仿射超曲面. 关于仿射超曲面的研究一直是仿射微分几何中的研究热点之一, 其中通过 k 阶仿射平均曲率来刻划超曲面 $x(M)$ 的性质受到大家的关注 (参见文献 [1]). $x(M)$ 的 k 阶仿射平均曲率定义如下: 令 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为 $x(M)$ 的仿射主曲率, 则称

$$L_k = \frac{1}{C_n^k} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \cdots \lambda_{i_k}, 1 \leq k \leq n \tag{1.1}$$

为 $x(M)$ 的 k 阶仿射平均曲率. 显然, L_k 是关于 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 的对称函数.

在超曲面中, 有一类特殊的紧致、连通、局部强凸的无边超曲面称为卵形面 (ovaliod). 关于卵形面特征刻划的若干结果很多是通过对 L_k 及其构成的新的函数研究获得的. 这方面研究最早源于 Blaschke 的猜测: 一个 A^3 具有常数标量曲率的卵形面一定是椭球, Schneider 证明了这一猜测, 后被 Kozlowski 和 Simon 推广到 A^{n+1} 中的 Einstein 超曲面. 后继的关于这方面的研究可参见文献 [1–3], 其中用 k 阶仿射平均曲率 L_k 刻画卵形面特征的最简洁结果由李安民 [3] 获得, 他证明了如果 A^{n+1} 中的卵形面的 k 阶平均曲率 $L_k =$ 常数 $(1 \leq k \leq n)$, 则此卵形面一定是椭球. 近期的一些进展可参见文献 [4–6], 特别文献 [4] 证明了:

定理 1.1 (参见文献 [4]) 设 $x: M \to A^{n+1}$ 是一个卵形面, 若 $L_i L_{i+1} = C$, $1 \leq i \leq n-1$ (C 为常数), 且 $L_n \neq 0$, 则 $x(M)$ 是椭球.

很自然的问题是能否对这一结论做进一步推广, 即当 $L_{i_1} \cdots L_{i_r} = C (r \geq 3, 1 \leq i_k \leq n)$ 时, 是否有类似的特征刻划? 本文部分地回答了这一问题, 并得到如下的结论:

主要定理 设 $x: M \to A^{n+1}$ 是一个卵形面, 若在 $x(M)$ 上 $L_n \neq 0$, 对某一 i $(1 \leq i \leq n-2)$, 存在常数 C 满足

$$L_i L_{i+1} L_{i+2} = C,$$

*收稿日期: 2014-02-10 **接收日期:** 2014-04-18

基金项目: 国家自然科学基金项目资 (11171235).

作者简介: 曹然 (1988–), 男, 山西运城, 硕士, 主要研究方向: 微分几何.

则 $x(M)$ 为椭球.

为了证明结论, 我们需要用到以下麦克劳林不等式, 设 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in R^n$, 且 $a_k>0, 1\le k\le n$, 定义

$$S_k(a)=\frac{1}{C_n^k}\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n}a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k}, 1\le k\le n, \tag{1.2}$$

则有

$$[S_l(a)]^{\frac{1}{l}}\ge[S_k(a)]^{\frac{1}{k}}\ \ (k\ge l\ge 1), \tag{1.3}$$

等号当且仅当 $a_k>0, 1\le k\le n$ 两两相等时成立.

本文首先利用不等式 (1.3) 及拉格朗日乘子法, 证明关于一类对称函数的性质, 然后将该性质用到仿射微分几何中关于卵形面的刻划研究, 从而得到主要定理.

2 关于对称函数性质的证明

我们先证明一个简单的情况:

性质 2.1 记 $a=(a_1,a_2,a_3)\in\Omega\subset R^3, \Omega=\{0<k\le a_i\le K, i=1,2,3\}$, k, K 为常数, 若 $S_1(a)S_2(a)S_3(a)=C$, 则存在常数 C_1, 使得以下二式必有一个成立:

$$S_1(a)\ge C_1\ge S_2(a)^{\frac{1}{2}},$$
$$S_2(a)^{\frac{1}{2}}\ge C_1\ge S_3(a)^{\frac{1}{3}}.$$

证 由 (1.3) 式可得 $S_1(a)>S_2(a)^{\frac{1}{2}}>S_3(a)^{\frac{1}{3}}$, 结合条件 $S_1(a)S_2(a)S_3(a)=C$, 有 $S_1(a)\ge C^{\frac{1}{6}}\ge S_3(a)^{\frac{1}{3}}$, 记 $C_1=C^{\frac{1}{6}}$, 于是有 $S_1(a)\ge C_1\ge S_3(a)^{\frac{1}{3}}$.

以下我们用拉格朗日乘子法求 $S_2(a)-C_1^2$ 的极值, 先考虑在 Ω 内部取得极值的情形. 考虑函数

$$F(a_1,a_2,a_3)=(S_2(a)-C_1^2)+\lambda(S_1(a)S_2(a)S_3(a)-C),$$

对 a_1,a_2,a_3 求偏导并令

$$F_{a_1}=\frac{a_2+a_3}{3}+\lambda(\frac{S_2(a)S_3(a)}{3}+S_1(a)\frac{a_2+a_3}{3}S_3(a)+S_1(a)S_2(a)a_2a_3)=0, \tag{2.1}$$
$$F_{a_2}=\frac{a_1+a_3}{3}+\lambda(\frac{S_2(a)S_3(a)}{3}+S_1(a)\frac{a_1+a_3}{3}S_3(a)+S_1(a)S_2(a)a_1a_3)=0, \tag{2.2}$$
$$F_{a_3}=\frac{a_1+a_2}{3}+\lambda(\frac{S_2(a)S_3(a)}{3}+S_1(a)\frac{a_1+a_2}{3}S_3(a)+S_1(a)S_2(a)a_1a_2)=0, \tag{2.3}$$

将以上三式两两相减得到

$$F_{a_1}-F_{a_2}=(a_2-a_1)[\frac{1}{3}+\lambda(\frac{S_1(a)S_3(a)}{3}+S_1(a)S_2(a)a_3)]=0, \tag{2.4}$$
$$F_{a_2}-F_{a_3}=(a_3-a_2)[\frac{1}{3}+\lambda(\frac{S_1(a)S_3(a)}{3}+S_1(a)S_2(a)a_1)]=0, \tag{2.5}$$
$$F_{a_3}-F_{a_1}=(a_1-a_3)[\frac{1}{3}+\lambda(\frac{S_1(a)S_3(a)}{3}+S_1(a)S_2(a)a_2)]=0. \tag{2.6}$$

若 a_1, a_2, a_3 互不相等, 则根据 (2.4), (2.5), (2.6) 式会得到

$$\frac{1}{3}+\lambda(\frac{S_1(a)S_3(a)}{3}+S_1(a)S_2(a)a_i)=0,\quad i=1,2,3,$$

直接计算得到 $a_1=a_2=a_3$, 从而与假设矛盾.

若 a_1, a_2, a_3 中只有 2 个相等, 比如 $a_1\neq a_2=a_3$, 由 (2.4) 式得到

$$\frac{1}{3}+\lambda[\frac{S_1(a)S_3(a)}{3}+S_1(a)S_2(a)a_3]=0,$$

此时有 $\lambda=-\frac{1}{S_1(a)S_3(a)+3S_1(a)S_2(a)a_3}$, 将其代入 (2.1) 式得到

$$\begin{aligned}\frac{a_2+a_3}{3} = & \frac{1}{S_1(a)S_3(a)+3S_1(a)S_2(a)a_3}\{\frac{S_2(a)S_3(a)}{3}+S_1(a)\frac{a_2+a_3}{3}S_3(a)\\ & +S_1(a)S_2(a)a_2a_3\},\end{aligned}$$

化简上式得 $\frac{S_3}{3}=S_1a_3^2$, 将 S_1, S_3 的表达式带入, 同时注意在此情况下 $a_1\neq a_2=a_3$, 化简后得到 $a_2=a_3=0$, 与题设 $a_i>0$ 矛盾.

由此可知函数 $S_2(a)-C_1^2$ 达到极值时, 只能在 $a_1=a_2=a_3$ 取得, 此时 $S_2(a)=a_2^2$, 结合 $S_1(a)S_2(a)S_3(a)=C$ 得到 $a_2=C_1$, 即达到极值时 $S_2(a)=C_1^2$.

由此得到, 不论 $S_2(a)-C_1^2$ 取极大值或极小值, 一定存在常数 C_1 使得

$$S_1(a)\geq C_1\geq S_2(a)^{\frac{1}{2}}$$

或者

$$S_2(a)^{\frac{1}{2}}\geq C_1\geq S_3(a)^{\frac{1}{3}}$$

成立.

如果 $S_2(a)$ 在边界 $\partial\Omega$ 上取得极值, 不妨设取得最大值. 针对点 $a=(a_1,a_2,a_3)$ 在边界上取值的情形, 我们分两类讨论:

(1) a_1, a_2, a_3 取相同的边界值. 此时, a_1, a_2, a_3 均取 K 时 $S_2(a)$ 的值最大. 直接计算可得, $S_1^2(a)=S_2(a)=C_1=C^{\frac{1}{6}}$.

(2) a_1, a_2, a_3 中至少有两个取不同的值. 根据 (1.3) 式, 总有 $S_1^2(a)>S_2(a)$. 另一方面, 由于此时必有 $k<\frac{a_1+a_2+a_2}{3}<K$, 我们总可以在 Ω 的内部找到以三个坐标值皆为 $\frac{a_1+a_2+a_2}{3}$ 的点 p, 在此点我们有 $S_2(p)=S_1^2(p)$, 与假设 $S_2(a)$ 在边界 $\partial\Omega$ 上取最大值矛盾.

综上可知, 结论成立.

以下将性质 2.1 推广到多元对称多项式的情形.

性质 2.2 记 $a=(a_1,\cdots,a_n)\in\Omega\subset R^n, \Omega=\{0<k\leq a_i\leq K, i=1,2\cdots,n\}$, k, K 为常数, 若 $S_1(a)S_2(a)S_3(a)=C$, 则存在常数 C_1 使得以下二式必有一个成立:

$$\begin{aligned}S_1(a)\geq C_1\geq S_2(a)^{\frac{1}{2}},\\ S_2(a)^{\frac{1}{2}}\geq C_1\geq S_3(a)^{\frac{1}{3}}.\end{aligned}$$

证 和性质 2.1 的证明类似, 记 $C_1=C^{\frac{1}{6}}$, 由 (1.2) 式并结合条件可得 $S_1(a)\geq C_1\geq S_3(a)^{\frac{1}{3}}$. 运用拉格朗日乘子法 $S_2(a)-C_1^2$ 的极值, 仍先考虑在 Ω 内部取得极值的情形. 考虑函数:

$$F(a_1,\cdots,a_n)=(S_2(a)-C_1^2)+\lambda(S_1(a)S_2(a)S_3(a)-C),$$

对 $a_1,\cdots,a_n$ 求偏导并令

$$F_{a_i}=\frac{\sum\limits_{1\le k\le n}^{k\neq i}a_k}{C_n^2}+\lambda\{\frac{S_2(a)S_3(a)}{n}+S_1\frac{\sum\limits_{1\le k\le n}^{k\neq i}a_k}{C_n^2}S_3(a)+S_1(a)S_2(a)\frac{\sum\limits_{1\le k<l\le n}^{k,l\neq i}a_ka_l}{C_n^3}\}=0,$$

利用 $F_{a_i}-F_{a_{i+1}}$ 做差的方法可得

$$F_{a_i}-F_{a_{i+1}}=(a_{i+1}-a_i)\{\frac{1}{C_n^2}+\lambda(\frac{S_1(a)S_3(a)}{C_n^2}+\frac{\sum\limits_{1\le k\le n}^{k\neq i,i+1}a_k}{C_n^3}S_1(a)S_2(a))\}=0. \tag{2.7}$$

以下对取极值时极值点 $a_1,\cdots,a_n$ 的多种取值做一个分类研究.

情形 1 $a_1,\cdots,a_n$ 中至少有 3 个元素的值各不相同, 比如 a_i,a_{i+1},a_{i+2} 两两不等.

根据 (2.7) 式, 由于 $a_i\neq a_{i+1}$, 得

$$\frac{1}{C_n^2}+\lambda(\frac{S_1(a)S_3(a)}{C_n^2}+\frac{\sum\limits_{1\le k\le n}^{k\neq i,i+1}a_k}{C_n^3}S_1(a)S_2(a))=0, \tag{2.8}$$

同理由 $F_{a_{i+1}}-F_{a_{i+2}}$ 以及 $a_{i+1}\neq a_{i+2}$ 得

$$\frac{1}{C_n^2}+\lambda(\frac{S_1(a)S_3(a)}{C_n^2}+\frac{\sum\limits_{1\le k\le n}^{k\neq i+1,i+2}a_k}{C_n^3}S_1(a)S_2(a))=0, \tag{2.9}$$

由 (2.8),(2.9) 式可得 $a_i=a_{i+2}$ 与假设矛盾.

情形 2 若 $a_1,\cdots,a_n$ 只取两不同值, 不失一般性设 $a_1=a_2=\cdots\neq a_k=\cdots=a_n$. 根据 (2.8) 式, 由 $F_{a_1}-F_{a_k}$ 和 $a_1\neq a_k$ 得

$$\frac{1}{C_n^2}+\lambda\{\frac{S_1(a)S_3(a)}{C_n^2}+\frac{S_1(a)S_2(a)}{C_n^3}\sum_{2\le i\le n}^{i\neq 1,k}a_i\}=0, \tag{2.10}$$

从 (2.10) 式和 $F_{a_1}=0$ 中消去 λ 得

$$\frac{\sum\limits_{1<l\le n}^{i\neq 1,k}a_ia_l}{C_n^3}S_1(a)=\frac{S_3}{n}+\frac{\sum^{j,l\neq 1}a_ja_l}{C_n^3}S_1(a), \tag{2.11}$$

化简得

$$\frac{S_3(a)}{n}+\frac{a_k\sum^{l\neq 1,k}a_l}{C_n^3}S_1(a)=0, \tag{2.12}$$

由于 $a_i>0,S_i>0$, 上式不可能成立, 从而导致矛盾.

综上所述, 当函数 $S_2(a)-C_1^2$ 达到极值时, 只能在 $a_1=\cdots=a_n$ 时取得, 此时 $S_2(a)=a_n^2$, 结合 $S_1(a)S_2(a)S_3(a)=C$ 得到 $a_n=C_1$, 即达到极值时 $S_2(a)=C_1^2$. 由此得到, 不论 $S_2(a)-C_1^2$ 取极大值或极小值, 一定存在常数 C_1 使得

$$S_1(a)\ge C_1\ge S_2(a)^{\frac{1}{2}}$$

或者

$$S_2(a)^{\frac{1}{2}} \geq C_1 \geq S_3(a)^{\frac{1}{3}}$$

成立.

对边界上的情形与性质 2.1 的讨论类似, 这里不再重复.

类似的方法可以证明:

性质 2.3 记 $a=(a_1,\cdots,a_n)\in\Omega\subset R^n, \Omega=\{0<k\leq a_i\leq K, i=1,2\cdots,n\}$, k, K 为常数, 对 $S_i(a), i=1,2,\cdots,n-2$, 若 $S_i(a)S_{i+1}(a)S_{i+2}(a)=C$, 则存在常数 C_1 使得以下二式必有一个成立:

$$\begin{aligned} S_i(a)^{\frac{1}{i}} \geq &\quad C_1 \quad \geq S_{i+1}(a)^{\frac{1}{i+1}}, \\ S_{i+1}(a)^{\frac{1}{i+1}} \geq &\quad C_1 \quad \geq S_{i+2}(a)^{\frac{1}{i+2}}. \end{aligned}$$

对多个 $S_i(a)$ 的积为常数的情况可以类似证明以下性质:

性质 2.4 记 $a=(a_1,\cdots,a_n)\in\Omega\subset R^n, \Omega=\{0<k\leq a_i\leq K, i=1,2\cdots,n\}$, k, K 为常数, 若 $S_i(a)S_{i+1}(a)S_{i+2}(a)\cdots S_{i+r}(a)=C$, $2\leq r\leq n-i$, 则存在常数 C_1 使得以下二式必有一个成立:

$$\begin{aligned} S_i(a)^{\frac{1}{i}} \geq &\quad C_1 \quad \geq S_{i+1}(a)^{\frac{1}{i+1}}, \\ S_{i+1}(a)^{\frac{1}{i+1}} \geq &\quad C_1 \quad \geq S_{i+r}(a)^{\frac{1}{i+r}}. \end{aligned}$$

3 关于卵形面特征的刻划

为了证明我们的定理, 需要以下几个已有的关于卵形面特征刻划的引理:

引理 3.1 (参见文献 [1]) 设 $x: M\to A^{n+1}$ 是一个卵形面, 则至少存在一点 $x_0\in x(M)$, 使得在 x_0 点的主曲率 $\lambda_i>0, i=1,\cdots,n$.

引理 3.2 (参见文献 [2]) 设 $x: M\to A^{n+1}$ 是一个卵形面, 若对某一 $i(1\leq i\leq n-2)$, 存在常数 C 满足 $L_i^{\frac{1}{i}}\geq C\geq L_{i+1}^{\frac{1}{i+1}}, L_{i+1}>0$, 则 $x(M)$ 是椭球.

主要定理的证明 根据引理 3.1, 由 $L_n\neq 0$, 及连续性性质可知 $L_n>0$ 在 $x(M)$ 上恒成立, 于是有 $\lambda_i>0$ 恒成立. 由 $x(M)$ 的紧致性可知, 存在正数 $k\leq K$ 使得 $0<k\leq\lambda_i\leq K, i=1,2\cdots,n$. 根据条件 $L_iL_{i+1}L_{i+2}=C$, 由对称多项式的性质 2.3, 存在常数 C_1 使得

$$L_i^{\frac{1}{i}} \geq C_1 \geq L_{i+1}^{\frac{1}{i+1}}$$

或

$$L_{i+1}^{\frac{1}{i+1}} \geq C_1 \geq L_{i+2}^{\frac{1}{i+2}}$$

中必有一式在 $x(M)$ 上成立. 最后根据引理 3.2 得到卵形面 $x(M)$ 是椭球.

参 考 文 献

[1] Li Anmin, Simon U, Zhao Guosong. Global affine differential geometry of hypersurfaces[M]. New York: Walter de Gruytrt, 1993.

[2] Hsiung C C, Shahin J K. Affine differential geometry of closed hypersurfaces[A]. Hsiung C C. Selected papers of Chuan-Chih Hsiung [C]. London: World Scientific, 2001: 264–284.

[3] Li Anmin. A characterization of ellipsoids[J]. Results in Mathematics, 1991, 20: 657–659.

[4] Zhu Pengbo, Wang Baofu. Some characterizations of locally strongly convex quadric[J]. J. Sichuan University (Natural Science), 2014, 51(2): 236–239.

[5] Wang Baofu, Sheng Li. A note of hyperovaloid characterization[J]. Chinese Quarterly Journal of Mathematics, 2013, 28(2): 202–205.

[6] Alías L J, Colares A G. A further characterization of ellipsoids[J]. Results in Mathematics, 2005, 48: 1–8.

A CLASS OF SYMMETRIC POLYNOMIAL AND ITS APPLICATIONS ON DIFFERENTIAL GEOMETRY

CAO Ran, WANG Bao-fu

(*College of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China*)

Abstract: In this paper, we study the charachters of ovaloid. By using the Machaurin's inequality and symmetric polynomial, we prove that an ovaloid in A^{n+1} is an ellipsoid if the product of its three random continuous affine mean cervatures is constant and $L_n \neq 0$, which is a generalization of the characterization of ovaloid.

Keywords: symmetric polynomial; ovaloid; ellipsoid

2010 MR Subject Classification: 53A15