

多参数双分数布朗运动相遇局部时的存在性和联合连续性

徐 锐, 祝东进, 申广君

(安徽师范大学数学计算机科学学院, 安徽 芜湖 241003)

摘 要: 本文研究了两个相互独立的 (N, d) 双分数布朗运动 B^{H_1, K_1} 和 B^{H_2, K_2} 的相遇局部时的问题. 利用 Fourier 分析, 获得了相遇局部时的存在性和联合连续性的结果, 推广了分数布朗运动相遇局部时的相关结果.

关键词: 双分数布朗运动; 相遇局部时; 强局部 φ -非确定性; 联合连续性

MR(2010) 主题分类号: 60G15; 60G17; 60G18

中图分类号: O211.6

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2015)05-1411-13

1 引言

作为具有自相似性和长相依性的分数布朗运动近年来备受人们的关注, 它在很多带有随机性的模型中可以作为一个合适的扰动项. 然而在对分数布朗运动充分研究的基础上, 一些著名学者建议使用更一般的自相似随机过程作为随机模型的扰动项. 作为分数布朗运动的推广, Houdré-Villa^[1] 首次给出了双分数布朗运动的概念并研究了它的一些性质. 双分数布朗运动 $B^{H, K} = \{B_t^{H, K}, t \geq 0\}$, $H \in (0, 1)$, $K \in (0, 1]$ 是一个中心的自相似的高斯过程, 其协方差函数为

$$\mathbb{E}[B_t^{H, K} B_s^{H, K}] = \frac{1}{2^K} [(|t|^{2H} + |s|^{2H})^K - |t - s|^{2HK}], \quad s, t \geq 0. \quad (1.1)$$

记 $B_0^{H, K} = 0$. 注意到, 当 $K = 1$ 时, 双分数布朗运动是分数布朗运动, 它具有分数布朗运动的一些性质 (例如, 自相似性和 Hölder 连续性), 然而它的增量不是平稳的. 关于双分数布朗运动的研究可参见 Chen^[2], Luan^[3], Tudor-Xiao^[4], Wang^[5] 等文献.

由于 Varadhan^[6] 的工作, 关于随机过程的局部时问题的研究已经变成一个重要的研究课题, Jiang-Wang^[7], Wu-Xiao^[8] 分别研究了分数布朗运动的相遇局部时与相交局部时, Jiang-Wang^[9], Yan 等^[10], Shen-Yan^[11] 等分别研究了两个相互独立的一维双分数布朗运动的相遇局部时的光滑性, Xiao^[12] 和 Wu-Xiao^[13] 研究了各向异性的高斯随机场上的局部时. 受上述文献的启发, 本文主要研究了两个相互独立的多参数双分数布朗运动的相遇局部时的存在性与联合连续性. 下面介绍多参数双分数布朗运动的定义.

*收稿日期: 2013-07-27

接收日期: 2013-09-06

基金项目: 国家自然科学基金 (11271020); 安徽省哲学社会科学规划项目 (AHSK11-12D128); 安徽省自然科学基金 (1208085MA11); 安徽省教育厅重大项目 (KJ2012ZD01); 安徽省教育厅重点项目 (KJ2011A139).

作者简介: 徐锐 (1985-), 男, 安徽芜湖, 硕士, 主要研究方向: 随机过程.

通讯作者: 申广君.

任意给定向量 $H = (H_1, \dots, H_N) \in (0, 1)^N$, $K = (K_1, \dots, K_N) \in (0, 1]^N$, 如果实值中心高斯随机场 $B_0^{H,K} = \{B_0^{H,K}(t), t \in \mathbb{R}_+^N\}$ 的协方差函数为

$$\mathbb{E}\left(B_0^{H,K}(t)B_0^{H,K}(s)\right) = \prod_{j=1}^N \frac{1}{2^{K_j}} \left[\left(s_j^{2H_j} + t_j^{2H_j}\right)^{K_j} - |t_j - s_j|^{2H_j K_j} \right], \quad s, t \in \mathbb{R}_+^N, \quad (1.2)$$

则称 $B_0^{H,K}$ 是指数为 H, K 的 $(N, 1)$ 双分数布朗运动. 在 (1.2) 中 $B_0^{H,K}$ 是各向异性的高斯随机场, 且对任意的 $t \in \partial\mathbb{R}_+^N$, 有 $B_0^{H,K}(0) = 0$, 这里的 $\partial\mathbb{R}_+^N$ 是 $\mathbb{R}_+^N$ 的边界.

设 $B_1^{H,K}, \dots, B_d^{H,K}$ 是相互独立的, 且与 $B_0^{H,K}$ 同分布, 则 $B^{H,K} = \{B^{H,K}(t), t \in \mathbb{R}_+^N\}$ 是取值于 $\mathbb{R}^d$ 上的高斯随机场, 且

$$B^{H,K}(t) = (B_1^{H,K}(t), \dots, B_d^{H,K}(t)), \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^N, \quad (1.3)$$

此时称 $B^{H,K}$ 以指标为 H, K 的 (N, d) -双分数布朗运动, 且 $B^{H,K}$ 是算子自相似过程. 即对任意的常数 $c > 0$,

$$\{B^{H,K}(c^A t) \mid t \in \mathbb{R}^N\} \stackrel{d}{=} \{c^N B^{H,K}(t) \mid t \in \mathbb{R}^N\}, \quad (1.4)$$

其中 $A = (a_{ij})$ 是 $N \times N$ 对角矩阵, 且 $a_{ii} = \frac{1}{H_i K_i}$, $1 \leq i \leq N$. 当 $i \neq j$ 时, $a_{ij} = 0$, $X \stackrel{d}{=} Y$ 表示两过程具有相同的有限维分布. 当 $N = 1, d = 1$ 时, $B^{H,K}$ 是指标为 H, K 的一维双分数布朗运动.

本文中的 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 和 $|\cdot|$ 表示在欧氏空间 $\mathbb{R}^p$ 上的内积和范数. 任意的正整数 p , λ_p 表示 $\mathbb{R}^p$ 上的 Lebesgue 测度, $c_{i,j} > 0$ 为有限的正常数.

2 主要引理

为了本文研究的需要, 本节主要介绍并给出一些引理.

令 $I = [\varepsilon, 1]^N$, $0 < \varepsilon < 1$, 则 I 是 $\mathbb{R}_+^N$ 的闭子区间. 定义随机过程

$$X_0(t) = B_0^{H_1, K_1}(t) - B_0^{H_2, K_2}(t) \quad t \in I, \quad (2.1)$$

其中 $H_i = (H_{i,1}, \dots, H_{i,N})$, $K_i = (K_{i,1}, \dots, K_{i,N})$, $i = \{1, 2\}$, 且记

$$\sigma^2(t, s) = \mathbb{E}[X_0(t) - X_0(s)]^2 \quad t, s \in I. \quad (2.2)$$

引理 2.1 ^[4] 对于任意的 $\varepsilon > 0$, $H = (H_1, \dots, H_N) \in (0, 1)^N$ 和 $K = (K_1, \dots, K_N) \in (0, 1]^N$, 则存在有限的正常数 $c_{2,1}$ 和 $c_{2,2}$, 对任意的 $s, t \in I$, 有

$$c_{2,1} \sum_{\ell=1}^N |s_\ell - t_\ell|^{2H_\ell K_\ell} \leq \mathbb{E} \left[\left(B_0^{H,K}(s) - B_0^{H,K}(t) \right)^2 \right] \leq c_{2,2} \sum_{\ell=1}^N |s_\ell - t_\ell|^{2H_\ell K_\ell}, \quad (2.3)$$

和

$$c_{2,1} \sum_{\ell=1}^N |s_\ell - t_\ell|^{2H_\ell K_\ell} \leq \det \text{Cov} \left(B_0^{H,K}(s), B_0^{H,K}(t) \right) \leq c_{2,2} \sum_{\ell=1}^N |s_\ell - t_\ell|^{2H_\ell K_\ell}. \quad (2.4)$$

引理 2.2 ^[4] 实值双分数布朗运动 $B_0^{H,K} = \{B_0^{H,K}(t), t \in \mathbb{R}_+^N\}$ 在 $I = [\varepsilon, 1]^N$ 上满足强局部 φ -非确定性的, 即存在仅与 H, K, N, ε 有关的有限正常数 $c_{2,3}$, 使得对任意整数 $n > 1$ 和 $u, t^1, \dots, t^n \in I$, 有下面的式子成立

$$\text{Var}(B_0^{H,K}(u) | B_0^{H,K}(t^1), \dots, B_0^{H,K}(t^n)) \geq c_{2,3} \sum_{\ell=1}^N \min_{0 \leq k \leq n} |u_\ell - t_\ell^k|^{2H_\ell K_\ell}, \quad (2.5)$$

其中 $t^0 = 0$.

引理 2.3 令 $X_0 = \{X_0(t), t \in \mathbb{R}^N\}$ 是指标为 H_1, K_1, H_2, K_2 的实值高斯随机场 (见公式 (2.1)), 则它具有下面的性质:

(i) 存在仅与 $H_1, K_1, H_2, K_2, N, \varepsilon$ 有关的正常数 $c_{2,4}$ 和 $c_{2,5}$, 使得对任意 $s, t \in I$ 有

$$c_{2,4} \sum_{\ell=1}^N |t_\ell - s_\ell|^{2H_\ell K_\ell} \leq \sigma^2(t, s) \leq c_{2,5} \sum_{\ell=1}^N |t_\ell - s_\ell|^{2H_\ell K_\ell}, \quad (2.6)$$

其中 $H_\ell K_\ell = \min\{H_{1,\ell}K_{1,\ell}, H_{2,\ell}K_{2,\ell}\}$, $\ell = 1, \dots, N$. 在本文中, 假定 $H_1K_1 \leq H_2K_2 \leq \dots \leq H_NK_N$.

(ii) 存在一仅与 $H_1, K_1, H_2, K_2, N, \varepsilon$ 有关的有限正常数 $c_{2,6}$, 对任意的整数 $n > 1$ 和 $u, t^1, \dots, t^n \in I$, 有下面的式子成立

$$\text{Var}(X_0^{H,K}(u) | X_0^{H,K}(t^1), \dots, X_0^{H,K}(t^n)) \geq c_{2,6} \sum_{\ell=1}^N \min_{0 \leq k \leq n} |u_\ell - t_\ell^k|^{2H_\ell K_\ell}, \quad (2.7)$$

其中 $t^0 = 0$.

证 (i) 由于 $B_0^{H_1, K_1}$ 和 $B_0^{H_2, K_2}$ 是相互独立的, 则对任意的 $s, t \in I$

$$\begin{aligned} \sigma^2(t, s) &= \mathbb{E}[(X_0(t) - X_0(s))^2] \\ &= \mathbb{E}[B_0^{H_1, K_1}(t) - B_0^{H_2, K_2}(t) - B_0^{H_1, K_1}(s) + B_0^{H_2, K_2}(s)]^2 \\ &= \mathbb{E}[B_0^{H_1, K_1}(t) - B_0^{H_2, K_2}(s)]^2 + \mathbb{E}[B_0^{H_1, K_1}(t) - B_0^{H_2, K_2}(s)]^2. \end{aligned} \quad (2.8)$$

根据引理 2.1, 存在依赖于 $H_1, K_1, H_2, K_2, N, \varepsilon$ 有限正常数 $c_{2,7}$ 和 $c_{2,8}$, 使得

$$c_{2,7} \left(\sum_{i=1}^2 \sum_{\ell=1}^N |s_\ell - t_\ell|^{2H_{i,\ell}K_{i,\ell}} \right) \leq \sigma^2(t, s) \leq c_{2,8} \left(\sum_{i=1}^2 \sum_{\ell=1}^N |s_\ell - t_\ell|^{2H_{i,\ell}K_{i,\ell}} \right). \quad (2.9)$$

记 $H_\ell K_\ell = \min\{H_{1,\ell}K_{1,\ell}, H_{2,\ell}K_{2,\ell}\}$, $\ell = 1, \dots, N$, 可得

$$\sum_{\ell=1}^N |t_\ell - s_\ell|^{2H_\ell K_\ell} \leq \sum_{\ell=1}^N |t_\ell - s_\ell|^{2H_{1,\ell}K_{1,\ell}} + \sum_{\ell=1}^N |t_\ell - s_\ell|^{2H_{2,\ell}K_{2,\ell}} \leq 2 \sum_{\ell=1}^N |t_\ell - s_\ell|^{2H_\ell K_\ell}. \quad (2.10)$$

(ii) 由于 $B_0^{H_1, K_1}$ 和 $B_0^{H_2, K_2}$ 是相互独立的以及条件方差定义可知

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(X_0(u)|X_0(t^1), \dots, X_0(t^n)) &= \inf_{a_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n} \mathbb{E} \left[\left(x_0(u) - \sum_{i=1}^n a_i X_0(t^i) \right)^2 \right] \\
 &= \inf_{a_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n} \left\{ \mathbb{E} \left[\left(B_0^{H_1, K_1}(u) - \sum_{i=1}^n a_i B_0^{H_1, K_1}(t^i) \right)^2 \right] \right. \\
 &\quad \left. + \mathbb{E} \left[\left(B_0^{H_2, K_2}(u) - \sum_{i=1}^n a_i B_0^{H_2, K_2}(t^i) \right)^2 \right] \right\} \\
 &\geq \inf_{a_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n} \mathbb{E} \left[\left(B_0^{H_1, K_1}(u) - \sum_{i=1}^n a_i B_0^{H_1, K_1}(t^i) \right)^2 \right] \\
 &\quad + \inf_{b_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n} \mathbb{E} \left[\left(B_0^{H_2, K_2}(u) - \sum_{i=1}^n b_i B_0^{H_2, K_2}(t^i) \right)^2 \right] \\
 &= \text{Var}(B_0^{H_1, K_1}(u)|B_0^{H_1, K_1}(t^1), \dots, B_0^{H_1, K_1}(t^n)) \\
 &\quad + \text{Var}(B_0^{H_2, K_2}(u)|B_0^{H_2, K_2}(t^1), \dots, B_0^{H_2, K_2}(t^n)) \\
 &\geq c_{2.3} \left(\sum_{\ell=1}^N \min_{0 \leq k \leq n} |u_\ell - t_\ell^k|^{2H_{1,\ell}K_{1,\ell}} + \sum_{\ell=1}^N \min_{0 \leq k \leq n} |u_\ell - t_\ell^k|^{2H_{2,\ell}K_{2,\ell}} \right).
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

由引理 2.2 和 (2.10) 式可得性质 (ii). 即证明了 (2.1) 式中的高斯随机场 $X_0(t)$ 分别满足 Xiao^[12] 中的条件 (C1) 和 (C3).

结合引理 2.3 和

$$\det \text{Cov}(Z_1, \dots, Z_n) = \text{Var}(Z_1) \prod_{k=2}^n \text{Var}(Z_k|Z_1, \dots, Z_{k-1}), \tag{2.12}$$

其中 $(Z_1, \dots, Z_n)$ 为任意的高斯随机向量. 则对任意的 $t^1, \dots, t^n \in \mathbb{R}^N$ 有

$$\begin{aligned}
 &\det \text{Cov}(X_0(t^1), \dots, X_0(t^n)) \\
 &\geq \prod_{j=1}^n [\text{Var}(B_0^{H_1, K_1}(t^j)|B_0^{H_1, K_1}(t^1), \dots, B_0^{H_1, K_1}(t^{j-1})) \\
 &\quad + \text{Var}(B_0^{H_2, K_2}(t^j)|B_0^{H_2, K_2}(t^1), \dots, B_0^{H_2, K_2}(t^{j-1}))] \\
 &\geq c_{2.9}^n \prod_{j=1}^n \left(\sum_{\ell=1}^N \min_{0 \leq k \leq j-1} |t_\ell^j - t_\ell^k|^{2H_{1,\ell}K_{1,\ell}} + \sum_{\ell=1}^N \min_{0 \leq k \leq j-1} |t_\ell^j - t_\ell^k|^{2H_{2,\ell}K_{2,\ell}} \right) \\
 &\geq c_{2.10}^n \prod_{j=1}^n \left(\sum_{\ell=1}^N \min_{0 \leq k \leq j-1} |t_\ell^j - t_\ell^k|^{2H_\ell K_\ell} \right).
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

引理 2.4 ^[8] 设 β, γ , 和 p 都是有限正常数, 则对任意 $A \in (0, 1)$,

$$\int_0^1 \frac{r^{p-1}}{(A + r^\gamma)^\beta} dr \asymp \begin{cases} A^{\frac{p}{\gamma} - \beta}, & \text{若 } \beta\gamma > p, \\ \log(1 + A^{-1/\gamma}), & \text{若 } \beta\gamma = p, \\ 1, & \text{若 } \beta\gamma < p, \end{cases} \tag{2.14}$$

其中 $f(x) \asymp g(x)$ 表示 $c \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq C$, c, C 的值不依赖于 $x \in (0, 1)$.

引理 2.5 ^[14] 给定常数 $a > 0$ 和 $0 < \underline{b} < \bar{b} < 1$, 则存在正常数 $c_{2.9}$, 使得对任意的整数 $n \geq 1$ 和实数 $0 < r \leq 1$, $b_j \in [\underline{b}, \bar{b}]$, 以及任意 $s_0 \in [0, a/2]$ 有

$$\int_{a \leq s_1 \leq \dots \leq s_n \leq a+r} \prod_{j=1}^n (s_j - s_{j-1})^{-b_j} ds_1 \cdots ds_n \leq c_{2.11} (n!)^{(1/n) \sum_{j=1}^n b_j - 1} r^{n - \sum_{j=2}^n b_j}. \quad (2.15)$$

特别的, 当 $b_j = \alpha \in [\underline{b}, \bar{b}]$, $j = 1, \dots, n$ 时有

$$\int_{a \leq s_1 \leq \dots \leq s_n \leq a+r} \prod_{j=1}^n (s_j - s_{j-1})^{-\alpha} ds_1 \cdots ds_n \leq c_{2.12} (n!)^{\alpha-1} r^{n(1-(1-\frac{1}{n})\alpha)}. \quad (2.16)$$

引理 2.6 ^[8] 设 $Z_1, \dots, Z_n$ 是零均值的高斯随机变量, 并且是线性无关的, 则对任意非负的 Borel 函数 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, 有

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} \exp \left[-\frac{1}{2} \text{Var} \left(\sum_{i=1}^n \nu_j Z_j \right) \right] d\nu_1 \cdots d\nu_n \\ &= \frac{(2\pi)^{(n-1)/2}}{(\det \text{Cov}(Z_1, \dots, Z_n))^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} g \left(\frac{\nu}{\sigma_1} \right) e^{-\nu^2/2} d\nu, \end{aligned} \quad (2.17)$$

在这里 $\sigma_1^2 = \text{Var}(Z_1 | Z_2, \dots, Z_n)$ 是 Z_1 关于 $Z_2, \dots, Z_n$ 的条件方差.

引理 2.7 ^[14] 对任意的 $q \in [0, \sum_{\ell=1}^N \frac{1}{H_\ell K_\ell}]$, 设 $\tau \in \{1, \dots, N\}$ 使得

$$\sum_{\ell=1}^{\tau-1} \frac{1}{H_\ell K_\ell} \leq q \leq \sum_{\ell=1}^{\tau} \frac{1}{H_\ell K_\ell}. \quad (2.18)$$

约定 $\sum_{\ell=1}^0 \frac{1}{H_\ell K_\ell} := 0$. 则存在只依赖于 H, K 的正常数 $\delta_\tau \leq 1$ 使得每一个 $\delta \in (0, \delta_\tau)$, 可以找到关于 τ 的实数 $p_\ell \geq 1$ ($1 \leq \ell \leq \tau$) 满足下列性质:

$$\sum_{\ell=1}^{\tau} \frac{1}{p_\ell} = 1, \quad \frac{H_\ell K_\ell q}{p_\ell} < 1, \quad \forall \ell = 1, \dots, \tau \quad (2.19)$$

和

$$(1 - \delta) \sum_{\ell=1}^{\tau} \frac{H_\ell K_\ell q}{p_\ell} \leq H_\tau K_\tau q + \tau - \sum_{\ell=1}^{\tau} \frac{H_\tau K_\tau}{H_\ell K_\ell}. \quad (2.20)$$

此外, 若记 $\alpha_\tau := \sum_{\ell=1}^{\tau} \frac{1}{H_\ell K_\ell} - q > 0$, 对任意的实数 $\rho \in (0, \frac{\alpha_\tau}{2\tau})$, 则存在 $\ell_0 \in \{1, \dots, \tau\}$ 使得

$$\frac{H_{\ell_0} K_{\ell_0} q}{p_{\ell_0}} + 2H_{\ell_0} K_{\ell_0} \rho < 1. \quad (2.21)$$

3 相遇局部时的存在性和联合连续性

设 $Y(t)$ 是定义在 $\mathbb{R}^p$ 上取值于 $\mathbb{R}^q$ 的一任意 Borel 向量. 对任意的 Borel 集 $E \subseteq \mathbb{R}^p$, 可以定义 Y 在 E 上的占有测度为

$$\mu_E(\bullet) = \lambda_p\{t \in E : Y(t) \in \bullet\},$$

其中 λ_p 是 $\mathbb{R}^p$ 上的 Lebesgue 测度. 若 μ_E 关于 Lebesgue 测度 λ_p 是绝对连续的, 则称 $Y(t)$ 在 E 上的局部时存在, 记作 $L(x, E)$, 它是 μ_E 关于 λ_q 的 Radon-Nikodym 导数,

$$L(x, E) = \frac{d\mu_E}{d\lambda_q}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^q.$$

上式中的 x 是空间变量, E 是时间变量. 注意到, 若 $Y(t)$ 在 E 上有局部时, 则对任意的 Borel 集 $S \subset E$, 则 $L(x, S)$ 存在.

根据定理 6.4^[15], 局部时是可测的且满足占有密度公式: 对任意的 Borel 集 $E \subseteq \mathbb{R}^p$ 和所有可测函数 $f: \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}_+$, 有

$$\int_E f(Y(t))dt = \int_{\mathbb{R}^q} f(x)L(x, E)dx.$$

假设矩形集 $E = [a, a+h] \subset \mathbb{R}^p$, 其中 $a \in \mathbb{R}^p$ 和 $h \in \mathbb{R}_+^p$. 如果局部时 $L(x, [a, a+t])$ 在 $(x, t) \in \mathbb{R}^q \times [0, h]$ 处是连续的函数, 则称 $Y(t)$ 在 E 上有联合连续的局部时. 当局部时是联合连续时, $L(x, \cdot)$ 可以拓展到水平集上的有限的 Borel 测度, 即

$$Y_E^{-1}(x) = \{t \in E : Y(t) = x\},$$

这使得局部时成为研究 Y 分形的有效工具.

根据 (25.5), (25.7)^[15] 式, 对任意的 $x, y \in \mathbb{R}^q$, 闭区间 $E \subseteq \mathbb{R}^p$, 则对任意的整数 $n \geq 1$, 有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[L(x, E)^n] &= (2\pi)^{-nq} \int_{E^n} \int_{\mathbb{R}^{nq}} \exp\left(-i \sum_{j=1}^n \langle u_j, x \rangle\right) \\ &\quad \times \mathbb{E} \exp\left(i \sum_{j=1}^n \langle u_j, Y(t_j) \rangle\right) d\bar{u} d\bar{t} \end{aligned} \quad (3.1)$$

和对任意的偶数 $n \geq 2$, 有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(L(x, E) - L(y, E))^n] &= (2\pi)^{-nq} \int_{E^n} \int_{\mathbb{R}^{nq}} \prod_{j=1}^n [e^{-i\langle u_j, x \rangle} - e^{-i\langle u_j, y \rangle}] \\ &\quad \times \mathbb{E} \exp\left(i \sum_{j=1}^n \langle u_j, Y(t_j) \rangle\right) d\bar{u} d\bar{t}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

其中 $\bar{u} = (u_1, \dots, u_n)$, $\bar{t} = (t_1, \dots, t_n)$, 且 $u_j \in \mathbb{R}^q, t_j \in E, u_j = (u_{j,1}, \dots, u_{j,q})$.

设 $\mathcal{A}$ 是包含所有闭区间的集合, 集合 $I := [s, t]^N \subseteq [\varepsilon, 1]^N$

定理 3.1 设 $B^{H_1, K_1} = \{B^{H_1, K_1}(t), t \in \mathbb{R}^N\}$ 和 $B^{H_2, K_2} = \{B^{H_2, K_2}(t), t \in \mathbb{R}^N\}$ 是指数分别为 H_1, K_1 和 H_2, K_2 两个相互独立的 (N, d) 双分数布朗运动. 设 $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}^N\}$

是 (N, d) - 高斯随机场, $X(t) = B^{H_1, K_1}(t) - B^{H_2, K_2}(t)$. 对任意给定的集合 $I \in \mathcal{A}$, X 有局部时 $L(x, I) \in L^2(\mathbb{P} \times \lambda_d)$ 当且仅当 $\sum_{\ell=1}^N \frac{1}{H_\ell K_\ell} > d$. 进而, 如果 X 的局部时 $L(x, I)$ 存在, 那么 $L(x, I)$ 有下面的表现形式

$$L(x, I) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle y, x \rangle} \int_I e^{i\langle y, X(t) \rangle} dt dy. \quad (3.3)$$

特别的, 如果 $\sum_{\ell=1}^N \left(\frac{1}{H_\ell K_\ell}\right) > d$, 那么 B^{H_1, K_1} 和 B^{H_2, K_2} 有相遇局部时存在, 可以写成 $L(0, I)$.

证 X 的占有测度 μ_I 的傅里叶变换为

$$\hat{\mu} = \int_T \exp i\langle \xi, X(t) \rangle dt.$$

根据 Fubini 定理和引理 2.3 的性质 (i) 可得

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{\mu}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{I^2} \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbb{E} \exp(i\langle y, X(t) - X(s) \rangle)| dy dt ds \\ &= c \int_{I^2} \frac{1}{[\mathbb{E}(X_0(t) - X_0(s))^2]^{d/2}} \\ &\leq \int_{I^2} \frac{ds dt}{(\sum_{\ell=1}^N |t_\ell - s_\ell|^{2H_\ell K_\ell})^{d/2}}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

根据 Plancherel 定理, X 有局部时 $L(\cdot, I) \in L^2(\mathbb{P} \times \lambda_d)$, 当且仅当 $\mathcal{J} < \infty$. 进而由引理 2.4 可知, $\mathcal{J} < \infty$ 的充要条件是 $\sum_{\ell=1}^N \frac{1}{H_\ell K_\ell} > d$. 类似于定理 3.1 [3], 取 $x = 0$ 时, 则 B^{H_1, K_1} 和 B^{H_2, K_2} 的相遇局部时 $L(0, I)$ 存在.

定理 3.2 设 $B^{H_1, K_1} = \{B^{H_1, K_1}(t), t \in \mathbb{R}^N\}$ 和 $B^{H_2, K_2} = \{B^{H_2, K_2}(t), t \in \mathbb{R}^N\}$ 是两个相互独立的 (N, d) 双分数布朗运动, 其指标分别为 $H_1, K_1; H_2, K_2$, 则当

$$\sum_{\ell=1}^{\tau-1} \frac{1}{H_\ell K_\ell} \leq d < \sum_{\ell=1}^{\tau} \frac{1}{H_\ell K_\ell}$$

时, 其中 $\tau = \{1, \dots, N\}$, B^{H_1, K_1} 和 B^{H_2, K_2} 在 $\mathbb{R}^d$ 上的相遇局部时几乎必然连续.

为了证明定理 3.2, 我们首先给出以下两个引理.

引理 3.3 假设定理 3.1 条件成立, 则存在有限正常数 $\varepsilon \in (0, 1)$ 和只依赖于 H_1, K_1, H_2, K_2, N, d 的有限正常数 $c_{3.1}$, 使得对所有的 $r \in (0, \varepsilon)$, $T = [0, r]^N \subseteq I$, $x \in \mathbb{R}^d$ 和整数 $n \geq 1$, 有

$$\mathbb{E}[L(x, T)^n] \leq c_{3.1}^n (n!)^{N-\beta_\tau} r^{n\beta_\tau}. \quad (3.5)$$

证 根据 (3.1) 式且 $X_1, \dots, X_d$ 是相互独立的, 且与 X_0 同分布, 当整数 $n > 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[L(x, T)^n] &= (2\pi)^{-nd} \int_{\mathbb{R}^{nd}} \int_{T^n} \exp\left(-i \sum_{j=1}^n \langle u^j, x \rangle\right) \times \mathbb{E} \exp\left(i \sum_{j=1}^n \langle u^j, X(t^j) \rangle\right) d\bar{u} d\bar{t} \\ &\leq (2\pi)^{-nd} \int_{T^n} \prod_{k=1}^d \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left[-\frac{1}{2} \text{Var}\left(\sum_{j=1}^n u_k^j X(t^j)\right)\right] d\bar{u}_k \right\} d\bar{t} \\ &= (2\pi)^{-\frac{nd}{2}} \int_{T^n} [\det \text{Cov}(X(t^1), \dots, X(t^n))]^{-\frac{d}{2}} d\bar{t}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

其中 $\bar{u}_k = (u_k^1, \dots, u_k^n) \in \mathbb{R}^n$, $k = 1, \dots, d$. 在 (3.6) 式中的等号成立是根据下面公式, 即对任意 $n \times n$ 正定矩阵 Γ , 有

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{[\det(\Gamma)]^{1/2}}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} x' \Gamma x\right) dx = 1. \quad (3.7)$$

在引理 2.7 中令 $\delta = n^{-1}$, $q = d$, 即可得到满足 (2.18) 和 (2.19) 式的 τ 个大于 1 的正数 $p_1, \dots, p_\tau$. 由 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_k &= [\det \text{Cov}(X_0(t^1), \dots, X_0(t^n))]^{-\frac{1}{2}} \\ &= \prod_{\ell=1}^{\tau} [\det \text{Cov}(X_0(t^1), \dots, X_0(t^n))]^{-\frac{1}{2p_\ell}}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

对任意的点 $t^1 \dots t^n \in T$, 且 $t_\ell^1 \dots t_\ell^n$ ($1 \leq \ell \leq N$) 都互不相同, 由 (3.6) 和 (3.8) 式可以得到

$$\mathbb{E}[L(x, T)^n] \leq (2\pi)^{-\frac{nd}{2}} \int_{T^n} \prod_{\ell=1}^{\tau} [\det \text{Cov}(X_0(t^1), \dots, X_0(t^n))]^{-\frac{d}{2p_\ell}} d\bar{t}. \quad (3.9)$$

为了求 (3.9) 式积分, 我们首先对下标为 $\ell = 1, \dots, \tau$ 求 $[dt_\ell^1 \dots dt_\ell^n]$ 的积分. 事实上, 对任意的 $\ell \in \{1, \dots, \tau\}$ 和 $t_1, \dots, t_n \in T = \prod_{\ell=1}^N [a_\ell, a_\ell + r_\ell]$, 有

$$a_\ell \leq t_\ell^{\pi_\ell(1)} \leq t_\ell^{\pi_\ell(2)} \leq \dots \leq t_\ell^{\pi_\ell(n)} \leq a_\ell + r_\ell \quad (3.10)$$

其中 π_ℓ 是 $\{1, \dots, N\}$ 的一个置换, 根据引理 2.3 和 (2.13) 可得

$$\det \text{Cov}(X_0(t^1), \dots, X_0(t^n)) \geq c_{3,2} \prod_{j=1}^n (t_\ell^{\pi_\ell(j)} - t_\ell^{\pi_\ell(j-1)})^{2H_\ell K_\ell}. \quad (3.11)$$

记 $t_\ell^{\pi_\ell(0)} := \varepsilon$, 且 $\varepsilon < \frac{1}{2} \min\{a_\ell, 1 \leq \ell \leq N\}$, 由 (3.10) 和 (3.11) 式得

$$\begin{aligned} &\int_{[a_\ell, a_\ell + r_\ell]^n} [\det \text{Cov}(X_0(t^1), \dots, X_0(t^n))]^{-\frac{d}{2p_\ell}} dt_\ell^1 \dots dt_\ell^n \\ &\leq \sum_{\pi_\ell} c^n \int_{a_\ell \leq t_\ell^{\pi_\ell(1)} \leq \dots \leq t_\ell^{\pi_\ell(n)} \leq a_\ell + r_\ell} \prod_{j=1}^n \frac{1}{(t_\ell^{\pi_\ell(j)} - t_\ell^{\pi_\ell(j-1)})^{H_\ell K_\ell d/p_\ell}} dt_\ell^1 \dots dt_\ell^n \\ &\leq c_{3,3}^n (n!)^{H_\ell K_\ell d/p_\ell} r_\ell^n (1 - (1-n)H_\ell K_\ell d/p_\ell). \end{aligned} \quad (3.12)$$

根据 (2.20) 和 (3.12) 式, 继续对下标为 $\ell = \tau + 1, \dots, N$ 求 $[dt_\ell^1 \cdots dt_\ell^n]$ 的积分, 得

$$\mathbb{E}[L(x, T)^n] \leq c_{3,3}^n (n!)^{\sum_{\ell=1}^{\tau} H_\ell K_\ell d / p_\ell} \prod_{\ell=1}^{\tau} r_\ell^{n(1-(1-n^{-1})H_\ell K_\ell d / p_\ell)} \cdot \prod_{\ell=\tau+1}^N r_\ell^n. \quad (3.13)$$

考虑特殊情况, 即当 $r_1 = r_2 = \cdots = r_N = r$, 根据 (2.20) 和 (3.13) 式, 其中的 $\delta = n^{-1}$, $q = d$, 得

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[L(x, T)^n] &\leq c_{3,4}^n (n!)^{\sum_{\ell=1}^{\tau} H_\ell K_\ell d / p_\ell} r^{n(N-(1-n^{-1})\sum_{\ell=1}^{\tau} H_\ell K_\ell d / p_\ell)} \\ &\leq c_{3,1}^n (n!)^{N-\beta_\tau} r^{n\beta_\tau}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

记 $\beta_\tau = \sum_{\ell=1}^{\tau} \frac{H_\ell K_\ell}{H_\ell K_\ell} + N - \tau - H_\tau K_\tau d$.

引理 3.4 假设定理 3.1 条件成立, 存在只依赖于 H_1, K_1, H_2, K_2, N, d 的有限正常数 $c_{3,5}$, 则对任意的 $T = [a, a + \langle r \rangle] \subseteq I$, $r \in (0, 1)$, $x, y \in \mathbb{R}^d$ 且 $|x - y| \leq 1$, 所有的偶数 $n \geq 1$ 和 $\gamma \in (0, 1 \wedge \frac{\alpha_\tau}{2\tau})$ 有

$$\mathbb{E}[(L(x, T) - L(y, T))^n] \leq c_{3,5}^n |x - y|^{n\gamma} (n!)^{N-\beta_\tau+(1+H_\tau K_\tau)\gamma} r^{n(\beta_\tau-H_\tau K_\tau\gamma)}. \quad (3.15)$$

证 设 $\gamma \in (0, 1)$ 是一个足够小的正常数, 对所有的 $u \in \mathbb{R}$ 有下列两个不等式成立,

$$\begin{aligned} |e^{iu} - 1| &\leq 2^{1-\gamma} |u|^\gamma, & \forall u \in \mathbb{R}, \\ |u + v|^\gamma &\leq |u|^\gamma + |v|^\gamma, & \forall u, v \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

对所有的 $u^1 \cdots u^n$ 和 $x, y \in \mathbb{R}^d$ 有下列的式子

$$\prod_{j=1}^n |e^{-i\langle u^j, x \rangle} - e^{-i\langle u^j, y \rangle}| \leq 2^{(1-\gamma)n} |x - y|^{n\gamma} \sum' \prod_{j=1}^n |u^{j,k_j}|^\gamma, \quad (3.17)$$

其中 $\sum'$ 是包括了所有的序列 $(k_1, \dots, k_n) \in \{1, \dots, d\}^n$.

对任意的偶数 $n \geq 2$, 根据 (3.2) 和 (3.17) 式得

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[(L(x, T) - L(y, T))^n] \\ &\leq (2\pi)^{-nd} 2^{(1-\gamma)n} |x - y|^{n\gamma} \\ &\quad \times \sum' \int_{T^n} \int_{\mathbb{R}^{nd}} \prod_{m=1}^n |u^{m,k_m}|^\gamma \mathbb{E} \exp \left(-i \sum_{j=1}^n \langle u^j, X(t^j) \rangle \right) d\bar{u} d\bar{t} \\ &\leq c_{3,6}^n |x - y|^{n\gamma} \sum' \int_{T^n} d\bar{t} \\ &\quad \times \prod_{m=1}^n \left\{ \int_{\mathbb{R}^{nd}} |u^{m,k_m}|^{n\gamma} \exp \left[-\frac{1}{2} \text{Var} \left(\sum_{j=1}^n \langle u^j, X(t^j) \rangle \right) \right] d\bar{u} \right\}^{1/n}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

其中最后一个不等式由 Hölder 不等式得到.

此时固定一向量 $\bar{k} = (k_1, \dots, k_n) \in \{1, \dots, d\}^n$ 和 n 个不同的点 $t^1, \dots, t^n \in T$, 并对所有的 $\ell (1 \leq \ell \leq N)$, $t_\ell^1, \dots, t_\ell^n$ 是互不相同的. 记

$$\mathcal{M} = \prod_{m=1}^n \left\{ \int_{\mathbb{R}^{nd}} |u^{m, k_m}|^{n\gamma} \exp \left[-\frac{1}{2} \text{Var} \left(\sum_{j=1}^n \langle u^j, X(t^j) \rangle \right) \right] d\bar{u} \right\}^{1/n}. \quad (3.19)$$

由于 $X_i (1 \leq i \leq d)$ 是相互独立的, 且与 X_0 同分布, 根据引理 2.3 知, 随机变量 $X_i(t^j) (1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq n)$ 是线性独立的. 因此由引理 2.6 可以得到

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^{nd}} |u^{m, k_m}|^{n\gamma} \exp \left[-\frac{1}{2} \text{Var} \left(\sum_{j=1}^n \langle u_j, X(t^j) \rangle \right) \right] d\bar{u} \\ &= \frac{(2\pi)^{(nd-1)/2}}{[\det \text{Cov}(X_0(t^1), \dots, X_0(t^n))]^{d/2}} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{v}{\sigma_m} \right)^{n\gamma} e^{-\frac{v^2}{2}} dv \\ &\leq \frac{c_{3.7}^n (n!)^\gamma}{[\det \text{Cov}(X_0(t^1), \dots, X_0(t^n))]^{d/2}} \frac{1}{\sigma_m^{n\gamma}}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

上式中的 σ_m^2 关于 $X_{k_m}(t^m)$ 与 $X_i(t^j)$ 的条件方差 ($i \neq k_m$ 或 $i = k_m, j \neq m$), 其中最后一个不等式由 Stirling 公式得到. 此时由 (3.19) 和 (3.20) 式得

$$\mathcal{M} \leq \frac{c_{3.7}^n (n!)^\gamma}{[\det \text{cov}(X_0(t^1), \dots, X_0(t^n))]^{d/2}} \prod_{m=1}^n \frac{1}{\sigma_m^\gamma}. \quad (3.21)$$

令 $\delta = \frac{1}{n}$ 和 $q = d$, 常数 $p_\ell (\ell = 1, \dots, \tau)$ 如引理 2.7 所述. 注意到当 $\gamma \in (0, \frac{\alpha_\tau}{2\tau})$, 存在 $\ell_0 \in \{1, \dots, \tau\}$, 使得

$$\frac{H_{\ell_0} K_{\ell_0} d}{p_{\ell_0}} + 2H_{\ell_0} K_{\ell_0} \gamma < 1. \quad (3.22)$$

根据 (3.8) 和 (3.21) 式有

$$\mathcal{M} \leq c_{3.8}^n (n!)^\gamma \prod_{\ell=1}^{\tau} \frac{1}{[\det \text{cov}(X_0(t^1), \dots, X_0(t^n))]^{d/(2p_\ell)}} \prod_{m=1}^n \frac{1}{\sigma_m^\gamma}. \quad (3.23)$$

根据引理 2.3 得

$$\begin{aligned} \sigma_m^2 &= \text{Var}(X_{k_m}(t^m) | X_{k_m}(t^j), j \neq m) \\ &\geq c_{3.9}^n \sum_{\ell=1}^N \min \{ |t_\ell^m - t_\ell^j|^{2H_\ell K_\ell} \mid j \neq m \}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

对任意的 n 个点 $t^1, \dots, t^n \in T$, 令 $\pi_1, \dots, \pi_N$ 是关于 $\{1, \dots, n\}$ 的 N 个置换, 使得对任意 $\ell (1 \leq \ell \leq N)$ 有

$$t_\ell^{\pi_\ell(1)} \leq t_\ell^{\pi_\ell(2)} \leq \dots \leq t_\ell^{\pi_\ell(n)}. \quad (3.25)$$

由 (3.24) 和 (3.25) 式得

$$\begin{aligned} \prod_{m=1}^n \frac{1}{\sigma_m^\gamma} &\leq c_{3.9}^{-n\gamma} \prod_{m=1}^n \frac{1}{\sum_{\ell=1}^N [(t_\ell^{\pi_\ell(m)} - t_\ell^{\pi_\ell(m-1)}) \wedge (t_\ell^{\pi_\ell(m+1)} - t_\ell^{\pi_\ell(m)})]^{H_\ell K_\ell \gamma}} \\ &\leq c_{3.10}^n \prod_{m=1}^n \frac{1}{[(t_{\ell_0}^{\pi_{\ell_0}(m)} - t_{\ell_0}^{\pi_{\ell_0}(m-1)}) \wedge (t_{\ell_0}^{\pi_{\ell_0}(m+1)} - t_{\ell_0}^{\pi_{\ell_0}(m)})]^{H_{\ell_0} K_{\ell_0} \gamma}} \\ &\leq c_{3.11}^n \prod_{m=1}^n \frac{1}{(t_{\ell_0}^{\pi_{\ell_0}(m)} - t_{\ell_0}^{\pi_{\ell_0}(m-1)})^{q_{\ell_0}^m H_{\ell_0} K_{\ell_0} \gamma}}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

其中 $(q_{\ell_0}^1, \dots, q_{\ell_0}^n) \in \{0, 1, 2\}^n$, $\sum_{m=1}^n q_{\ell_0}^m = n$, $q_{\ell_0}^1 = 0$, 这样只需考虑 σ_m 在下标为 ℓ_0 的值.

由 (3.23) 和 (3.26) 式可得

$$\begin{aligned} \int_{T^n} \mathcal{M}(\bar{k}, \bar{t}, \gamma) d\bar{t} &\leq c_{3.11}^n (n!)^\gamma \int_{T^n} \prod_{\ell=1}^\tau \frac{1}{[\det \operatorname{cov}(X_0(t^1), \dots, X_0(t^n))]^{\frac{d}{2p_\ell}}} \\ &\quad \times \prod_{m=1}^n \frac{1}{(t_{\ell_0}^{\pi_{\ell_0}(m)} - t_{\ell_0}^{\pi_{\ell_0}(m-1)})^{q_{\ell_0}^m H_{\ell_0} K_{\ell_0} \gamma}} d\bar{t}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

为求 (3.27) 式, 先对下标 $\ell = 1, \dots, \tau$ 求 $[dt_\ell^1 \cdots dt_\ell^n]$ 的积分, 首先考虑 $\ell = \ell_0$, 由 (2.15), (3.11), (3.22) 式得

$$\begin{aligned} &\int_{[a_\ell, a_\ell + r_\ell]^n} \frac{1}{[\det \operatorname{cov}(X_0(t^1), \dots, X_0(t^n))]^{\frac{d}{2p_\ell}}} \times \prod_{m=1}^n \frac{1}{(t_{\ell_0}^{\pi_{\ell_0}(m)} - t_{\ell_0}^{\pi_{\ell_0}(m-1)})^{q_{\ell_0}^m H_{\ell_0} K_{\ell_0} \gamma}} d\bar{t} \\ &\leq \sum_{\pi_{\ell_0}} c^n \int_{a_{\ell_0} \leq t_{\ell_0}^{\pi_{\ell_0}(1)} \leq \dots \leq t_{\ell_0}^{\pi_{\ell_0}(n)} \leq a_{\ell_0} + r_{\ell_0}} \\ &\quad \times \prod_{j=1}^n \frac{1}{(t_{\ell_0}^{\pi_{\ell_0}(j)} - t_{\ell_0}^{\pi_{\ell_0}(j-1)})^{H_{\ell_0} K_{\ell_0} d/p_{\ell_0} + q_{\ell_0}^m H_{\ell_0} K_{\ell_0} \gamma}} dt_{\ell_0}^1 \cdots dt_{\ell_0}^n \\ &\leq c_{3.11}^n (n!)^{H_{\ell_0} K_{\ell_0} d/p_{\ell_0} + H_{\ell_0} K_{\ell_0} \gamma} r_{\ell_0}^{n[1 - (1-n^{-1})H_{\ell_0} K_{\ell_0} d/p_{\ell_0} - H_{\ell_0} K_{\ell_0} \gamma]}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

与此同时, 当 $\ell \neq \ell_0$, 由 (3.6) 和 (3.14) 式得

$$\begin{aligned} &\int_{[a_\ell, a_\ell + r_\ell]^n} [\det \operatorname{cov}(X_0(t^1), \dots, X_0(t^n))]^{-\frac{d}{2p_\ell}} dt_\ell^1 \cdots dt_\ell^n \\ &\leq c_{3.12}^n (n!)^{H_\ell K_\ell d/p_\ell} r_\ell^{n(1 - (1-n)H_\ell K_\ell d/p_\ell)}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

最后继续对下标 $\ell = [\tau + 1, \dots, N]$ 求 $[dt_\ell^1 \cdots dt_\ell^n]$ 的积分,

$$\begin{aligned} \int_{T^n} \mathcal{M}(\bar{k}, \bar{t}, \gamma) d\bar{t} &\leq c_{3.13}^n (n!)^{\sum_{\ell=1}^\tau H_\ell K_\ell / p_\ell + H_{\ell_0} K_{\ell_0} \gamma + \gamma} \\ &\quad \times r_{\ell_0}^{n[1 - (1-n^{-1})H_{\ell_0} K_{\ell_0} d/p_{\ell_0} - H_{\ell_0} K_{\ell_0} \gamma]} \times \prod_{\ell \neq \ell_0}^\tau r_\ell^{n(1 - (1-n)H_\ell K_\ell d/p_\ell)} \times \prod_{\ell=\tau+1}^N r_\ell^n. \end{aligned} \quad (3.30)$$

特别的, 当 $r_1 = \cdots = r_N = r < 1$ 时, 综合 (3.18) 和 (3.30) 式可得

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[(L(x, D) - L(y, D))^n] \\ & \leq c_{3,13}^n |x - y|^{n\gamma} (n!)^{\sum_{\ell=1}^{\tau} H_{\ell} K_{\ell}/p_{\ell} + H_{\ell_0} K_{\ell_0} \gamma + \gamma} \cdot r^{n[N - (1-n^{-1}) \sum_{\ell=1}^{\tau} H_{\ell} K_{\ell} d/p_{\ell} - H_{\ell_0} K_{\ell_0} \gamma]} \\ & \leq c_{3,14}^n |x - y|^{n\gamma} (n!)^{N - \beta_{\tau} + (1 + H_{\tau} K_{\tau})\gamma} r^{n(\beta_{\tau} - H_{\tau} K_{\tau} \gamma)}, \end{aligned} \quad (3.31)$$

其中 $H_{\ell_0} K_{\ell_0} \leq H_{\tau} K_{\tau}$.

定理的 3.2 证明 令 $I \in [\varepsilon, 1]^N$, 其中 $\varepsilon > 0$, 根据引理 3.4, 对任意的 $T \in I, x \in \mathbb{R}^d, X$ 的局部时 $L(x, T)$ 是几乎必然连续的. 即对任意的 $x, y \in \mathbb{R}^d$ 和 $s, t \in I$, 和任意偶数 $n \geq 1$, 有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(L(x, [0, t]) - L(y, [0, s]))^n] & \leq 2^{n-1} \{ \mathbb{E}[(L(x, [0, t]) - L(x, [0, s]))^n] \\ & \quad + \mathbb{E}[(L(x, [0, s]) - L(y, [0, s]))^n] \}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

其中 $[L(x, [0, t]) - L(x, [0, s])]$ 可以看做是有限个 $L(x, T_j)$ 的和, $T_j \in \mathcal{A}$ 是 I 上的闭子区间, 其至少有一边长 $\leq |s - t|$, 由引理 3.3 可得

$$\mathbb{E}[(L(x, [0, t]) - L(x, [0, s]))^n] < c_{3,1}^n (n!)^{N - \beta_{\tau}} |t - s|^{n\beta_{\tau}}.$$

由引理 3.4 可得

$$\mathbb{E}[(L(x, [0, s]) - L(y, [0, s]))^n] < c_{3,14}^n |x - y|^{n\gamma} (n!)^{N - \beta_{\tau} + (1 + H_{\tau} K_{\tau})\gamma} |t - s|^{n(\beta_{\tau} - H_{\tau} K_{\tau} \gamma)},$$

即存在足够小的常数 $\gamma \in (0, 1)$ 有

$$\mathbb{E}[(L(x, [0, t]) - L(y, [0, s]))^n] \leq c_{3,15} (|x - y| + |t - s|)^{n\gamma}. \quad (3.33)$$

根据 (3.33) 式和多维情形下的 Kolmogorov 连续定理^[16] 得出局部时 $L(x, t)$ 是联合连续的.

参 考 文 献

- [1] Houdré C, Villa C. An example of infinite dimensional quasi-helix[J]. Stoch. models, 2003, 336: 195–201.
- [2] Chen Z. Polar functions of multiparameter bifractional Brownian Sheets[J]. Acta. Math. Appl. Sin. Engl. Ser., 2009, 25: 255–572.
- [3] Luan N. Hausdorff measures of the image, graph and level set of bifractional Brownian motion[J]. Sci. China Math., 2010, 53: 2973–2992.
- [4] Tudor C A, Xiao Y. Sample path properties of bifractional Brownian motion[J]. Bernoulli, 2007, 13: 1023–1052.
- [5] Wang W. On p -variation of bifractional Brownian motion[J]. Appl. Math. J. Chinese Univ., 2011, 26: 127–141.
- [6] Varadhan, S R S. Appendix to Euclidean quantum field theory[C]. Symanzik K, Jost R. (Ed.) Local quantum theory[A]. New York: Academic Press, 1968.
- [7] Jiang Y, Wang Y. On the collision local time of fractional Brownian motion[J]. Chin. Ann. Math., 2007, 28: 311–320.

- [8] Wu D, Xiao Y. Regularity of intersection local times of fractional Brownian motions[J]. J. Theor. Probab., 2010, 23: 972–1001.
- [9] Jiang Y, Wang Y. Self-intersection local times and collision local times of bifractional Brownian motions[J]. Sci. China, Ser. A., 2009, 52: 1905–1919.
- [10] Yan L, Liu J, Chen C. On the collision local time of bifractional Brownian motions[J]. Stoch. Dyn., 2009, 9:479–491.
- [11] Shen G, Yan L. Smoothness for the collision local times of bifractional Brownian motions[J]. Sci. China Math., 2011, 54: 1859–1873.
- [12] Xiao Y. Sample path properties of anisotropic Gaussian random fields[C]. Khoshnevisan D, Rassoul-Agha F. A Minicourse on Stochastic Partial Differential Equations[A]. Lecture Notes in Math., New York: Springer, 2009
- [13] Wu D, Xiao Y. On local times of anisotropic Gaussian random fields[J]. Comm. Stoch. Anal., 2011, 5: 15–39
- [14] Ayache A, Roueff F, Xiao Y. Joint continuity of the local times of linear fractional stable sheets[J]. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A., 2007, 344: 635–640.
- [15] Geman D, Horowitz J. Occupation densities[J]. Ann. Probab., 1980, 8: 1–67.
- [16] Khoshnevisan D. Multiparameter processes: an introduction to random fields[M]. New York: Springer, 2002.

EXISTENCE AND JOINT CONTINUITY FOR THE COLLISION LOCAL TIME OF MULTIPARAMETER BIFRACTIONAL BROWNIAN MOTION

XU Rui, ZHU Dong-jin, SHEN Guang-jun

(*School of Mathematical and Computer Science, Anhui Normal University, Wuhu 241003, China*)

Abstract: In this paper, we study the collision local time of two independent (N, d) -bifractional Brownian motions B^{H_1, K_1} and B^{H_2, K_2} . Using the Fourier analysis, existence and joint continuity for the collision local time are obtained. The problem of the collision local time of fractional Brownian motion is generalized.

Keywords: bifractional Brownian motion; collision local time; strong local φ -nondeterminism; joint continuity

2010 MR Subject Classification: 60G15; 60G17; 60G18