Vol. 35 (2015)
No. 6

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

从 α-Zygmund 空间到 Bloch-Orlicz 空间和 Zygmund-Orlicz 空间的广义复合算子

李海英, 郭志涛

(河南师范大学数学与信息科学学院, 河南 新乡 453007)

摘 要: 本文研究了从 α-Zygmund 空间到 Bloch-Orlicz 空间和 Zygmund-Orlicz 空间的广义复合算子. 利用符号函数 ϕ, 解析映射 g 和凸函数 φ 的函数论性质, 获得了广义复合算子的有界性和紧性的充要条件, 推广了 Zygmund 空间的相关结果.

关键词: α-Zygmund 空间; Bloch-Orlicz 空间; Zygmund-Orlicz 空间; 有界性; 紧性

MR(2010) **主题分类号:** 47B38; 47B37 **中图分类号:** O177.2

文献标识码: A **文章编号:** 0255-7797(2015)06-1400-11

1 引言

设 $\mathbb{D}$ 是复平面 $\mathbb{C}$ 上的单位圆盘, $H(\mathbb{D})$ 是 $\mathbb{D}$ 上的解析函数空间. Bloch 空间 $\mathcal{B}=\mathcal{B}(\mathbb{D})$ 定义为

$$\mathcal{B}=\{f\in H(\mathbb{D}):\ \|f\|_b=\sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|f'(z)|<\infty\}.$$

Zygmund 空间 $\mathcal{Z}=\mathcal{Z}(\mathbb{D})$ 定义为

$$\mathcal{Z}=\{f\in H(\mathbb{D}):\ \|f\|_z=\sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|f''(z)|<\infty\}.$$

α-Bloch 空间 $\mathcal{B}^\alpha(\mathbb{D})$ 定义为

$$\mathcal{B}^\alpha=\{f\in H(\mathbb{D}):\ \|f\|_{b^\alpha}=\sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)^\alpha|f'(z)|<\infty,\ \alpha>0\}.$$

α-Zygmund 空间 $\mathcal{Z}^\alpha=\mathcal{Z}^\alpha(\mathbb{D})$ 定义为

$$\mathcal{Z}^\alpha=\{f\in H(\mathbb{D}):\ \|f\|_{z^\alpha}=\sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)^\alpha|f''(z)|<\infty\ \alpha>0\}.$$

当 $\alpha=1$, 则 $\mathcal{B}^\alpha$ 和 $\mathcal{Z}^\alpha$ 分别为 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{Z}$.

作为 Bloch 空间的推广, 近来, Ramos Fernándz 在文献 [1] 中利用 Young 函数定义了 Bloch-Orlicz 空间. 设 $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 为一个严格递增的凸函数, 且 $\varphi(0)=0$, $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi(t)=\infty$. 如果对于某个只依赖于 $f\in H(\mathbb{D})$ 的 $\lambda>0$,

$$\sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)\varphi(\lambda|f'(z)|)<\infty,$$

*收稿日期: 2015-01-16 接收日期: 2015-03-03

基金项目: 国家自然科学基金 (11201127; 11271112); 河南省高校科技创新团队支持计划资助 (14IRT-STHN023).

作者简介: 李海英 (1978–), 女, 河南南阳, 副教授, 主要研究方向: 泛函分析及其应用.

称 f 属于 Bloch-Orlicz 空间, 记为 $\mathcal{B}^{\varphi}=\mathcal{B}^{\varphi}(\mathbb{D})$. 显然, $\mathcal{B}^{\varphi}$ 为 F - 空间, 且若 $\varphi(t)=t$, $t\geq 0$, $\mathcal{B}^{\varphi}$ 即为 Bloch 空间 $\mathcal{B}$, 由于 φ 是凸函数, 不难验证 Minkowski 泛函

$$\|f\|_{b^{\varphi}}=\inf\left\{k>0:S_{\varphi}\left(\frac{f'}{k}\right)\leq 1\right\}$$

定义了 $\mathcal{B}^{\varphi}$ 上的一个半范数, 即 Luxemburg 半范数, 其中

$$S_{\varphi}(f)=\sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)\varphi(|f(z)|).$$

事实上, 可以证明 $\mathcal{B}^{\varphi}$ 在范数 $\|f\|_{\mathcal{B}^{\varphi}}=|f(0)|+\|f\|_{b^{\varphi}}$ 下是一个 Banach 空间且

$$S_{\varphi}\left(\frac{f'}{\|f\|_{\mathcal{B}^{\varphi}}}\right)\leq 1.$$

利用上式可以证明 Bloch-Orlicz 空间 $\mathcal{B}^{\varphi}$ 等距同构于 μ-Bloch 空间, 其中

$$\mu(z)=\frac{1}{\varphi^{-1}(\frac{1}{1-|z|^2})},\qquad z\in\mathbb{D}.$$

因此, 对于任何 $f\in\mathcal{B}^{\varphi}\backslash\{0\}$, 有

$$\|f\|_{\mathcal{B}^{\varphi}}=|f(0)|+\sup_{z\in\mathbb{D}}\mu(z)|f'(z)|.$$

在文献 [2] 中, 作者定义了 Zygmund-Orlicz 空间. 如果对于某个只依赖于 $f\in H(\mathbb{D})$ 的 $\lambda>0$,

$$\sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)\varphi(\lambda|f''(z)|)<\infty,$$

则称 f 属于 Zygmund-Orlicz 空间, 记为 $\mathcal{Z}^{\varphi}=\mathcal{Z}^{\varphi}(\mathbb{D})$. 类似于 Bloch-Orlicz 空间, 利用 φ 的凸性, 可以验证 Minkowski 泛函

$$\|f\|_{z^{\varphi}}=\inf\left\{k>0:S_{\varphi}\left(\frac{f''}{k}\right)\leq 1\right\}$$

为 $\mathcal{Z}^{\varphi}$ 定义了一个半范数. 此外还可证明 $\mathcal{Z}^{\varphi}$ 在范数 $\|f\|_{\mathcal{Z}^{\varphi}}=|f(0)|+|f'(0)|+\|f\|_{z^{\varphi}}$ 下是一个 Banach 空间且

$$S_{\varphi}\left(\frac{f''}{\|f\|_{\mathcal{Z}^{\varphi}}}\right)\leq 1.$$

利用上式可以证明 Zygmund-Orlicz 空间 $\mathcal{Z}^{\varphi}$ 等距同构于 μ-Zygmund 空间, 其中

$$\mu(z)=\frac{1}{\varphi^{-1}(\frac{1}{1-|z|^2})},\qquad z\in\mathbb{D}.$$

因此, 对于任何 $f\in\mathcal{Z}^{\varphi}\backslash\{0\}$, 有

$$\|f\|_{\mathcal{Z}^{\varphi}}=|f(0)|+|f'(0)|+\sup_{z\in\mathbb{D}}\mu(z)|f''(z)|.$$

设 ϕ 为 $\mathbb{D}$ 的解析自映射, $g:\mathbb{D}\to\mathbb{C}$ 为一个解析映射,

$$\left(C_\phi^g f\right)(z)=\int_0^z f'(\phi(\xi))g(\xi)d\xi,\quad z\in\mathbb{D},$$

称 C_ϕ^g 为广义复合算子. 当 $g=\phi'$ 时,

$$\left(C_\phi^g f\right)(z)=\int_0^z f'(\phi(\xi))\phi'(\xi)d\xi=f(\phi(z))-f(\phi(0)),$$

由于 $f(\phi(0))$ 为一个常数, 故 C_ϕ^g 实质上就是复合算子 C_ϕ. 因此, C_ϕ^g 可以看作复合算子的推广, 见文献 [3–9]. 在文献 [2] 中, 作者研究了从 Zygmund 空间到 Bloch-Orlicz 空间和 Zygmund-Orlicz 空间的广义复合算子的有界性和紧性, 本文研究从 α-Zygmund 空间到 $\mathcal{B}^\varphi$ 和 $\mathcal{Z}^\varphi$ 的广义复合算子的有界性和紧性. 由于当 $\alpha=1$ 时, α-Zygmund 空间为 Zygmund 空间 $\mathcal{Z}$, 故考虑当 $\alpha\neq 1$ 时, $C_\phi^g:\mathcal{Z}^\alpha\to\mathcal{B}^\varphi$ 和 $C_\phi^g:\mathcal{Z}^\alpha\to\mathcal{Z}^\varphi$ 的有界性和紧性. 文中的 C 是一个正常数, 在不同地方可以表示不同的值.

2 主要引理

在引理 2.1 中, 当 $\alpha=1$ 时, 可参见文献 [10], 其它的情况也可类似证明, 见文献 [11]. 利用文献 [12] 中命题 3.11 的方法, 不难证明下列引理 2.2.

引理 2.1 对于任何 $f\in\mathcal{Z}^\alpha$, $\alpha>0$, 我们有

(i) 当 $0<\alpha<1$ 时, $|f'(z)|\le\frac{2}{1-\alpha}\|f\|_{\mathcal{Z}^\alpha}$;

(ii) 当 $\alpha=1$ 时, $|f'(z)|\le\log\left(\frac{e}{1-|z|^2}\right)\|f\|_{\mathcal{Z}}$;

(iii) 当 $\alpha>1$ 时, $|f'(z)|\le\frac{2}{\alpha-1}\frac{\|f\|_{\mathcal{Z}^\alpha}}{(1-|z|^2)^{\alpha-1}}$.

引理 2.2 设 $g\in H(\mathbb{D})$, ϕ 为 $\mathbb{D}$ 的解析自映射. 令 $X=\mathcal{Z}^\alpha$, $Y=\mathcal{B}^\varphi$ 或 $\mathcal{Z}^\varphi$, 则 $C_\phi^g:X\to Y$ 是紧算子当且仅当 $C_\phi^g:X\to Y$ 是有界算子, 且对于 $\mathcal{Z}^\alpha$ 中在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛于零的任意有界序列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 都有 $\|C_\phi^g f_n\|_Y\to 0, n\to\infty$.

引理 2.3 设 $0<\alpha<1$, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为 $\mathcal{Z}^\alpha$ 中的任意有界序列且在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛于零, $n\to\infty$. 则

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{z\in\mathbb{D}}|f_n'(z)|=0.$$

证 设 $M=\sup_n\|f_n\|_{\mathcal{Z}^\alpha}<\infty$. 任取 $\epsilon>0$, 存在 $0<\eta<1$ 使得 $(1-\eta)^{1-\alpha}<\epsilon$. 若 $\eta<|z|<1$, 则

$$\begin{aligned}\left|f_n'(z)-f_n'\left(\frac{\eta}{|z|}z\right)\right| &= \left|\int_{\frac{\eta}{|z|}}^1 zf_n''(z\eta)d\eta\right|=\left|\int_{\frac{\eta}{|z|}}^1(1-|z\eta|^2)^\alpha\frac{f_n''(z\eta)z}{(1-|z\eta|^2)^\alpha}d\eta\right|\\ &\le M\int_{\frac{\eta}{|z|}}^1\frac{|z|}{(1-|z\eta|^2)^\alpha}d\eta=M\int_\eta^{|z|}\frac{d\xi}{(1+\xi)^\alpha(1-\xi)^\alpha}\\ &\le M\int_\eta^{|z|}(1-\xi)^{-\alpha}d\xi\le\frac{M}{1-\alpha}(1-\eta)^{1-\alpha}\le\frac{M}{1-\alpha}\epsilon.\end{aligned}$$

故

$$\sup_{\eta<|z|<1}|f_n'(z)|\le\frac{M}{1-\alpha}\epsilon+\sup_{|z|=\eta}|f_n'(z)|.$$

由于 $\{f_n\}$ 在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛于零, 则由 Cauchy 估计, $\{f_n'\}$ 也在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛于零, 有

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{z\in\mathbb{D}}|f_n'(z)| \le \lim_{n\to\infty}\sup_{z\in\mathbb{D}}\left(\frac{M}{1-\alpha}\epsilon + 2\sup_{|z|\le\eta}|f_n'(z)|\right) = \frac{M}{1-\alpha}\epsilon.$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{z\in\mathbb{D}}|f_n'(z)| = 0$.

3 $C_\phi^g : \mathcal{Z}^\alpha \to \mathcal{B}^\varphi$ 的有界性和紧性

本部分我们给出广义复合算子 $C_\phi^g : \mathcal{Z}^\alpha \to \mathcal{B}^\varphi$ 的有界性和紧性的特征.

定理 3.1 设 $g \in H(\mathbb{D})$, ϕ 为 $\mathbb{D}$ 的解析自映射, $0 < \alpha < 1$. 则下列命题等价:

(i) $C_\phi^g : \mathcal{Z}^\alpha \to \mathcal{B}^\varphi$ 是紧算子;

(ii) $C_\phi^g : \mathcal{Z}^\alpha \to \mathcal{B}^\varphi$ 是有界算子;

(iii)

$$k_1 = \sup_{z\in\mathbb{D}}\frac{|g(z)|}{\varphi^{-1}(\frac{1}{1-|z|^2})} < \infty. \tag{3.1}$$

证 (i)$\Rightarrow$(ii) 由于紧算子是有界算子, 显然成立.

(ii)$\Rightarrow$(iii) 设 $C_\phi^g : \mathcal{Z}^\alpha \to \mathcal{B}^\varphi$ 是有界算子, 则对于所有 $f \in \mathcal{Z}^\alpha$, 都存在一个常数 C 使得 $\|C_\phi^g f\|_{\mathcal{B}^\varphi} \le C\|f\|_{Z^\alpha}$. 取函数 $f(z) = z \in \mathcal{Z}^\alpha$, 显然有 $\|f\|_{\mathcal{Z}^\alpha} = 1$, 则

$$S_\varphi\left(\frac{(C_\phi^g f)'(z)}{C\|f\|_{\mathcal{Z}^\alpha}}\right) = S_\varphi\left(\frac{g(z)}{C}\right) = \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)\varphi\left(\frac{|g(z)|}{C}\right) \le 1.$$

(iii)$\Rightarrow$(i) 设 $k_1 < \infty$, 令 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为 $\mathcal{Z}^\alpha$ 中的任意有界序列, 且在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛于零, $n \to \infty$. 由于 $(C_\phi^g f_n)(0) = 0$, 故

$$\|C_\phi^g f_n\|_{\mathcal{B}^\varphi} = \sup_{z\in\mathbb{D}}\frac{|(C_\phi^g f_n)'(z)|}{\varphi^{-1}(\frac{1}{1-|z|^2})} = \sup_{z\in\mathbb{D}}\frac{|f_n'(\phi(z))||g(z)|}{\varphi^{-1}(\frac{1}{1-|z|^2})} \le k_1\sup_{z\in\mathbb{D}}|f_n'(\phi(z))|.$$

由引理 2.3 可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{z\in\mathbb{D}}|f_n'(\phi(z))| = 0$. 因此, $\lim\limits_{n\to\infty}\|C_\phi^g f_n\|_{\mathcal{B}^\varphi} = 0$, 由引理 2.2 可知 $C_\phi^g : \mathcal{Z}^\alpha \to \mathcal{B}^\varphi$ 是紧算子.

定理 3.2 设 $g \in H(\mathbb{D})$, ϕ 为 $\mathbb{D}$ 的解析自映射, $\alpha > 1$. 则 $C_\phi^g : \mathcal{Z}^\alpha \to \mathcal{B}^\varphi$ 是有界算子当且仅当

$$k_2 = \sup_{z\in\mathbb{D}}\frac{|g(z)|}{\varphi^{-1}(\frac{1}{1-|z|^2})(1-|\phi(z)|^2)^{\alpha-1}} < \infty. \tag{3.2}$$

证 假设 $C_\phi^g : \mathcal{Z}^\alpha \to \mathcal{B}^\varphi$ 是有界的. 利用函数 $f(z) = z \in \mathcal{Z}^\alpha$, 类似于定理 3.1 的证明, 则 $k_1 < \infty$. 对于任何 $b, z \in \mathbb{D}$, 令 $h_b(z) = \frac{(1-|b|^2)^2}{(1-\bar{b}z)^\alpha}$, 则

$$\begin{aligned}\sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)^\alpha|h_b''(z)| &\le \sup_{z\in\mathbb{D}}(1+|z|)^\alpha(1-|z|)^\alpha\frac{\alpha(\alpha+1)(1+|b|)^2(1-|b|)^2|b|^2}{(1-|z|)^\alpha(1-|b|)^2}\\ &\le 4\cdot 2^\alpha\cdot\alpha(\alpha+1) < \infty,\end{aligned}$$

则 $h_b \in \mathcal{Z}^\alpha$. 令 $b=\phi(\omega),\omega\in\mathbb{D}$ 且使得 $\frac{1}{2}<|\phi(\omega)|<1$, 直接计算可得

$$h'_{\phi(\omega)}(\phi(\omega))=\frac{\alpha\overline{\phi(\omega)}}{(1-|\phi(\omega)|^2)^{\alpha-1}}. \tag{3.3}$$

由 $C_\phi^g:\mathcal{Z}^\alpha\to\mathcal{B}^\varphi$ 的有界性知, 存在一个常数 C, 使得 $\|C_\phi^g h_{\phi(\omega)}\|_{\mathcal{B}^\varphi}\le C$, 则由 (3.3) 式,

$$\begin{aligned}1 \ \ &\geq \ \ S_\varphi\left(\frac{(C_\phi^g h_{\phi(\omega)})'(z)}{C}\right)\geq \sup_{\frac{1}{2}<|\phi(\omega)|<1}(1-|\omega|^2)\varphi\left(\frac{|(C_\phi^g h_{\phi(\omega)})'(\omega)|}{C}\right)\\ &= \sup_{\frac{1}{2}<|\phi(\omega)|<1}(1-|\omega|^2)\varphi\left(\frac{\alpha|\phi(\omega)||g(\omega)|}{C(1-|\phi(\omega)|^2)^{\alpha-1}}\right).\end{aligned}$$

由此可得

$$\sup_{\frac{1}{2}<|\phi(\omega)|<1}\frac{|g(\omega)|}{\varphi^{-1}(\frac{1}{1-|\omega|^2})(1-|\phi(\omega)|^2)^{\alpha-1}}\le\sup_{\frac{1}{2}<|\phi(\omega)|<1}\frac{2|\phi(\omega)||g(\omega)|}{\varphi^{-1}(\frac{1}{1-|\omega|^2})(1-|\phi(\omega)|^2)^{\alpha-1}}<\infty. \tag{3.4}$$

利用 $k_1<\infty$, 有

$$\sup_{|\phi(\omega)|\le\frac{1}{2}}\frac{|g(\omega)|}{\varphi^{-1}(\frac{1}{1-|\omega|^2})(1-|\phi(\omega)|^2)^{\alpha-1}}\le k_1\left(\frac{4}{3}\right)^{\alpha-1}<\infty. \tag{3.5}$$

由 (3.4) 和 (3.5) 式即可得到 (3.2) 式.

反之, 假设 $k_2<\infty$, 对于任何 $f\in\mathcal{Z}^\alpha\backslash\{0\}$, 由引理 2.1 (iii), 有

$$\begin{aligned}S_\varphi\left(\frac{(C_\phi^g f)'(z)}{C\|f\|_{\mathcal{Z}^\alpha}}\right) \ \ &\le \ \ \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)\varphi\left(\frac{k_2\varphi^{-1}(\frac{1}{1-|z|^2})(1-|\phi(z)|^2)^{\alpha-1}|f'(\phi(z))|}{C\|f\|_{\mathcal{Z}^\alpha}}\right)\\ &\le \ \ \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)\varphi\left(\frac{\frac{2}{\alpha-1}k_2}{C}\varphi^{-1}\left(\frac{1}{1-|z|^2}\right)\right)\le 1,\end{aligned}$$

其中 $C\ge\frac{2}{\alpha-1}k_2$. 故存在一个常数 C, 使得 $\|C_\phi^g f\|_{\mathcal{B}^\varphi}\le C\|f\|_{\mathcal{Z}^\alpha}$, 即 $C_\phi^g:\mathcal{Z}^\alpha\to\mathcal{B}^\varphi$ 是有界的.

定理 3.3 设 $g\in H(\mathbb{D})$, ϕ 为 $\mathbb{D}$ 的解析自映射, $\alpha>1$. 则 $C_\phi^g:\mathcal{Z}^\alpha\to\mathcal{B}^\varphi$ 是紧算子当且仅当 $C_\phi^g:\mathcal{Z}^\alpha\to\mathcal{B}^\varphi$ 是有界算子, 且

$$\lim_{|\phi(z)|\to1}\frac{|g(z)|}{\varphi^{-1}(\frac{1}{1-|z|^2})(1-|\phi(z)|^2)^{\alpha-1}}=0. \tag{3.6}$$

证 假设 $C_\phi^g:\mathcal{Z}^\alpha\to\mathcal{B}^\varphi$ 是紧算子, 则 $C_\phi^g:\mathcal{Z}^\alpha\to\mathcal{B}^\varphi$ 是有界算子. 令 $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathbb{D}$ 中的序列且 $|\phi(z_n)|\to1$,$n\to\infty$. 取函数 $h_n(z)=\frac{(1-|\phi(z_n)|^2)^2}{(1-\overline{\phi(z_n)}z)^\alpha}$, 由定理 3.2 的证明知 $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\|h_n\|_{\mathcal{Z}^\alpha}<\infty$. 同时易见 $\{h_n\}$ 在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛于零, 则由引理 2.2, $\|C_\phi^g h_n\|_{\mathcal{B}^\varphi}\to0$, $n\to\infty$. 则

$$1\ge S_\varphi\left(\frac{(C_\phi^g h_n)'(z_n)}{\|C_\phi^g f_n\|_{\mathcal{B}^\varphi}}\right)\ge(1-|z_n|^2)\varphi\left(\frac{\alpha|\phi(z_n)||g(z_n)|}{(1-|\phi(z_n)|^2)^{\alpha-1}\|C_\phi^g h_n\|_{\mathcal{B}^\varphi}}\right),$$

由此可得

$$\frac{|\phi(z_n)||g(z_n)|}{\varphi^{-1}(\frac{1}{1-|z_n|^2})(1-|\phi(z_n)|^2)^{\alpha-1}} \le \frac{1}{\alpha}\|C_\phi^g h_n\|_{\mathcal{B}^\varphi}.$$

故

$$\lim_{|\phi(z_n)|\to 1} \frac{|g(z_n)|}{\varphi^{-1}(\frac{1}{1-|z_n|^2})(1-|\phi(z_n)|^2)^{\alpha-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|\phi(z_n)||g(z_n)|}{\varphi^{-1}(\frac{1}{1-|z_n|^2})(1-|\phi(z_n)|^2)^{\alpha-1}} = 0.$$

反之, 假设 $C_\phi^g : \mathcal{Z}^\alpha \to \mathcal{B}^\varphi$ 是有界算子且 (3.6) 式成立, 则仿照定理 3.1, 可得 $k_1 < \infty$, 且对于任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta \in (0,1)$, 使得只要 $\delta < |\phi(z)| < 1$, 就有

$$\frac{|g(z)|}{\varphi^{-1}(\frac{1}{1-|z|^2})(1-|\phi(z)|^2)^{\alpha-1}} < \frac{\alpha-1}{2}\epsilon. \tag{3.7}$$

设 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为 $\mathcal{Z}^\alpha$ 中的任意有界序列且在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛于零, 令 $K = \{z \in \mathbb{D} : |\phi(z)| \le \delta\}$, 又 $(C_\phi^g f_n)(0) = 0$, 则由 $k_1 < \infty$ 及 (3.7) 式可得

$$\begin{aligned}\|C_\phi^g f_n\|_{\mathcal{B}^\varphi} &\le \sup_{z\in K} \frac{|g(z)|}{\varphi^{-1}(\frac{1}{1-|z|^2})}|f_n'(\phi(z))| + \sup_{z\in\mathbb{D}\setminus K} \frac{\frac{2}{\alpha-1}|g(z)|}{\varphi^{-1}(\frac{1}{1-|z|^2})(1-|\phi(z)|^2)^{\alpha-1}} \\ &\le k_1 \sup_{|\omega|\le\delta} |f_n'(\omega)| + \epsilon.\end{aligned}$$

由于 $\{f_n\}$ 在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛于零, 则由 Cauchy 估计, $\{f_n'\}$ 也在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛于零, 特别地, $\{\omega : |\omega| \le \delta\}$ 为 $\mathbb{D}$ 的紧子集, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{|\omega|\le\delta} |f_n'(\omega)| = 0$, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} \|C_\phi^g f_n\|_{\mathcal{B}^\varphi} = 0$. 由引理 2.2 可得 $C_\phi^g : \mathcal{Z}^\alpha \to \mathcal{B}^\varphi$ 是紧算子.

4 $C_\phi^g : \mathcal{Z}^\alpha \to \mathcal{Z}^\varphi$ 的有界性和紧性

本部分我们给出广义复合算子 $C_\phi^g : \mathcal{Z}^\alpha \to \mathcal{Z}^\varphi$ 的有界性和紧性的特征.

定理 4.1 设 $g \in H(\mathbb{D})$, ϕ 为 $\mathbb{D}$ 的解析自映射, $0 < \alpha < 1$. 则 $C_\phi^g : \mathcal{Z}^\alpha \to \mathcal{Z}^\varphi$ 是有界算子当且仅当

$$k_3 = \sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{|g'(z)|}{\varphi^{-1}(\frac{1}{1-|z|^2})} < \infty, \tag{4.1}$$

$$k_4 = \sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{|\phi'(z)||g(z)|}{\varphi^{-1}(\frac{1}{1-|z|^2})(1-|\phi(z)|^2)^{\alpha}} < \infty. \tag{4.2}$$

证 假设 $C_\phi^g : \mathcal{Z}^\alpha \to \mathcal{Z}^\varphi$ 是有界算子, 即对于所有 $f \in \mathcal{Z}^\alpha$, 都存在一个常数 C 使得 $\|C_\phi^g f\|_{\mathcal{Z}^\varphi} \le C\|f\|_{Z^\alpha}$. 取函数 $f(z) = z \in \mathcal{Z}^\alpha$, 则

$$S_\varphi\left(\frac{(C_\phi^g f)''(z)}{C\|f\|_{\mathcal{Z}^\alpha}}\right) = S_\varphi\left(\frac{g'(z)}{C}\right) = \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)\varphi\left(\frac{|g'(z)|}{C}\right) \le 1,$$

则 (4.1) 式成立. 取函数 $f(z) = z^2 \in \mathcal{Z}^\alpha$, 显然有 $\|f\|_{\mathcal{Z}^\alpha} = 2$, 则

$$S_\varphi\left(\frac{(C_\phi^g f)''(z)}{C\|f\|_{\mathcal{Z}^\alpha}}\right) = \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)\varphi\left(\frac{|\phi(z)g'(z)+\phi'(z)g(z)|}{C}\right) \le 1.$$

由此可得

$$\frac{|\phi'(z)||g(z)|-|\phi(z)||g'(z)|}{\varphi^{-1}(\frac{1}{1-|z|^2})}<\infty,$$

利用 $\phi(z)$ 的有界性和 $k_3<\infty$, 即可得到

$$k_5=\frac{|\phi'(z)||g(z)|}{\varphi^{-1}(\frac{1}{1-|z|^2})}<\infty. \tag{4.3}$$

对于任何 $z\in\mathbb{D}$ 及非零的 $b\in\mathbb{D}$, 令

$$p_b(z)=\frac{(1-|b|^2)^2}{\bar{b}(1-\bar{b}z)^\alpha}-\alpha\int_0^z\frac{1-|b|^2}{(1-\bar{b}\lambda)^\alpha}d\lambda,$$

则

$$\begin{aligned}\sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)^\alpha|p_b''(z)| &\le \sup_{z\in\mathbb{D}}(1+|z|)^\alpha(1-|z|)^\alpha\frac{\alpha(\alpha+1)(1+|b|)^2(1-|b|)^2|b|}{(1-|z|)^\alpha(1-|b|)^2}\\ &\quad+\sup_{z\in\mathbb{D}}(1+|z|)^\alpha(1-|z|)^\alpha\frac{\alpha^2(1+|b|)(1-|b|)|b|}{(1-|z|)^\alpha(1-|b|)}\\ &\le 4\cdot 2^\alpha\cdot\alpha(\alpha+1)+2\cdot 2^\alpha\alpha^2<\infty,\end{aligned}$$

从而 $p_b\in\mathcal{Z}^\alpha$. 令 $b=\phi(\omega)$, $\omega\in\mathbb{D}$ 且 $\frac{1}{2}<|\phi(\omega)|<1$, 则

$$p'_{\phi(\omega)}(\phi(\omega))=0,\quad p''_{\phi(\omega)}(\phi(\omega))=\frac{\alpha\overline{\phi(\omega)}}{(1-|\phi(\omega)|^2)^\alpha}. \tag{4.4}$$

由 $C_\phi^g:\mathcal{Z}^\alpha\to\mathcal{Z}^\varphi$ 的有界性知, 存在一个常数 C, 使得 $\|C_\phi^g p_{\phi(\omega)}\|_{\mathcal{Z}^\varphi}\le C$, 则由 (4.4) 式,

$$\begin{aligned}1 &\ge S_\varphi\left(\frac{(C_\phi^g p_{\phi(\omega)})''(z)}{C}\right)\ge\sup_{\frac{1}{2}<|\phi(\omega)|<1}(1-|\omega|^2)\varphi\left(\frac{|(C_\phi^g p_{\phi(\omega)})''(\omega)|}{C}\right)\\ &= \sup_{\frac{1}{2}<|\phi(\omega)|<1}(1-|\omega|^2)\varphi\left(\frac{\alpha|\phi(\omega)||\phi'(\omega)||g(\omega)|}{C(1-|\phi(\omega)|^2)^\alpha}\right).\end{aligned}$$

由此可得

$$\sup_{\frac{1}{2}<|\phi(\omega)|<1}\frac{|\phi'(\omega)||g(\omega)|}{\varphi^{-1}(\frac{1}{1-|\omega|^2})(1-|\phi(\omega)|^2)^\alpha}\le\sup_{\frac{1}{2}<|\phi(\omega)|<1}\frac{2|\phi(\omega)||\phi'(\omega)||g(\omega)|}{\varphi^{-1}(\frac{1}{1-|\omega|^2})(1-|\phi(\omega)|^2)^\alpha}<\infty. \tag{4.5}$$

利用 $k_5<\infty$, 有

$$\sup_{|\phi(\omega)|\le\frac{1}{2}}\frac{|\phi'(\omega)||g(\omega)|}{\varphi^{-1}(\frac{1}{1-|\omega|^2})(1-|\phi(\omega)|^2)^\alpha}\le k_5\left(\frac{4}{3}\right)^\alpha<\infty. \tag{4.6}$$

则由 (4.5) 和 (4.6), (4.2) 式成立.

反之, 假设 $k_3, k_4 < \infty$, 对于任何 $f \in \mathcal{Z}^\alpha\backslash\{0\}$, 由引理 2.1(i), 有

$$
\begin{aligned}
&S_\varphi\bigg(\frac{(C_\phi^g f)''(z)}{C\|f\|_{\mathcal{Z}^\alpha}}\bigg)\\
\leq\ & \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)\varphi\bigg(\frac{k_3\varphi^{-1}(\frac{1}{1-|z|^2})|f'(\phi(z))| + k_4\varphi^{-1}(\frac{1}{1-|z|^2})(1-|\phi(z)|^2)^\alpha|f''(\phi(z))|}{C\|f\|_{\mathcal{Z}^\alpha}}\bigg)\\
\leq\ & \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)\varphi\bigg(\frac{\frac{2}{1-\alpha}k_3+k_4}{C}\varphi^{-1}\bigg(\frac{1}{1-|z|^2}\bigg)\bigg)\leq 1,
\end{aligned}
$$

其中 $C \geq \frac{2}{1-\alpha}k_3 + k_4$, 并且利用了事实

$$\sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|\phi(z)|^2)^\alpha|f''(\phi(z))| \leq \|f\|_{\mathcal{Z}^\alpha}.$$

故存在一个常数 C, 使得 $\|C_\phi^g f\|_{\mathcal{Z}^\varphi} \leq C\|f\|_{\mathcal{Z}^\alpha}$, 即 $C_\phi^g : \mathcal{Z}^\alpha \to \mathcal{Z}^\varphi$ 是有界的.

定理 4.2　设 $g \in H(\mathbb{D})$, ϕ 为 $\mathbb{D}$ 的解析自映射, $0 < \alpha < 1$. 则 $C_\phi^g : \mathcal{Z}^\alpha \to \mathcal{Z}^\varphi$ 是紧算子当且仅当 $C_\phi^g : \mathcal{Z}^\alpha \to \mathcal{Z}^\varphi$ 是有界算子, 且

$$\lim_{|\phi(z)|\to 1}\frac{|\phi'(z)||g(z)|}{\varphi^{-1}(\frac{1}{1-|z|^2})(1-|\phi(z)|^2)^\alpha} < \infty. \tag{4.7}$$

证　假设 $C_\phi^g : \mathcal{Z}^\alpha \to \mathcal{Z}^\varphi$ 是紧算子, 则显然 $C_\phi^g : \mathcal{Z}^\alpha \to \mathcal{Z}^\varphi$ 是有界的. 令 $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathbb{D}$ 中的序列使 $|\phi(z_n)| \to 1$, $n \to \infty$. 令

$$p_n(z) = \frac{(1-|\phi(z_n)|^2)^2}{\overline{\phi(z_n)}(1-\overline{\phi(z_n)}z)^\alpha} - \alpha\int_0^z \frac{1-|\phi(z_n)|^2}{(1-\overline{\phi(z_n)}\lambda)^\alpha}d\lambda,$$

由定理 4.1 的证明知 $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|p_n\|_{\mathcal{Z}^\alpha} < \infty$. 同时易见 $\{p_n\}$ 在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛于零, 由引理 2.2, $\|C_\phi^g p_n\|_{\mathcal{Z}^\varphi} \to 0$, $n \to \infty$. 则

$$1 \geq S_\varphi\bigg(\frac{(C_\phi^g p_n)''(z_n)}{\|C_\phi^g p_n\|_{\mathcal{Z}^\varphi}}\bigg) \geq (1-|z_n|^2)\varphi\bigg(\frac{\alpha|\phi(z_n)||\phi'(z_n)||g(z_n)|}{(1-|\phi(z_n)|^2)^\alpha\|C_\phi^g p_n\|_{\mathcal{Z}^\varphi}}\bigg),$$

由此可得

$$\frac{|\phi(z_n)||\phi'(z_n)||g(z_n)|}{\varphi^{-1}(\frac{1}{1-|z_n|^2})(1-|\phi(z_n)|^2)^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha}\|C_\phi^g p_n\|_{\mathcal{Z}^\varphi}.$$

故

$$\lim_{|\phi(z_n)|\to 1}\frac{|\phi'(z_n)||g(z_n)|}{\varphi^{-1}(\frac{1}{1-|z_n|^2})(1-|\phi(z_n)|^2)^\alpha} = \lim_{n\to\infty}\frac{|\phi(z_n)||\phi'(z_n)||g(z_n)|}{\varphi^{-1}(\frac{1}{1-|z_n|^2})(1-|\phi(z_n)|^2)^\alpha} = 0.$$

反之, 假设 $C_\phi^g : \mathcal{Z}^\alpha \to \mathcal{Z}^\varphi$ 有界且 (4.7) 式成立, 则由定理 4.1, 可得 $k_3, k_5 < \infty$, 且对于任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta \in (0,1)$, 使得只要 $\delta < |\phi(z)| < 1$, 就有

$$\frac{|\phi'(z)||g(z)|}{\varphi^{-1}(\frac{1}{1-|z|^2})(1-|\phi(z)|^2)^\alpha} < \epsilon. \tag{4.8}$$

令 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为 $\mathcal{Z}^\alpha$ 中的任意有界序列, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\|f_n\|_{\mathcal{Z}^\alpha}\le L$, 且在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛于零, 令 $K=\{z\in\mathbb{D}:|\phi(z)|\le\delta\}$, 又 $(C_\phi^g f_n)(0)=0$, 则由 $k_3,k_5<\infty$ 及 (4.8) 式可得

$$\begin{aligned}\|C_\phi^g f_n\|_{\mathcal{Z}^\varphi} &\le |f_n'(\phi(0))||g(0)|+\sup_{z\in\mathbb{D}}\frac{|g'(z)|}{\varphi^{-1}(\frac{1}{1-|z|^2})}|f_n'(\phi(z))|+\sup_{z\in K}\frac{|\phi'(z)||g(z)|}{\varphi^{-1}(\frac{1}{1-|z|^2})}|f_n''(\phi(z))|\\ &\quad+\sup_{z\in\mathbb{D}\setminus K}\frac{|\phi'(z)||g(z)|(1-|\phi(z)|^2)^\alpha|f_n''(\phi(z))|}{\varphi^{-1}(\frac{1}{1-|z|^2})(1-|\phi(z)|^2)^\alpha}\\ &\le |f_n'(\phi(0))||g(0)|+k_3\sup_{z\in\mathbb{D}}|f_n'(\phi(z))|+k_5\sup_{|\omega|\le\delta}|f_n''(\omega)|+L\epsilon.\end{aligned}$$

由于 $\{f_n\}$ 在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛于零, 则由引理 2.3 知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{z\in\mathbb{D}}|f_n'(\phi(z))|=0$. 再由 Cauchy 估计, $\{f_n'\}$, $\{f_n''\}$ 也在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛于零. 特别地, $\{\phi(0)\}$, $\{\omega:|\omega|\le\delta\}$ 均为 $\mathbb{D}$ 的紧子集, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty}|f_n'(\phi(0))|=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{|\omega|\le\delta}|f_n''(\omega)|=0$. 从而由引理 2.2 可得 $C_\phi^g:\mathcal{Z}^\alpha\to\mathcal{Z}^\varphi$ 是紧算子.

定理 4.3 设 $g\in H(\mathbb{D})$, ϕ 为 $\mathbb{D}$ 的解析自映射, $\alpha>1$. 则 $C_\phi^g:\mathcal{Z}^\alpha\to\mathcal{Z}^\varphi$ 是有界算子当且仅当

$$k_6=\sup_{z\in\mathbb{D}}\frac{|g'(z)|}{\varphi^{-1}(\frac{1}{1-|z|^2})(1-|\phi(z)|^2)^{\alpha-1}}<\infty, \tag{4.9}$$

$$k_7=\sup_{z\in\mathbb{D}}\frac{|\phi'(z)||g(z)|}{\varphi^{-1}(\frac{1}{1-|z|^2})(1-|\phi(z)|^2)^{\alpha}}<\infty. \tag{4.10}$$

证 假设 $C_\phi^g:\mathcal{Z}^\alpha\to\mathcal{Z}^\varphi$ 是有界算子, 利用定理 4.1, 可证得 $k_3<\infty$, 通过取函数 $p_b(z)$, 进行相似的讨论, 即可证得 (4.10) 式. 下证 (4.9) 式, 对于任何 $z\in\mathbb{D}$, 及非零的 $b\in\mathbb{D}$, 令

$$q_b(z)=\frac{(1-|b|^2)^2}{\bar{b}(1-\bar{b}z)^\alpha},$$

则易证 $q_b\in\mathcal{Z}^\alpha$. 令 $b=\phi(\omega),\omega\in\mathbb{D}$ 且 $\frac12<|\phi(\omega)|<1$, 直接计算可得

$$q_{\phi(\omega)}'(\phi(\omega))=\frac{\alpha}{(1-|\phi(\omega)|^2)^{\alpha-1}},\quad q_{\phi(\omega)}''(\phi(\omega))=\frac{\alpha(\alpha+1)\overline{\phi(\omega)}}{(1-|\phi(\omega)|^2)^{\alpha}}. \tag{4.11}$$

另外由 $C_\phi^g:\mathcal{Z}^\alpha\to\mathcal{Z}^\varphi$ 的有界性知, 存在一个常数 C, 使得 $\|C_\phi^g q_{\phi(\omega)}\|_{\mathcal{Z}^\varphi}\le C$, 则由 (4.11) 式,

$$\begin{aligned}1 &\ge S_\varphi\left(\frac{(C_\phi^g q_{\phi(\omega)})''(z)}{C}\right)\ge\sup_{\frac12<|\phi(\omega)|<1}(1-|\omega|^2)\varphi\left(\frac{|(C_\phi^g q_{\phi(\omega)})''(\omega)|}{C}\right)\\ &=\sup_{\frac12<|\phi(\omega)|<1}(1-|\omega|^2)\varphi\left(\frac{\left|\frac{\alpha}{(1-|\phi(\omega)|^2)^{\alpha-1}}g'(\omega)+\frac{\alpha(\alpha+1)\overline{\phi(\omega)}}{(1-|\phi(\omega)|^2)^\alpha}\phi'(\omega)g(\omega)\right|}{C}\right)\\ &\ge\sup_{\frac12<|\phi(\omega)|<1}(1-|\omega|^2)\varphi\left(\frac{\alpha|g'(\omega)|}{C(1-|\phi(\omega)|^2)^{\alpha-1}}-\frac{\alpha(\alpha+1)|\phi(\omega)||\phi'(\omega)||g(\omega)|}{C(1-|\phi(\omega)|^2)^\alpha}\right).\end{aligned}$$

利用 $k_7<\infty$ 可得

$$\sup_{\frac12<|\phi(\omega)|<1}\frac{|g'(\omega)|}{\varphi^{-1}(\frac{1}{1-|\omega|^2})(1-|\phi(\omega)|^2)^{\alpha-1}}\le C+(\alpha+1)k_7<\infty. \tag{4.12}$$

利用 $k_3<\infty$, 我们有

$$\sup_{|\phi(\omega)|\leq\frac{1}{2}}\frac{|g'(\omega)|}{\varphi^{-1}(\frac{1}{1-|\omega|^2})(1-|\phi(\omega)|^2)^{\alpha-1}}\leq k_3\left(\frac{4}{3}\right)^{\alpha-1}. \tag{4.13}$$

由 (4.12) 和 (4.13) 式即可得到 (4.9) 式.

反之, 假设 $k_6,k_7<\infty$, 根据引理 2.1(iii), 仿照定理 4.1 的方法, 不难证得 $C_\phi^g:\mathcal{Z}^\alpha\to\mathcal{Z}^\varphi$ 是有界算子.

定理 4.4 设 $g\in H(\mathbb{D})$, ϕ 为 $\mathbb{D}$ 的解析自映射, $\alpha>1$. 则 $C_\phi^g:\mathcal{Z}^\alpha\to\mathcal{Z}^\varphi$ 是紧算子当且仅当 $C_\phi^g:\mathcal{Z}^\alpha\to\mathcal{Z}^\varphi$ 是有界算子, 且

$$\lim_{|\phi(z)|\to1}\frac{|g'(z)|}{\varphi^{-1}(\frac{1}{1-|z|^2})(1-|\phi(z)|^2)^{\alpha-1}}<\infty, \tag{4.14}$$

$$\lim_{|\phi(z)|\to1}\frac{|\phi'(z)||g(z)|}{\varphi^{-1}(\frac{1}{1-|z|^2})(1-|\phi(z)|^2)^{\alpha}}<\infty. \tag{4.15}$$

证 假设 $C_\phi^g:\mathcal{Z}^\alpha\to\mathcal{Z}^\varphi$ 是紧算子, 则显然 $C_\phi^g:\mathcal{Z}^\alpha\to\mathcal{Z}^\varphi$ 是有界的. 令 $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathbb{D}$ 中的序列使 $|\phi(z_n)|\to1$ $(n\to\infty)$. 则利用定理 4.2, 通过取函数 $p_n(z)$, 可证得 (4.15) 式成立. 下证 (4.14) 式, 令

$$q_n(z)=\frac{(1-|\phi(z_n)|^2)^2}{\overline{\phi(z_n)}(1-\overline{\phi(z_n)}z)^\alpha},$$

则 $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\|q_n\|_{\mathcal{Z}^\alpha}<\infty$ 且 $\{q_n\}$ 在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛于零, 由引理 2.2, $\|C_\phi^g q_n\|_{\mathcal{Z}^\varphi}\to0$, $n\to\infty$. 则有

$$\begin{aligned}
1 &\geq S_\varphi\left(\frac{(C_\phi^g q_n)''(z_n)}{\|C_\phi^g q_n\|_{\mathcal{Z}^\varphi}}\right)\\
&\geq (1-|z_n|^2)\varphi\left(\frac{\left|\frac{\alpha g'(z_n)}{(1-|\phi(z_n)|^2)^{\alpha-1}}+\frac{\alpha(\alpha+1)\overline{\phi(z_n)}\phi'(z_n)g(z_n)}{(1-|\phi(z_n)|^2)^\alpha}\right|}{\|C_\phi^g q_n\|_{\mathcal{Z}^\varphi}}\right)\\
&\geq (1-|z_n|^2)\varphi\left(\frac{\alpha|g'(z_n)|}{\|C_\phi^g q_n\|_{\mathcal{Z}^\varphi}(1-|\phi(z_n)|^2)^{\alpha-1}}-\frac{\alpha(\alpha+1)|\phi(z_n)||\phi'(z_n)||g(z_n)|}{\|C_\phi^g q_n\|_{\mathcal{Z}^\varphi}(1-|\phi(z_n)|^2)^\alpha}\right).
\end{aligned}$$

由此可得

$$\frac{|g'(z_n)|}{\varphi^{-1}(\frac{1}{1-|z_n|^2})(1-|\phi(z_n)|^2)^{\alpha-1}}\leq\frac{1}{\alpha}\|C_\phi^g q_n\|_{\mathcal{Z}^\varphi}+\frac{(\alpha+1)|\phi(z_n)||\phi'(z_n)||g(z_n)|}{\varphi^{-1}(\frac{1}{1-|z_n|^2})(1-|\phi(z_n)|^2)^\alpha}, \tag{4.16}$$

利用 (4.15), (4.16) 式即可得

$$\lim_{|\phi(z_n)|\to1}\frac{|g'(z_n)|}{\varphi^{-1}(\frac{1}{1-|z_n|^2})(1-|\phi(z_n)|^2)^{\alpha-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{|g'(z_n)|}{\varphi^{-1}(\frac{1}{1-|z_n|^2})(1-|\phi(z_n)|^2)^{\alpha-1}}=0.$$

反之, 假设 (4.14), (4.15) 式成立, 则利用引理 2.1(iii), 仿照定理 4.2 和定理 3.3 的过程, 易证 $C_\phi^g:\mathcal{Z}^\alpha\to\mathcal{Z}^\varphi$ 是紧算子.

参 考 文 献

[1] Ramos Fernández J C. Composition operators on Bloch-Orlicz type spaces[J]. Appl. Math. Comput., 2010, 217(7): 3392–3402.

[2] Yang C, Chen F, Wu P. Generalized composition operators on Zygmund-Orlicz type spaces and Bloch-Orlicz type spaces[J]. J. Function Spaces, Volume 2014, Article ID 549370: 9 pages.

[3] Guo Z, Wu Z. Generalized composition operators from Area Nevanlinna spaces to Zygmund-type spaces[J]. Intern. J. Math. Anal., 2015 9(4): 151–159.

[4] Li H, Liu P. Composition operators between generally weighted Bloch space and $Q^q_{\log}$ space[J]. Banach J. Math. Anal., 2009, 3: 99–110.

[5] Li H, Tian C, Zhang X. Integral-type operators from weighted Bergman spaces to weighted Bloch spaces on the unit ball[J]. J. Math., 2012, 32(6): 1100–1104.

[6] Li H, Ma T. Generalized composition operators from B_μ spaces to $Q_{K,\omega}(p,q)$ spaces[J]. Abstr. Appl. Anal., 2014, Art. ID 897389, 6 pages. Doi: 10.1155/2014/897389.

[7] Li S, Stević S. Generalized composition operators on Zygmund spaces and Bloch type spaces[J]. J. Mathematical Anal. Appl., 2008, 338(2): 1282–1295.

[8] Li S. Products of weighted composition operators and differentiation operator on H^∞[J]. J. Math., 2010, 30(2): 212–216.

[9] Stević S, Sharma A. K. Generalized composition operators on weighted Hardy spaces[J]. Appl. Math. Comput., 2012, 218(17): 8347–8352.

[10] Ye S, Hu Q. Weighted composition operators on the Zygmund spaces[J]. Abstr. Appl. Anal., 2012, Art. ID 462482, 18 pages. Doi:10.1155/2012/462482.

[11] Esmaeili K, Lindström M. Weighted composition operators between Zygmund type spaces and their essential norms[J]. Integr. Equ. Oper. Theory, 2013, 75: 473–490.

[12] Cowen C C, MacCluer B D. Composition operators on spaces of analytic functions[M]. Boca Roton: CRC Press, 1995.

GENERALIZED COMPOSITION OPERATORS FROM α-ZYGMUND SPACES TO BLOCH-ORLICZ SPACES AND ZYGMUND-ORLICZ SPACES

LI Hai-ying, GUO Zhi-tao

(*College of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxiang 453007, China*)

Abstract: In this paper, generalized composition operators from α-Zygmund spaces to Bloch-Orlicz spaces and Zygmund-Orlicz spaces are investigated. Using the function theory properties of the symbol function ϕ, the analytic function g and the convex function φ, the necessary and sufficient conditions of the boundedness and compactness of generalized composition operators are obtained. Some corresponding results about Zygmund spaces are extended.

Keywords: α-Zygmund spaces; Bloch-Orlicz spaces; Zygmund-Orlicz spaces; boundedness; compactness

2010 MR Subject Classification: 47B38; 47B37