Vol. 35 (2015)
No. 6

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

随机环境中马氏链函数加权和的极限定理

高 萍

(华侨大学厦门工学院高等数学教学系, 福建 厦门 361021)

摘 要: 本文研究随机环境中马氏链函数的强极限定理, 得到了随机环境中马氏链函数加权和的强收敛性成立的若干充分条件.

关键词: 随机环境; 马氏链; 加权和; 极限定理

MR(2010) **主题分类号**: 60F15 **中图分类号**: O211.4

文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2015)06-1379-09

1 引言与引理

20 世纪 80 年代初, Cogburn 等人开始研究随机环境中马氏链的一般理论, 在遍历理论和中心极限定理等领域中取得一系列丰富的理论成果 [1–3]. 本文讨论随机环境中马氏链函数加权和的强收敛性, 并给出随机环境中马氏链函数强收敛性成立的一系列充分条件, 最后也进一步给出了马氏环境中马氏链函数强收敛性的部分结论.

除特别说明, 本文沿用文献 [1–3] 中的记号和术语. 设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 是一概率空间, $(X,\mathcal{A})$ 和 $(\Theta,\mathcal{B})$ 均为任意可测空间, $\vec{\xi}=\{\xi_i:n=0,1,2,\cdots\}$ 和 $\vec{X}=\{X_n:n=0,1,2,\cdots\}$ 分别是 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上取值于 Θ 和 X 的随机序列, $\{P(\theta):\theta\in\Theta\}$ 是 $(X,\mathcal{A})$ 上的一族转移函数, 且假设对任意 $A\in\mathcal{A},P(\cdot;\cdot,A)$ 关于 $\mathcal{B}\times\mathcal{A}$ 可测的. $K(\cdot,\cdot)$ 是 $(\Theta,\mathcal{B})$ 上的转移函数, 且假设对任意 $B\in\mathcal{B},K(\cdot,B)$ 关于 $\mathcal{B}$ 可测的. 对任意序列 $\vec{\eta}=\{\eta_n:n=0,1,2,\cdots\}$, 记 $\vec{\eta}_k^r=\{\eta_n:k\le n\le r\}$, $0\le k\le r\le\infty$.

定义 如果对任意 $A\in\mathcal{A},n\ge 0$ 有

$$P(X_0\in A|\vec{\xi})=P(X_0\in A|\xi_0),P(X_{n+1}\in A|\vec{X}_0^n,\vec{\xi})=P(\xi_n;X_n,A), \tag{1.1}$$

则称 $\vec{X}$ 为随机环境 $\vec{\xi}$ 中的马氏链, 称 $\vec{\xi}$ 为随机环境序列. 若 $\vec{\xi}$ 是一马氏序列, 则称 $\vec{X}$ 为马氏环境 $\vec{\xi}$ 中的马氏链.

引理 1 [5] 设 $\vec{X}$ 为随机环境 $\vec{\xi}$ 中的马氏链, 则 $\{(X_n,\vec{\xi}_n^\infty):n\ge 0\}$ 是马氏链.

引理 2 [7] $\vec{\xi}$ 是一步转移概率为 $K(\theta,B)$ 的马氏链, $\vec{X}$ 为随机环境 $\vec{\xi}$ 中的马氏链的充分必要条件是双链 $\{(X_n,\xi_n):n\ge 0\}$ 是一步转移概率为 $Q(x,\theta;A\times B)=K(\theta,B)P(\theta;x,A)$ 的马氏链.

引理 3 [4] 设 $\{s_n,n\ge 1\}$, $\{t_n,n\ge 1\}$ 为非负数列. 则对任意 $n\ge 1,s_n\le t_n$, 有

$$\sum_{n=1}^{+\infty}|u_n|^{s_n}<+\infty\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}|u_n|^{t_n}<+\infty.$$

*收稿日期: 2014-05-21 接收日期: 2014-12-17

作者简介: 高萍 (1983–), 女, 湖北武汉, 讲师, 主要研究方向: 概率极限理论, 金融数学.

2 主要结论与证明

设下文中出现的 M 均表示正常数, 且在不同地方取不同的值, 并约定 $(X_{-k}\equiv 0, Y_{-k}\equiv 0, \forall k\geq 1)$.

定理 设 $\{(X_n,Y_n):n\geq 0\}$ 是 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上取值于 $X\times Y$ 上的马氏序列, $\{f_n:n\geq 0\}$ 是 $(X,\mathcal{A})$ 可测函数列, 对正常数序列 $a_n, n\geq 0$, 满足 $a_n\uparrow+\infty$, 当 $p\in[1,2)$ 时, 若有

$$\sum_{m=0}^{\infty}E\varphi_m(|f_m(X_m)|/a_m^{1/p})<+\infty, \tag{2.1}$$

这里 $\varphi_n(x)$ 是偶函数序列, 在 $(0,+\infty)$ 内取正值, 且 $\forall n\geq 0$, 存在 $\lambda>0$ 使得下述条件之一成立:

(a) $\varphi_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内不减, 当 $0<x\leq 1$, $\varphi_n(x)\geq\lambda x^{\theta}(0<\theta\leq 1)$, 且

$$E(f_n(X_n)|X_{n-k},\ Y_{n-k})=0,(k\geq 1).$$

(b) $\varphi_n(x)\geq\begin{cases}\lambda x^{\alpha}(0<\alpha\leq 2), & 0<x\leq 1,\\ \lambda x^{\beta}(\beta\geq 1), & x>1,\end{cases}$

则 $\forall k\geq 1$, 有

$$\sum_m\frac{f_m(X_m)-E(f_m(X_m)|X_{m-k},Y_{m-k})}{a_m^{1/p}}\ \text{a.s. 收敛}, \tag{2.2}$$

及

$$\lim_{n\to\infty}a_n^{-1/p}\sum_{m=0}^{n}(f_m(X_m)-E(f_m(X_m)|X_{m-k},Y_{m-k}))=0\ \text{a.s.}. \tag{2.3}$$

证 先考虑 $k=1$ 的情况. 记

$$A_m=\frac{f_m(X_m)I_{\{|f_m(X_m)|\geq a_m^{1/p}\}}}{a_m^{1/p}};B_m=\frac{E(f_m(X_m)I_{\{|f_m|\geq a_m^{1/p}\}}|X_{m-1},Y_{m-1})}{a_m^{1/p}};$$
$$C_m=\frac{f_m(X_m)I_{\{|f_m(X_m)|<a_m^{1/p}\}}-E(f_m(X_m)I_{\{|f_m(X_m)|<a_m^{1/p}\}}|X_{m-1},Y_{m-1})}{a_m^{1/p}}.$$

则要证明 $\sum\limits_m\frac{f_m(X_m)-E(f_m(X_m)|X_{m-1},Y_{m-1})}{a_m^{1/p}}$ a.s. 收敛, 只需分别证明 $\sum\limits_m A_m$, $\sum\limits_m B_m$ 和 $\sum\limits_m C_m$ 是 a.s. 收敛的.

首先证明 $\sum\limits_m A_m$ 收敛.

条件 (a) 下, $\varphi_m(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内不减, $\varphi_m(1)\geq\lambda$, 可知

$$\begin{aligned}&\sum_{m=0}^{\infty}P(|f_m(X_m)|\geq a_m^{1/p})=\sum_{m=0}^{\infty}EI_{\{|f_m(X_m)|\geq a_m^{1/p}\}}\\ \leq& M\sum_{m=0}^{\infty}E\varphi_m\left(\frac{|f_m(X_m)|}{a_m^{1/p}}\right)I_{\{|f_m(X_m)|\geq a_m^{1/p}\}}\leq M\sum_{m=0}^{\infty}E\varphi_m\left(\frac{|f_m(X_m)|}{a_m^{1/p}}\right)<+\infty;\end{aligned}$$

条件 (b) 下, 当 $|f_m(X_m)|\ge a_m^{1/p}$ 时, 由 $\varphi_m(x)\ge\lambda x^\beta(\beta\ge1),(x>1)$, 可知

$$\begin{aligned}&\sum_{m=0}^{\infty}P(|f_m(X_m)|\ge a_m^{1/p})=\sum_{m=0}^{\infty}EI_{\{|f_m(X_m)|\ge a_m^{1/p}\}}\\ \le&\sum_{m=0}^{\infty}E\frac{|f_m(X_m)|^\beta}{a_m^{\beta/p}}I_{\{|f_m(X_m)|\ge a_m^{1/p}\}}\le M\sum_{m=0}^{\infty}E\varphi_m\left(\frac{|f_m(X_m)|}{a_m^{1/p}}\right)<+\infty,\end{aligned}$$

因此, 无论是在条件 (a) 还是在条件 (b) 下, 都有 $\sum_{m=0}^{\infty}P(|f_m(X_m)|\ge a_m^{1/p})<+\infty$. 由 Borel-Cantelli 引理知 $P(\bigcap_{k=0}^{\infty}\bigcup_{m=k}^{\infty}\{|f_m(X_m)|\ge a_m^{1/p}\})=0$, 从而有

$$P(\bigcap_{k=0}^{\infty}\bigcup_{m=k}^{\infty}\{f_m(X_m)\ne f_m(X_m)I_{\{|f_m(X_m)|\}<a_m^{1/p}}\})=0.$$

即除去一个概率为零的集外 $\sum_m\frac{f_m(X_m)}{a_m^{1/p}}$ 与 $\sum_m\frac{f_m(X_m)}{a_m^{1/p}}I_{\{|f_m(X_m)|<a_m^{1/p}\}}$ 同敛散, 从而可知 $\sum_m A_m$ a.s. 收敛.

下面来证明 $\sum_m B_m$ a.s. 收敛.

当满足条件 (a) 时, 由 $E(f_m(X_m)|X_{m-1},Y_{m-1})=0$ 知

$$|E(\frac{f_m(X_m)}{a_m^{1/p}}I_{\{|f_m(X_m)|\ge a_m^{1/p}\}}|X_{m-1},Y_{m-1})|=|E(\frac{f_m(X_m)}{a_m^{1/p}}I_{\{|f_m(X_m)|<a_m^{1/p}\}}|X_{m-1},Y_{m-1})|,$$

而 $0<\theta\le1$, 故有

$$\begin{aligned}&E(\sum_{m=0}^{\infty}|E(\frac{f_m(X_m)}{a_m^{1/p}}I_{\{|f_m(X_m)|\ge a_m^{1/p}\}}|X_{m-1},Y_{m-1})|)\\ =&E(\sum_{m=0}^{\infty}|E(\frac{f_m(X_m)}{a_m^{1/p}}I_{\{|f_m(X_m)|<a_m^{1/p}\}}|X_{m-1},Y_{m-1})|)\le\sum_{m=0}^{\infty}E(\frac{|f_m(X_m)|}{a_m^{1/p}}I_{\{|f_m(X_m)|<a_m^{1/p}\}})\\ \le&\sum_{m=0}^{\infty}E(\frac{|f_m(X_m)|^\theta}{a_m^{\theta/p}}I_{\{|f_m(X_m)|<a_m^{1/p}\}})\le M\sum_{m=0}^{\infty}E\varphi_m\left(\frac{|f_m(X_m)|}{a_m^{1/p}}\right)<+\infty;\end{aligned}\tag{2.4}$$

而在条件 (b) 下

$$\begin{aligned}&E(\sum_{m=0}^{\infty}|E(\frac{f_m(X_m)}{a_m^{1/p}}I_{\{f_m(X_m)\ge a_m^{1/p}\}}|X_{m-1},Y_{m-1})|)\le\sum_{m=0}^{\infty}E(\frac{|f_m(X_m)|}{a_m^{1/p}}I_{\{|f_m(X_m)|\ge a_m^{1/p}\}})\\ \le&\sum_{m=0}^{\infty}E(\frac{|f_m(X_m)|^\beta}{a_m^{\beta/p}}I_{\{|f_m(X_m)|\ge a_m^{1/p}\}})\le M\sum_{m=0}^{\infty}E\varphi_m\left(\frac{|f_m(X_m)|}{a_m^{1/p}}\right)<+\infty,\end{aligned}$$

故无论是在条件 (a) 还是在条件 (b) 下, 都有 $\sum\limits_m B_m$ a.s. 收敛.

下面证明 $\sum\limits_m C_m$ 收敛.

记 $\mathcal{B}_m=\sigma(\vec{X}_0^m,\vec{Y}_0^m)$, 由 $\{(X_m,Y_m):m\geq 0\}$ 的马氏性, 易知 $(C_m,\mathcal{B}_m)$ 为鞅差序列, 从而 $\forall i\neq j$, 有 $EC_iC_j=0$, 则

$$\begin{aligned}
&E|\sum_{k=m}^n C_k|^2=\sum_{k=m}^n EC_k^2\\
=&\sum_{k=m}^n E\Bigg(\frac{f_k^2(X_k)}{a_k^{2/p}}I_{\{|f_k(X_k)|<a_k^{1/p}\}}+E^2(\frac{f_k(X_k)}{a_k^{1/p}}I_{\{|f_k(X_k)|<a_k\}}|X_{k-1},Y_{k-1})\\
&-2\frac{f_k(X_k)}{a_k^{1/p}}I_{\{|f_k(X_k)|<a_k^{1/p}\}}E(\frac{f_k(X_k)}{a_k^{1/p}}I_{\{|f_k(X_k)|<a_k^{1/p}\}}|X_{k-1},Y_{k-1})\Bigg)\\
\leq&M\sum_{k=m}^n E(\frac{|f_k(X_k)|^2}{a_k^{2/p}}I_{\{|f_k(X_k)|<a_k^{1/p}\}}).
\end{aligned}\tag{2.5}$$

在条件 (a) 下,

$$\begin{aligned}
&E\left(|\sum_{k=m}^n C_k|^2\right)\leq M\sum_{k=m}^n E\left(\frac{|f_k(X_k)|^2}{a_k^{2/p}}I_{\{|f_k(X_k)|<a_k^{1/p}\}}\right)\\
\leq&M\sum_{k=m}^n E\left(\frac{|f_k(X_k)|^\theta}{a_k^{\theta/p}}I_{\{|f_k(X_k)|<a_k^{1/p}\}}\right)\leq M\sum_{k=m}^n E\varphi_k\left(\frac{|f_k(X_k)|}{a_k^{1/p}}\right);
\end{aligned}$$

在条件 (b) 下,

$$\begin{aligned}
&E\left(|\sum_{k=m}^n C_k|^2\right)\leq M\sum_{k=m}^n E\left(\frac{|f_k(X_k)|^2}{a_k^{2/p}}I_{\{|f_k(X_k)|<a_k^{1/p}\}}\right)\\
\leq&M\sum_{k=m}^n E\left(\frac{|f_k(X_k)|^\alpha}{a_k^{\alpha/p}}I_{\{|f_k(X_k)|<a_k^{1/p}\}}\right)\leq M\sum_{k=m}^n E\varphi_k\left(\frac{|f_k(X_k)|}{a_k^{1/p}}\right),
\end{aligned}$$

从而由 (2.1) 式知, 无论条件 (a) 还是 (b) 下都有 $\sum\limits_{k=0}^n C_k$ 是 L^2 收敛, 又因为 $\{C_m,\mathcal{B}_m\}$ 是鞅差序列, 从而 $\sum\limits_k C_k$ a.s. 收敛, 所以 $\sum\limits_m \frac{f_m(X_m)-E(f_m(X_m)|X_{m-1},Y_{m-1})}{a_m^{1/p}}$ a.s. 收敛. 再由 Kronecker 引理可知

$$\lim_{n\to\infty}a_n^{-1/p}\sum_{m=0}^n(f_m(X_m)-E(f_m(X_m)|X_{m-1},Y_{m-1}))=0\ \text{a.s.},$$

即对 $k=1$ 的情形, (2.2) 式和 (2.3) 式均成立.

下面考虑 $k>1$ 的情形.

由 $\{(X_m, Y_m): m \geq 0\}$ 的马氏性知, $\forall n = 1, 2, 3, \cdots, k-1, \{(X_{mk+n}, Y_{mk+m}): m \geq 0\}$ 是马氏链, 结合 (2.1) 式, 无论是在条件 (a) 还是条件 (b) 下都有

$$\sum_{m=0}^{\infty} E\varphi_{mk+n}(|f_{mk+n}(X_{mk+n})|/a_{mk+n}^{1/p}) < +\infty.$$

因此, $\forall n = 1, 2, 3, \cdots, k-1$, 有

$$\sum_m \frac{f_{mk+n}(X_{mk+n}) - E(f_{mk+n}(X_{mk+n})|X_{mk+n-k}, Y_{mk+n-k})}{a_{mk+n}^{1/p}} \text{ a.s. 收敛,}$$

从而

$$\begin{aligned}
&\sum_m \frac{f_m(X_m) - E(f_m(X_m)|X_{m-k}, Y_{m-k})}{a_m^{1/p}} \\
=&\sum_m \sum_{n=0}^{k-1} \frac{f_{mk+n}(X_{mk+n}) - E(f_{mk+n}(X_{mk+n})|X_{mk+n-k}, Y_{mk+n-k})}{a_{mk+n}^{1/p}} \\
=&\sum_{n=0}^{k-1} \sum_m \frac{f_{mk+n}(X_{mk+n}) - E(f_{mk+n}(X_{mk+n})|X_{mk+n-k}, Y_{mk+n-k})}{a_{mk+n}^{1/p}}
\end{aligned}$$

a.s. 收敛, 亦即 (2.2) 式对 $k > 1$ 成立, 而由 kroncker 引理知 (2.3) 式对 $k > 1$ 成立.

注 1 将定理中的条件 (a) 减弱至新的条件 (a)' 如下:

(a)' $\varphi_n(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内不减, 当 $0 < x \leq 1$, $\varphi_n(x) \geq \lambda x^{\gamma_n} (\gamma_n > 2)$, 且

$$E(f_n(X_n)|X_{n-k},\ Y_{n-k}) = 0, (k \geq 1).$$

同时将条件 (2.1) 加强为

$$\sum_{m=0}^{\infty} [E\varphi_m(|f_m(X_m)|/a_m^{1/p})]^{1/\gamma_m} < +\infty, \tag{2.6}$$

则此时我们仍可以得到定理的结论 (2.2) 和 (2.3) 式.

事实上, 由引理 3 可知

$$\sum_{m=0}^{\infty} [E\varphi_m(|f_m(X_m)|/a_m^{1/p})]^{1/\gamma_m} < +\infty \Rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} E\varphi_m(|f_m(X_m)|/a_m^{1/p}) < +\infty,$$

通过上述讨论, 在条件 (a)' 下, 只需验证 (2.4) 式及 $\sum_{k=0}^{n} C_k$ 是 L^2 收敛即可, 其它类似. 利用 Jensen 不等式, 这两点不难验证.

$$\begin{aligned}
&E\left(\sum_{m=0}^{\infty} |E(\frac{f_m(X_m)}{a_m^{1/p}} I_{\{|f_m(X_m)| \geq a_m^{1/p}\}}|X_{m-1}, Y_{m-1})|\right) \\
\leq &\sum_{m=0}^{\infty} E\left(\frac{|f_m(X_m)|}{a_m^{1/p}} I_{\{|f_m(X_m)| < a_m^{1/p}\}}\right) \leq \sum_{m=0}^{\infty} \left(E\frac{|f_m(X_m)|^{\gamma_m}}{a_m^{\gamma_m/p}} I_{\{|f_m(X_m)| < a_m^{1/p}\}}\right)^{1/\gamma_m} \\
\leq &M \sum_{m=0}^{\infty} \left[E\varphi_m\left(\frac{|f_m(X_m)|}{a_m^{1/p}}\right)\right]^{1/\gamma_m} < +\infty.
\end{aligned}$$

另一方面, 由 (2.5) 式知

$$\begin{aligned}E|\sum_{k=m}^{n}C_k|^2 \le & M\sum_{k=m}^{n}E\left(\frac{|f_k(X_k)|^2}{a_k^{2/p}}I_{\{|f_k(X_k)|<a_k^{1/p}\}}\right)\le M\sum_{k=m}^{n}E\left(\frac{|f_k(X_k)|}{a_k^{1/p}}I_{\{|f_k(X_k)|<a_k^{1/p}\}}\right)\\ \le & M\sum_{k=m}^{n}\left(E\frac{|f_k(X_k)|^{\gamma_k}}{a_k^{\gamma_k/p}}I_{\{|f_k(X_k)|<a_k^{1/p}\}}\right)^{1/\gamma_k}\le M\sum_{k=m}^{n}\left[E\varphi_k\left(\frac{|f_k(X_k)|}{a_k^{1/p}}\right)\right]^{1/\gamma_k},\end{aligned}$$

结合 (2.6) 式, 从而 $\sum\limits_{k=0}^{n}C_k$ 是 L^2 收敛. 故在此种改进的条件下, 前文中定理的结论 (2.2) 和 (2.3) 式仍成立.

作为定理的应用, 当 $\varphi_n(x)$ 取特殊函数的时候, 可以得到不同形式的若干推论 (以下推论仅针对 $p=1$ 的情况).

推论 1 设 $\{(X_n,Y_n):n\ge 0\}$ 是 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上取值于 $X\times Y$ 上的马氏序列, $\{f_n:n\ge 0\}$ 是 $(X,\mathcal{A})$ 可测函数列, 对正常数序列 $\{a_n;n\ge 0\}$, 满足 $a_n\uparrow +\infty$. $\{g_n(x);n\ge 0\}$ 为偶函数序列, 在 $(0,+\infty)$ 内取正值, 对任意 $n\ge 0$, 若下列条件之一成立:

(c) $g_n(x), \frac{x}{g_n(x)}$ 在 $(0,+\infty)$ 内不减, 且 $E(f_n(X_n)|X_{n-k},\ Y_{n-k})=0\ (k\ge 1)$;

(d) $\frac{g_n(x)}{x}, \frac{x^2}{g_n(x)}$ 在 $(0,+\infty)$ 内不减,

且同时满足

$$\sum_{m=0}^{\infty}E\left(\frac{g_m(|f_m(X_m)|)}{g_m(a_m)}\right)<+\infty,$$

则 $\forall k\ge 1$, 有

$$\sum_{m}\frac{f_m(X_m)-E(f_m(X_m)|X_{m-k},Y_{m-k})}{a_m}\ \text{a.s. 收敛} \tag{2.7}$$

及

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\sum_{m=0}^{n}(f_m(X_m)-E(f_m(X_m)|X_{m-k},Y_{m-k}))=0\ \text{ a.s.}, \tag{2.8}$$

这里约定 $(X_{-k}\equiv 0, Y_{-k}\equiv 0, \forall k\ge 1)$.

证 $\forall x\in(0,+\infty)$, 取 $\varphi_n(y)=\frac{g_n(xy)}{g_n(x)}, y\in\mathbf{R}$, 则 $\varphi_n(y)$ 在 $(0,+\infty)$ 内为取正值的偶函数, 且

$$\varphi_n\left(\frac{|f_n(X_n)|}{a_n}\right)=\frac{g_n(|f_n(X_n)|)}{g_n(a_n)}.$$

不难验证在条件 (c)、(d) 下, $\varphi_n(y)$ 是分别满足定理中的条件 (a) 和 (b) 的, 由定理的结论知, 命题得证.

注 2 推论 1 是对文献 [5] 中定理 1 的推广, 增添了 $g_n(x)$ 的另一个可选条件 (c), 从而也扩展了文献 [5] 中推论 1 和推论 2 的条件范围.

推论 1’ 设 $\{(X_n,Y_n):n\ge 0\}$ 是 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上取值于 $X\times Y$ 上的马氏序列,$\{f_n:n\ge 0\}$ 是 $(X,\mathcal{A})$ 可测函数列, 对正常数序列 $\{a_n;n\ge 0\}$, 满足 $a_n\uparrow +\infty$. $\{g_n(x);n\ge 0\}$ 为偶函数序列, 在 $(0,+\infty)$ 内取正值, 满足对任意 $n\ge 0$, $g_n(x)$ 和 $\frac{x^{\gamma n}}{g_n(x)}$ 在 $(0,+\infty)$ 内不减, 其中 $\gamma_n>2$,

且 $E(f_n(X_n)|X_{n-k},\ Y_{n-k})=0\ (k\geq 1)$. 若

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(E\frac{g_m(|f_m(X_m)|)}{g_m(a_m)}\right)^{1/\gamma_m}<+\infty,$$

则 (2.7) 和 (2.8) 式成立.

证 由注 1, 结合推论 1 的讨论, 命题得证.

特别地, 在推论 1 中, 取 $g_n(x)=|x|^r,\ r\in(0,2]$, 即可得到如下结论.

推论 2 设 $\{(X_n,Y_n):n\geq 0\}$ 是 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上取值于 $X\times Y$ 上的马氏序列,$\{f_n:n\geq 0\}$ 是 $(X,\mathcal{A})$ 可测函数列, 对正常数序列 $\{a_n;n\geq 0\}$, 满足 $a_n\uparrow+\infty$. 若

$$\sum_{m=0}^{+\infty}a_m^{-r}E|f_m(X_m)|^r<+\infty,\ r\in(0,2],$$

且当 $r\in(0,1]$ 时, $\forall n\geq 0$,

$$E(f_n(X_n)|X_{n-k},\ Y_{n-k})=0\ \ (k\geq 1).$$

则 (2.7)、(2.8) 两式成立.

证 注意到, 当取 $g_n(x)=|x|^r,\ r\in(0,2]$ 时, $\varphi_n(x)=|x|^r$, 结合注 1 及推论 1 的讨论, 再由前文引理的结论, 命题得证.

推论 3 设 $\{(X_n,Y_n):n\geq 0\}$ 是 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上取值于 $X\times Y$ 上的马氏序列, $\{f_n:n\geq 0\}$ 是 $(X,\mathcal{A})$ 可测函数列, $0\leq a_n\uparrow\infty$, 若 $\forall k\geq 1$ 满足下列条件之一:

(e) $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}E\left(\frac{|f_m(X_m)|^r}{{a_m}^r+|f_m(X_m)|^r}\right)<\infty\ \ (0<r<1)$, 且 $E(f_m(X_m)|X_{m-k},Y_{m-k})=0$;

(f) $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}E\left(\frac{|f_m(X_m)|^r}{a_m|f_m(X_m)|^{r-1}+a_m^r}\right)<\infty\ \ (1\leq r\leq 2)$,

则 (2.7) 和 (2.8) 式成立.

证 当 (e) 成立时, 取 $\varphi_n(x)=\frac{|x|^r}{1+|x|^r},\ 0<r<1$; 当 (f) 成立时, 取 $\psi_n(x)=\frac{|x|^r}{1+|x|^{r-1}},\ 1\leq r\leq 2$. 则 $\forall n\geq 0$, $\varphi_n(x)$ 和 $\psi_n(x)$ 均为偶函数, 且在 $(0,+\infty]$ 内不减, 取正值. 并且可以验证: 当 $x>1$ 时,

$$\psi_n(x)\geq x/2;$$

当 $0<x\leq 1$ 时,

$$\varphi_n(x)\geq x^r/2\ \ (0<r<1),\ \psi_n(x)\geq x^r/2\ \ (1\leq r\leq 2).$$

由定理可知, 命题成立.

下面, 我们利用上文的结论推导随机环境下马氏链函数加权和的极限定理, 及马氏环境下马氏链函数加权和的相关极限结论.

推论 4 设 $\vec{X}$ 为随机环境 $\vec{\xi}$ 中的马氏链, $\{f_n:n\geq 0\}$ 是 $(X,\mathcal{A})$ 可测函数列, 对正常数序列 $a_n,n\geq 0$, 满足 $a_n\uparrow+\infty$, 且当 $p\in[1,2)$ 时满足条件 (2.1). 偶函数序列 $\varphi_n(x)$ 在

$(0,+\infty)$ 内取正值, 且 $\forall n\geq 0$, 存在 $\lambda>0$, 使得 $\varphi_n(x)$ 满足定理中 (a)、(b) 条件之一, 则 $\forall k\geq 1$, 有

$$\sum_m \frac{f_m(X_m)-E(f_m(X_m)|X_{m-k},\vec{\xi}_{m-k}^{\infty})}{a_m^{1/p}} \text{ a.s. 收敛}, \tag{2.9}$$

及

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{-1/p}\sum_{m=0}^{n}(f_m(X_m)-E(f_m(X_m)|X_{m-k},\vec{\xi}_{m-k}^{\infty}))=0 \text{ a.s..} \tag{2.10}$$

证 由引理 1 知 $\{(X_n,\vec{\xi}_n^{\infty}):n\geq 0\}$ 是马氏链, 从而由定理知 (2.9) 和 (2.10) 式均成立.

推论 5 在推论 4 的条件下, 有

$$\sum_m \frac{f_m(X_m)-E(f_m(X_m)|X_{m-1},\xi_{m-1})}{a_m^{1/p}} \text{ a.s. 收敛} \tag{2.11}$$

及

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{-1/p}\sum_{m=0}^{n}(f_m(X_m)-E(f_m(X_m)|X_{m-1},\xi_{m-1}))=0 \text{ a.s..} \tag{2.12}$$

证 由 (1.1) 式知, $\forall A\in\mathcal{A}$, 有

$$P(X_m\in A|\vec{X}_0^{m-1},\vec{\xi}_0^{\infty})=P(\xi_{m-1};X_{m-1},A)\in\sigma(X_{m-1},\xi_{m-1}),$$

从而由单调类定理知 $E(f_m(X_m)|\vec{X}_0^{m-1};\vec{\xi}_0^{\infty})\in\sigma(X_{m-1},\xi_{m-1})$, 继而有

$$E(f_m(X_m)|\vec{X}_0^{m-1};\vec{\xi}_0^{\infty})=E(f_m(X_m)|X_{m-1},\xi_{m-1}).$$

由条件数学期望的平滑性不难推得 $E(f_m(X_m)|X_{m-1},\vec{\xi}_{m-1}^{\infty})=E(f_m(X_m)|X_{m-1},\xi_{m-1})$. 从而由推论 4 知 (2.11)、(2.12) 式成立.

推论 6 设 $\vec{\xi}$ 是一步转移概率为 $K(\theta,B)$ 的马氏链, $\vec{X}$ 为马氏环境 $\vec{\xi}$ 中的马氏链, $\{f_n:n\geq 0\}$ 是 $(X,\mathcal{A})$ 可测函数列, 对正常数序列 $a_n,n\geq 0$, 满足 $a_n\uparrow+\infty$, 且当 $p\in[1,2)$ 时满足条件 (2.1). 偶函数序列 $\varphi_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内取正值, 且 $\forall n\geq 0$, 存在 $\lambda>0$, 使得 $\varphi_n(x)$ 满足定理中 (a)、(b) 条件之一, 则 $\forall k\geq 1$, 有

$$\sum_m \frac{f_m(X_m)-E(f_m(X_m)|X_{m-k},\xi_{m-k})}{a_m^{1/p}} \text{ a.s. 收敛}$$

及

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{-1/p}\sum_{m=0}^{n}(f_m(X_m)-E(f_m(X_m)|X_{m-k},\xi_{m-k}))=0 \text{ a.s..}$$

证 由引理 2 知 $\{(X_n,\xi_n):n\geq 0\}$ 是马氏链, 从而根据定理结论可知推论 6 成立.

注意, 由前文讨论可知, 推论 4、5、6 关于随机环境中马氏链的结论在推论 1、2、3 的条件下仍成立, 这里不再重复叙述.

参 考 文 献

[1] Cogburn R. Markov chains in random environments: the case of Markovian environment[J]. Ann Prob., 1980, 8(3): 908–916.

[2] Cogburn R. The ergodic theory of Markov chains in random environments[J]. Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 1984, 66(2): 109–128.

[3] Cogburn R. On the central limit theorem for Markov chains in random environments[J]. Ann Prob., 1991, 19(2): 587–604.

[4] 袁德美. 随机变量的截尾与几个经典强大数定律的推广 [J]. 应用概率统计, 2005, 21(1): 61–66.

[5] 郭明乐. 随机环境中马氏链的强大数定律 [J]. 应用概率统计, 2004, 20(2): 154–160.

[6] 李应求, 王苏明, 胡杨利. 马氏环境中马氏链的一类强极限定理 [J]. 数学进展, 2008, 37(5): 539–550.

[7] 李应求, 汪和松, 王众. 马氏环境中马氏链转移概率几何平均及其泛函的强极限定理 [J]. 数学物理学报 A 辑, 2011, 31(2): 508–517.

[8] 施建华. 不同分布两两 NQD 列的一类强大数定律 [J]. 应用数学学报, 2011, 34(1): 122–129.

[9] 李应求. 关于马氏环境中马氏链的几点注记 [J]. 数学进展, 1999, 28(4): 358–360.

[10] 林正炎, 陆传荣, 苏中根. 概率极限理论基础 (第一版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 1999.

[11] 黄海午, 王定成, 彭江艳. φ 混合随机变量加权和的完全收敛性 (英文)[J]. 数学杂志, 2014, 34(1):31–36.

THE LIMIT THEOREMS OF WEIGHTED SUMS OF FUNCTIONS FOR MARKOV CHAINS IN RANDOM ENVIRONMENTS

GAO Ping

(*Dpt. of Advanced Mathematics Education, Xiamen Institute of Technology Huaqiao University, Xiamen 361021,China*)

Abstract: In this paper, we study the strong limit theorems for Markov Chains in random environments, and obtain some sufficient conditions for the strong convergence of the weighted sums of Markov chains in random environments.

Keywords: random environments; Markov chains; weighted sums; limit theorems

2010 MR Subject Classification: 60F15