Vol. 35 (2015)
No. 6

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

NA 随机变量序列的 Egorov 型强大数律的等价条件

邱德华
(广东财经大学数学与统计学院, 广东 广州 510320)

摘 要: 本文研究了 NA 随机变量的 Egorov 型强大数律. 利用 NA 随机变量的概率不等式, 得到了 NA 随机变量序列的 Egorov 型强大数律的一些等价条件, 所获结果推广和改进了在独立随机变量序列的 Egorov 的结果和在 NA 随机变量序列已有的一些结果.

关键词: NA 随机变量序列; Egorov 型强大数律; 概率不等式
MR(2010) 主题分类号: 60F15 **中图分类号**: O211.4
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2015)06-1445-08

1 引言和引理

NA (negatively associated) 随机变量是二十世纪八十年代初由 Alam 和 Saxena [1], Joag-Dev 和 Proschan [2] 提出的一类重要的相依随机变量.

定义 1 称随机变量 $\{X_i, 1 \le i \le n\}$ 为 NA(negatively associated) 的, 如果对于 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的任意两个不相交的非空子集 A 和 B, 都有

$$\operatorname{Cov}(f_1(X_i, i \in A), f_2(X_j, j \in B)) \le 0,$$

其中 f_1 和 f_2 是任何两个使上述协方差存在的且对每个变元均非降（或均非升）的函数; 称 $\{X_n, n \ge 1\}$ 是 NA 序列, 若对任何自然数 $n \ge 2$, $\{X_i, 1 \le i \le n\}$ 都是 NA 的.

由于 NA 随机变量在可靠性理论, 渗透理论及多元统计分析中有广泛的应用, 对其极限理论的研究有十分重要的意义, 许多学者进行了深入研究, 获得了许多较深刻的结果, 如文 [3–11] 等.

以下记 Ψ_c 为具有如下性质的函数 $\psi(x)$ 的集合: 对每个 $\psi(x)$ 都存在 $x_0 = x_0(\psi) \ge 0$, 在 $x > x_0$ 上 $\psi(x)$ 为递增的正值函数且 $\sum\limits_{n > x_0} \frac{1}{n\psi(n)}$ 收敛.

对独立随机变量序列, Petrov (见文献 [12] 定理 6.17) 得到如下结论.

定理 A 设 $\{X_n, n \ge 1\}$ 是均值为零的独立随机变量序列, 且 $EX_n^2 < \infty$, $B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} EX_k^2 \uparrow \infty$. 记 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$, 则 $\forall\, \psi(x) \in \Psi_c$ 都有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{(B_n \psi(B_n))^{1/2}} = 0 \quad \text{a.s.}.$$

进一步, Egorov 在文 [13] 证明了

*收稿日期: 2013-05-01 接收日期: 2013-06-03
基金项目: 国家自然科学基金资助 (11271161).
作者简介: 邱德华 (1965–), 男, 湖南衡阳, 教授, 主要研究方向: 概率论极限理论.

定理 B 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是均值为零的独立随机变量序列, 且 $EX_n^2 < \infty, B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} EX_k^2 \uparrow \infty$, $\{a_n, n \geq 1\}$ 为单调递增正数列且 $a_n \uparrow \infty$, 如果存在 $n_0 \in N$(自然数集), $\alpha > 0, D > 0$, 满足

$$B_n^{1/2}(\log B_n)^{\alpha} a_n^{-1} \leq D, n > n_0.$$

则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{a_n} = 0 \quad \text{a.s.} \tag{1.1}$$

的充要条件是

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > \varepsilon a_n) < \infty, \forall \varepsilon > 0. \tag{1.2}$$

特别取 $a_n = B_n^{1/2}(\log B_n)^{\alpha}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_n}{B_n^{1/2}(\log B_n)^{\alpha}} = 0 \quad \text{a.s.}$ 成立的充要条件是

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > \varepsilon B_n^{1/2}(\log B_n)^{\alpha}) < \infty, \forall \varepsilon > 0.$$

王岳宝等在文 [4] 中把定理 A 推广到 NA 随机变量序列情形, 刘立新与程士宏于文 [5] 在 $a_n = B_n^{1/2}(\log B_n)^{\alpha}$ 的特殊场合将定理 B 推广到 NA 随机变量情形, 又于文 [6] 中在较一般的条件下将定理 B 推广到 NA 随机变量情形, 得到下面的定理 C 和定理 D, 推广和改进了许多已知的结果.

定理 C 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是均值为零的 NA 随机变量序列, $\{\sigma_n, n \geq 1\}$ 是正常数列满足

$$EX_n^2 \leq \sigma_n^2, \forall n \geq 1, \tag{1.3}$$

以及

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2 \to \infty, \, n \to \infty. \tag{1.4}$$

$\{a_n, n \geq 1\}$ 为单调递增正数列且 $a_n \uparrow \infty$, 及存在子列 $\{n_k, k \geq 1\} \in N$ 和 $C_1 > 1, C_2 > 1$, 满足

$$C_1 a_{n_k} \leq a_{n_{k+1}} \leq C_2 a_{n_k+1}. \tag{1.5}$$

记 $B(k) = \sum\limits_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} \sigma_j^2$, 如果存在 $\beta > 0$, 使得 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{B(k)}{a_{n_{k+1}}^2}\right)^{\beta} < \infty$, 则 (1.1) 式成立的充要条件是 (1.2) 式成立.

定理 D 设 $\{X_n, n \geq 1\}$, $\{\sigma_n, n \geq 1\}$ 如定理 1 所述且满足 (1.3), (1.4) 式. $\{a_n, n \geq 1\}$ 为单调递增正数列且 $a_n \uparrow \infty$. 如果存在 $\beta > 1$, 使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sigma_n^2 B_n^{\beta-1} a_n^{-2\beta} < \infty$, 则 (1.1) 式成立的充要条件是 (1.2) 式成立.

本文受文献 [5] 与文献 [6] 的启发, 进一步推广定理 C 与定理 D, 得到更一般性的结论. 所获结果推广和改进了 Egorov 在独立随机变量序列的结果和在 NA 随机变量序列已有的一些结果.

为证本文结果, 需要如下引理.

引理 1 [7] 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是均值为零的 NA 随机变量. 若存在正数 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ 使得 $EX_k^2 \le \sigma_k^2, k = 1, 2, \cdots, n$. 记 $M_n := \sum\limits_{k=1}^{n} \sigma_k^2$, 则 $\forall x > 0, y_1, y_2, \cdots, y_n > 0$ 和 $y \ge \max\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}, 0 < M_n < \infty$, 都有

$$P(\max_{1\le k\le n} |S_k| \ge x) \le \sum_{k=1}^{n} P(|X_k| > y_k) + 2\exp\left\{1 + \frac{x}{y} - \left(\frac{x}{y} + \frac{M_n}{y^2}\right)\ln\left(1 + \frac{xy}{M_n}\right)\right\}.$$

引理 2 [12] 设 $\{a_n, n \ge 1\}$ 是非负数列, $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k, A_n \to \infty$, 则对任意 $\psi(x) \in \Psi_c$ 都有 $\sum\limits_{n>x_0} \frac{a_n}{A_n\psi(A_n)}$ 收敛.

引理 3 [14] 设 $\{b_n, n \ge 1\}$ 为常数列且 $0 < b_n \nearrow \infty$, 则对任意的 $M > 1$, 存在子列 $\{m_k, k \ge 1\} \subset N$, 使得下式成立 $Mb_{m_k} \le b_{m_{k+1}} \le M^3 b_{m_k+1}$, $k = 1, 2, \cdots$.

以下总用 C 代表与 n 无关的正常数, 在不同的地方可表示不同的值, 即使在同一式中也是如此.

2 主要结果和证明

定理 1 设 $\{X_n, n \ge 1\}$ 是均值为零的 NA 随机变量序列, $g(x)$ 是 R 上非负的偶函数, 在 $(0, +\infty)$ 上取正值且 $x/g(x)$ 和 $g(x)/x^2$ 均在 $(0, +\infty)$ 递减, $\{\sigma_n, n \ge 1\}$ 是正常数列满足 (1.4) 式及

$$Eg(X_n) \le \sigma_n^2, \forall n \ge 1, \tag{2.1}$$

$\{a_n, n \ge 1\}$ 为定理 C 所述的满足 (1.5) 式的正数列. 记 $B(k) = \sum\limits_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} \sigma_j^2$. 如果存在 $\beta > 0$, 使得

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{B(k)}{g(a_{n_{k+1}})}\right)^{\beta} < \infty, \tag{2.2}$$

则 (1.1) 式成立的充要条件是 (1.2) 式成立.

证 必要性直接根据 Mutula [3] 的引理 3 可得.

下证充分性. 由文 [6] 定理 2.1 的证明可知, 要证 (1.1) 式, 只需证下式成立

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_{k+1}}^{-1} \max_{n_k < n \le n_{k+1}} |S_n - S_{n_k}| = 0 \quad \text{a.s.}.$$

由 Borel-Cantelli 引理可知要证上式成立, 只要证

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\left(a_{n_{k+1}}^{-1} \max_{n_k < n \le n_{k+1}} |S_n - S_{n_k}| > \varepsilon\right) < \infty, \ \forall\, \varepsilon > 0. \tag{2.3}$$

由 (1.2) 式可构造数列 $\{b_n, n \ge 1\}$ 满足: $0 < b_n \le 1, b_n \downarrow 0$, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > b_n a_n) < \infty,$$

$\forall\, j > n_1$, 存在 $k \in N$, 使得 $n_k < j \le n_{k+1}$, 令 $c_j = \max\left\{b_{n_k}, \sqrt{\frac{B(k)}{g(a_{n_{k+1}})}}\right\}$, 则由上式得

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > c_n a_n) < \infty, \tag{2.4}$$

由 (2.2) 式及 c_j 的定义可知

$$\lim_{j\to\infty} c_j = 0. \tag{2.5}$$

令

$$\begin{aligned} &Y_j = -c_j a_j I(X_j < -c_j a_j) + X_j I(|X_j| \le c_j a_j) + c_j a_j I(X_j > c_j a_j), \\ &Z_j = X_j - Y_j, n_k < j \le n_{k+1}, k \ge 1. \end{aligned}$$

由于 $EX_j = 0$, 于是要证 (2.3) 式, 只需要证下二式

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\left(a_{n_{k+1}}^{-1} \max_{n_k < n \le n_{k+1}} \left|\sum_{j=n_k+1}^{n} (Y_j - EY_j)\right| > \varepsilon/2\right) < \infty, \forall\, \varepsilon > 0; \tag{2.6}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\left(a_{n_{k+1}}^{-1} \max_{n_k < n \le n_{k+1}} \left|\sum_{j=n_k+1}^{n} (Z_j - EZ_j)\right| > \varepsilon/2\right) < \infty, \forall\, \varepsilon > 0. \tag{2.7}$$

先证 (2.7) 式. 为此先证 $a_{n_{k+1}}^{-1} \sum\limits_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} E|Z_j| \to 0, k \to \infty$. 注意到当 $0 < d \le 1$ 时有 $da_n \le a_n$, 而 $g(x)/x^2$ 在 $(0, +\infty)$ 上递减, 故有 $g(da_n)/(da_n)^2 \ge g(a_n)/a_n^2$, 即

$$g(da_n) \ge d^2 g(a_n). \tag{2.8}$$

因此, 由 $x/g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上递减和 (2.1), (2.2), (2.8), (2.4), (2.5) 式, 有

$$\begin{aligned} & a_{n_{k+1}}^{-1} \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} E|Z_j| \le 2a_{n_{k+1}}^{-1} \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} E|X_j| I(|X_j| > c_j a_j) \\ \le\ & 2a_{n_{k+1}}^{-1} \left\{\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} E|X_j| I(|X_j| > c_j a_{n_{k+1}}) + \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} E|X_j| I(c_j a_j < |X_j| \le c_j a_{n_{k+1}})\right\} \\ \le\ & 2\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} E\frac{c_j g(X_j)}{g(c_j a_{n_{k+1}})} I(|X_j| > c_j a_{n_{k+1}}) + 2\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} c_j P(|X_j| > c_j a_j) \\ \le\ & 2\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} \frac{\sigma_j^2}{c_j g(a_{n_{k+1}})} + 2\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} c_j P(|X_j| > c_j a_j) \\ \le\ & 2\sqrt{\frac{B(k)}{g(a_{n_{k+1}})}} + 2\max\left\{b_{n_k}, \sqrt{\frac{B(k)}{g(a_{n_{k+1}})}}\right\} \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} P(|X_j| > c_j a_j) \to 0, k \to \infty, \end{aligned}$$

从而 $\forall\,\varepsilon>0$, 由 (2.4) 式有

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty} P\left(a_{n_{k+1}}^{-1}\max_{n_k<n\le n_{k+1}}\left|\sum_{j=n_k+1}^{n}(Z_j-EZ_j)\right|>\varepsilon/2\right)\\
\le\ & C+\sum_{k=1}^{\infty} P\left(a_{n_{k+1}}^{-1}\max_{n_k<n\le n_{k+1}}\left|\sum_{j=n_k+1}^{n}Z_j\right|>\varepsilon/4\right)\\
\le\ & C+\sum_{k=1}^{\infty} P\left(a_{n_{k+1}}^{-1}\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}}|Z_j|>\varepsilon/4\right)\\
\le\ & C+\sum_{k=1}^{\infty} P\left(\cup_{j=n_k+1}^{n_{k+1}}(|Z_j|\neq 0)\right)\\
\le\ & C+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} P\left(|X_j|>c_ja_j\right)\\
=\ & C+\sum_{k=n_1+1}^{\infty} P\left(|X_k|>c_ka_k\right)<\infty.
\end{aligned}$$

因此 (2.7) 式成立.

再证 (2.6) 式. 由 $x/g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递减可知, $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格递增, 再由 (2.1), (2.5) 和 (2.8) 式及 $g(x)/x^2$ 在 $(0,+\infty)$ 上递减可得, 当 k 充分大时, $\forall n_k<j\le n_{k+1}$, 都有

$$\begin{aligned}
&E(Y_j-EY_j)^2\le EY_j^2\\
=\ & EX_j^2I(|X_j|\le c_ja_j)+(c_ja_j)^2EI(|X_j|>c_ja_j)\\
\le\ & \frac{(c_ja_j)^2Eg(X_j)}{g(c_ja_j)}\le\frac{(c_ja_{n_{k+1}})^2\sigma_j^2}{g(c_ja_{n_{k+1}})}\le\frac{a_{n_{k+1}}^2\sigma_j^2}{g(a_{n_{k+1}})}.
\end{aligned}$$

由 NA 随机变量的性质 (文 [2]) 知 $\{Y_n-EY_n,n\ge 1\}$ 是 NA 随机变量序列, 由引理 1 并注意到

$$M(k)=\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}}\frac{a_{n_{k+1}}^2\sigma_j^2}{g(a_{n_{k+1}})}=a_{n_{k+1}}^2B(k)/g(a_{n_{k+1}}),$$

于是对 $\forall\,\varepsilon>0$, 令 $x=2\beta\varepsilon a_{n_{k+1}},y=2\varepsilon a_{n_{k+1}},y_j=2\varepsilon a_j,j=n_k+1,n_k+2,\cdots,n_{k+1}$, 由 (2.5) 式, 对 $\forall\,\varepsilon>0$, 当 k 充分大时, 有

$$\begin{aligned}
&P\left(\max_{n_k<n\le n_{k+1}}\left|\sum_{j=n_k+1}^{n}(Y_j-EY_j)\right|\ge 2\beta\varepsilon a_{n_{k+1}}\right)\\
\le\ & 2\exp\left\{1+\beta-\left(\beta+\frac{B(k)}{4\varepsilon^2g(a_{n_{k+1}})}\right)\ln\left(1+\frac{4\beta\varepsilon^2g(a_{n_{k+1}})}{B(k)}\right)\right\}\\
\le\ & C\exp\left\{-\beta\ln\left(1+\frac{4\beta\varepsilon^2g(a_{n_{k+1}})}{B(k)}\right)\right\}\\
\le\ & C\left(\frac{B(k)}{g(a_{n_{k+1}})}\right)^{\beta}.
\end{aligned}$$

从而由上式及 (2.2) 式可得 (2.6) 式成立, 从而 (2.3) 式成立.

注 1 令 $g(x)=x^2$, 则由定理 1 可得定理 C. 但定理 1 比定理 C 条件要弱. 例如:

设 $1<p<2,\{X,X_n,n\geq 1\}$ 是同分布的 NA 随机变量序列, 其密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{D}{|x|^{p+1}(\ln|x|)^p}, & x\in(-\infty,-4]\cup[4,+\infty),\\ 0, & x\in(-4,4),\end{cases}$$

其中 $D=1/\left(2\int_4^{\infty}\left(x^{p+1}(\ln x)^p\right)^{-1}dx\right)$. 故

$$EX_n=0,E|X_n|^p=2D(\ln 4)^{1-p}/(p-1).$$

取 $g(x)=|x|^p,a_n=n,\sigma_n^2=E|X_n|^p,n_k=2^k,\beta=1$. 则定理 1 条件满足. 但 $EX_n^2=+\infty$, 因此, 定理 C 条件 (1.3) 式不成立.

推论 1 设 $\{X_n,n\geq 1\}$, 函数 $g(x)$ 和数列 $\{\sigma_n,n\geq 1\}$ 如定理 1 所述且满足 (1.4), (2.1) 式. $\{a_n,n\geq 1\}$ 为单调递增正数列且 $a_n\uparrow\infty$, 若存在 $\beta>1$ 满足

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_n^2B_n^{\beta-1}\left(g(a_n)\right)^{-\beta}<\infty, \tag{2.9}$$

则 (1.1) 式成立的充要条件是 (1.2) 式成立, 其中 $B_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\sigma_k^2$, 下同.

证 类似文 [6] 定理 2.2(即上定理 D) 的证明可知存在子列 $\{n_k,k\geq 1\}\in N$ 和 $C_1>1$, $C_2>1$, 使 (1.5) 式和 (2.2) 式成立, 从而由定理 1 知推论 1 成立.

注 2 i) 令 $g(x)=x^2$, 我们由推论 1 可得定理 D.

ii) 在定理 1 与推论 1 的其它条件都满足的条件下, (2.2) 式严格弱于 (2.9) 式. 例如: 设 $\{X_n,n\geq 1\}$ 是同分布的 NA 序列, $1\leq p\leq 2,g(x)=|x|^p$, 对一切 n,

$$Eg(X_n)=E|X_n|^p=1=\sigma_n^2.$$

当 $1\leq n\leq 8$ 时, 令 $a_n=1$, 当 $n\geq 9$ 时, 令 $a_n=(n\ln\ln n)^{1/p}$. 则 $\forall\,\beta>1$, 都有

$$\sum_{n=9}^{\infty}\sigma_n^2B_n^{\beta-1}\left(g(a_n)\right)^{-\beta}=\sum_{n=9}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\ln\ln n}\right)^{\beta}=+\infty.$$

即 (2.9) 式不成立.

下面证明 (2.2) 式成立. 对于 $\{a_n,n\geq 1\}$ 的子列 $\{b_k=3^{3^k}\ln\ln 3^{3^k},k\geq 1\}$, 根据引理 3, 对任意的 $M>1$, 存在子列 $\{m_l,l\geq 1\}$ 满足

$$Mb_{m_l}\leq b_{m_{l+1}}\leq M^3b_{m_l+1},l=1,2,\cdots,$$

即对于子列 $\{3^{3^{m_l}},l\geq 1\}\subset N$, 有

$$M3^{3^{m_l}}\ln\ln 3^{3^{m_l}}\leq 3^{3^{m_{l+1}}}\ln\ln 3^{3^{m_{l+1}}}\leq M^3 3^{3^{m_l+1}}\ln\ln 3^{3^{m_l+1}},l=1,2,\cdots,$$

因此 (1.5) 式成立. 此时 $\forall\,\beta>1$, 有

$$\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{\sum_{j=3^{3^{m_l}}+1}^{3^{3^{m_{l+1}}}}1}{g(a_{3^{3^{m_{l+1}}}})}\right)^{\beta}<\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{1}{m_{l+1}\ln 3}\right)^{\beta}\le\sum_{l=1}^{\infty}C\left(\frac{1}{m_{l+1}}\right)^{\beta}\le C\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{1}{l}\right)^{\beta}<\infty,$$

因此 (2.2) 式成立.

推论 2 设 $\{X_n,n\ge 1\}$, 函数 $g(x)$ 和数列 $\{\sigma_n,n\ge 1\}$ 如定理 1 所述且满足 (1.4), (2.1) 式, 存在 $\beta>1$ 使 $(\psi(x))^{\beta}\in\Psi_c$. $\{a_n,n\ge 1\}$ 为单调递增正数列且 $a_n\uparrow\infty$, 存在 $n_0\in N,D>0$ 满足

$$g^{-1}(B_n\psi(B_n))a_n^{-1}\le D,n\ge n_0, \tag{2.10}$$

则 (1.1) 式成立的充要条件是 (1.2) 式成立, 其中 g^{-1} 是函数 $g(x)$ 的反函数.

证 不失一般性, 不妨设 $n_0=1,D=1$. 由 $x/g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递减可知, $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格递增, 因此 g^{-1} 在 $x>0$ 存在, 由 (2.10) 式和引理 2 可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_n^2B_n^{\beta-1}}{(g(a_n))^{\beta}}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_n^2B_n^{\beta-1}}{(B_n\psi(B_n))^{\beta}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_n^2}{B_n(\psi(B_n))^{\beta}}<\infty.$$

再由推论 1 可知推论 2 成立.

注 3 (i) 令 $g(x)=x^2,\psi(x)=(\log x)^{2\alpha},\alpha>0$, 就把独立随机变量情型的定理 B 推广到 NA 随机变量情形.

(ii) 令 $g(x)=x^2,\psi(x)=(\log x)^{\alpha},\alpha>0,a_n=(B_n\log^{\alpha}B_n)^{1/2}$, 由推论 2 我们就得到文 [5] 的主要结果定理 2.1.

参 考 文 献

[1] Alam K, Saxena K M L. Positive dependence in multivariate distribution[J]. Comm Statist, 1981, 10A(3): 1183–1196.

[2] Joag-Dev K, Proschan F. Negative association of random variables with application[J]. Ann Statist, 1983, 11: 286–295.

[3] Matula P. A note on the almost sure convergence of sums of negative dependent random variables[J]. Stati. Prob. Lett., 1992, 15: 209–213.

[4] 王岳宝, 周斌, 苏淳. 关于 NA 列部分和上升的阶 [J]. 应用概率统计, 1998, 14(2): 213–219.

[5] Liu Lixin, Cheng Shihong. On sufficient and necessary condition of a strong law of large numbers for negatively associated random variables [J]. Chinese Journal of Applied Probability and Statistics, 2008, 24(4):399–406.

[6] 刘立新, 程士宏. 具有不同分布 NA 随机变量列的强大数律及应用 [J]. 数学学报, 2008, 51(2): 275–280.

[7] 刘立新, 吴荣. NA 随机变量序列的最大部分和不等式及有界重对数律 [J]. 数学学报, 2002, 45(5):969–978.

[8] 邱德华, 杨向群. 同分布的 NA 序列加权和的强大数律 [J]. 数学研究与评论, 2006, 26(4): 778–784.

[9] 邱德华, 甘师信. NA 随机变量序列的 Hájek-Rènyi 不等式 [J]. 数学杂志, 2005, 25(5): 553–557.

[10] 邱德华, 甘师信. 行为 NA 的随机变量阵列加权和的完全收敛性 (II)[J]. 应用数学, 2006, 19(20): 225–230.

[11] 邱德华. 行为 NA 的随机变量阵列的完全收敛性 [J]. 数学杂志, 2013, 33(1): 138–146.

[12] Petrov V V. Limit theorems of probability theory: Sequences of independent random variables[M]. Oxford: Clarendon Press, 1995.

[13] Egorov V A. On the strong law of large numbers and the law of the iterated logarithm for sequences of independent random variables[J]. Theory Probability Appl., 1970, 15: 509–514.

[14] Wittmann R. A general law of iterated logarithm [J]. Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 1985, 68:521–543.

ON EQUIVALENT CONDITIONS OF THE EGOROV TYPE STRONG LAW OF LARGE NUMBERS FOR NA RANDOM VARIABLES

QIU De-hua

(*School of Mathematics and Statistics, Guangdong University of Finance and Economics, Guangzhou 510320, China*)

Abstract: In this paper, the Egorov type strong law of large numbers for NA random variables is studied. By using probability inequality of NA random variables, we obtain equivalent conditions of the Egorov type strong law of large numbers for NA random variables, which generalize and improve the Egorov's results for independent random variables and the related known works in the literature for NA random variables.

Keywords: NA random variables; Egorov type strong law of large numbers; Probability inequality

2010 MR Subject Classification: 60F15