Vol. 35 (2015)
No. 5

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

两个相关代数上的一对同构模范畴

万冰蓉
(南昌工程学院理学院, 江西 南昌 330099)

摘 要: 本文研究了 Artin 代数 A 与其子代数模范畴中反变有限子范畴之间的关系. 利用范畴同构, 获得了代数 A 上投射维数有限的子模范畴 $\mathcal{P}^{\infty}(A)$ 在有限生成的左 A 模范畴 A-mod 上反变有限的一个条件, 推广了关于子范畴 $\mathcal{P}^{\infty}(A)$ 反变有限性的结果.

关 键 词: 范畴同构; 反变有限子范畴; 有限投射维数
MR(2010) **主题分类号:** 16E30; 16G30 **中图分类号:** O153.3
文献标识码: A **文章编号:** 0255-7797(2015)05-1215-10

1 引言

我们先固定一些符号的含义. 设 A 是一个 Artin 代数, A-mod 表示有限生成的左 A - 模范畴, 所有投射维数有限的 A - 模做成的 A-mod 的满子范畴记为 $\mathcal{P}^{\infty}(A)$, $\mathrm{rad}(A)=J$, e 是 A 中的一个非零幂等元, $f=1-e$, $\mathrm{pd}_A(Af/Jf)<\infty$, Ae/Je 中的每一个单子模都是投射维数无限的.

反变有限子范畴与共变有限子范畴统称为同调有限子范畴. 这一概念是上世纪 80 年代初由 Auslander 与 Smaløi提出的, 最初用于研究几乎可裂序列的存在性 [1,2]. 事实上, 同调有限子范畴对表示论中的很多理论的研究具有重要的作用, 如几乎可裂序列理论与倾斜理论 [2–5]. 因此, 研究同调有限子范畴的判别是很有意义的 [4,6–8].

上世纪九十年代初, Auslander 与 Reiten 讨论了子范畴 $\mathcal{P}^{\infty}(A)$ 反变有限的条件, 给出了几个很有意义的结论, 例如: 如果 $\mathcal{P}^{\infty}(A)$ 在 A-mod 中反变有限, 那么 A 的有限维数有限 [4]. 这给出了有限维数猜想成立的一个充分条件, 也说明了子范畴 $\mathcal{P}^{\infty}(A)$ 的反变有限性与 A 的有限维数密切相关. 文 [9] 与 [10] 将 Auslander 与 Reiten 在 [4] 中给出的子范畴 $\mathcal{P}^{\infty}(A)$ 在 A-mod 中反变有限的一些条件推广到了其它一些子范畴上. 文 [11] 利用代数 A 的余同调条件控制了代数 eAe 的有限维数, 给出了 eAe 有限维数有限的一些充分条件. 一般地, 研究一个环的有限维数往往是将问题归结到研究一个所有单模都具有无限投射维数的环上 [12–14].

文 [14] 中的命题 3.1 表明每一个单 eAe- 模都是投射维数无限的. 受到文 [11–14] 的启发, 本文主要研究: 在上述条件下, 子范畴 $\mathcal{P}^{\infty}(A)$ 与 $\mathcal{P}^{\infty}(eAe)$ 的反变有限性有何联系?

任意给定一个 A - 模 X, 定义 $\mathrm{Fac}({}_AX)$ 为 A-mod 的一个满子范畴, 它由所有 ${}_AX$ 的有限直和的商模构成; $\mathrm{Gen}({}_AX)$ 为 A-mod 的一个满子范畴, 它由所有与 $\mathrm{Fac}({}_AX)$ 中的模同构的 A - 模构成, 即

$$\mathrm{Fac}({}_AX)=\{X^n/M\mid M\subset X^n, n\in\mathbb{Z}^+\},$$
$$\mathrm{Gen}({}_AX)=\{T\in A\text{-mod}\mid T\simeq X^n/M, M\subset X^n, n\in\mathbb{Z}^+\}.$$

*收稿日期: 2014-01-07 接收日期: 2014-06-18
作者简介: 万冰蓉 (1978–), 女, 江西吉安, 讲师, 主要研究方向: 代数表示论.

再任意给定 X 的一个子模 T, 取 X 中满足下列两个条件的子模 U : (1) $T \subset U$; (2) $eU = eT$. 在上述所有的 X 的子模 U 构成的集合中定义偏序"$\succeq$"为子模的包含"$\supset$", 由 Zorn 引理和 X 长度的有限性有: 在上述所有的 X 的子模 U 构成的集合中存在唯一一个极大子模, 记为 $\mathrm{Max}_X(T)$. 因为 $T \subset \mathrm{Max}_X(T)$, 所以存在一个自然满同态 $X/T \twoheadrightarrow X/\mathrm{Max}_X(T)$. 为简便起见, 以后将 $X/\mathrm{Max}_X(T)$ 简记为 $X/\mathrm{Max}(T)$, 这样的记法不会产生歧异.

我们再来定义 $\mathrm{Fac}({}_AX)$ 的一个满子范畴:

$$\overline{\mathrm{Fac}}({}_AX) = \{X^n/T \mid T \subset X^n, T = \mathrm{Max}_{X^n}(T), n \in \mathbb{Z}^+\}.$$

注意子范畴 $\mathrm{Fac}({}_AX)$ 与 $\overline{\mathrm{Fac}}({}_AX)$ 对于同构不封闭.

我们研究了 A-mod 的子范畴 $\overline{\mathrm{Fac}}({}_AAe)$ 与 eAe-mod 的子范畴 $\mathrm{Fac}({}_{eAe}eAe)$ 之间的关系, 得到:

定理 1.1 设 A 是一个 Artin 代数, $\mathrm{rad}A = J$, $0 \neq e = e^2$, $f = 1-e$, $\mathrm{pd}_A(Af/Jf) < \infty$, Ae/Je 中的每一个单子模都是投射维数无限的, 则 $\overline{\mathrm{Fac}}({}_AAe)$ 与 $\mathrm{Fac}({}_{eAe}eAe)$ 同构.

并且利用范畴 $\overline{\mathrm{Fac}}({}_AAe)$ 与 $\mathrm{Fac}({}_{eAe}eAe)$ 之间的同构函子证明了:

定理 1.2 设 A 是一个 Artin 代数, $\mathrm{rad}A = J$, $0 \neq e = e^2$, $f = 1-e$, $\mathrm{pd}_A(Af/Jf) < \infty$, Ae/Je 中的每一个单子模都是投射维数无限的. 若 $\mathrm{pd}_{eAe}eAf < \infty$, 则 $\mathcal{P}^\infty(A)$ 在 A-mod 中反变有限的充分必要条件是 $\mathcal{P}^\infty(eAe)$ 在 eAe-mod 中反变有限.

在本文中, 对任意的 $M, B, C \in A$-mod, $g \in \mathrm{Hom}_A(M,B)$, $h \in \mathrm{Hom}_A(B,C)$, gh 表示 g 与 h 从左到右的复合, 它是一个从 M 到 C 的态射.

2 预备知识

首先介绍三个重要概念.

定义 2.1 [4] A-mod 的一个子范畴 $\mathcal{X}$ 称为一个 resolving 子范畴, 如果它满足: (1) 关于扩张封闭; (2) 关于满射的核封闭; (3) 包含所有的投射模.

显然 $\mathcal{P}^\infty(A)$ 是一个 resolving 子范畴.

定义 2.2 [4] 设 $\mathcal{X}$ 是 A-mod 的满子范畴, $C \in A$-mod. 同态 $\varphi: X \to C$, $X \in \mathcal{X}$ 被称为 C 的一个右 $\mathcal{X}$ - 逼近, 如果对任意的 $Y \in \mathcal{X}$ 及 $h \in \mathrm{Hom}_A(Y,C)$, 存在 $g \in \mathrm{Hom}_A(Y,X)$ 使得 $g\varphi = h$. 若使 $g\varphi = \varphi$ 的同态 $g: X \to X$ 必为同构, 则称 φ 为 C 的一个极小右 $\mathcal{X}$ - 逼近.

定义 2.3 [4] 设 $\mathcal{X}$ 是 A-mod 的满子范畴. 若对任意的 $C \in A$-mod, 都存在 C 的一个右 $\mathcal{X}$ - 逼近, 则称 $\mathcal{X}$ 在 A-mod 中反变有限.

下面介绍一些相关结论. 任意给定一个 A - 模 M, 令 $eM = \{ey | y \in M\}$. 显然 eM 是一个 eAe - 模, 且若 X 是 M 的子模, 则 eX 是 eM 的子模.

下列引理给出了 $eM = 0$ 的一个充要条件. 根据 [14] 的论述. 该引理是显然的.

引理 2.4 设 M 是一个 A - 模. 则 $eM = 0$ 的充要条件是 M 的每一个合成因子的投射维数都有限.

根据 $\mathrm{Max}_X(T)$ 的定义立即可得:

推论 2.5 设 T 是 ${}_AX$ 的一个子模. 则 A - 模 $\mathrm{Max}_X(T)/T$ 的每一个合成因子的投射维数都有限.

因为 Ae/Je 的每一个合成因子的投射维数都无限, 所以容易证明: 若 $G \in \overline{\mathrm{Fac}}({}_A Ae)$, 则 $\mathrm{top}(G)$ 的每一个合成因子的投射维数都无限. 此外, 我们还能得到子范畴 $\overline{\mathrm{Fac}}({}_A X)$ 的下列重要性质.

引理 2.6 设 $G \in \mathrm{Fac}({}_A X)$, 则 $G \in \overline{\mathrm{Fac}}({}_A X)$ 的充分必要条件是 $\mathrm{soc}(G)$ 的每一个合成因子的投射维数都无限.

证 必要性. 反证. 设 $G = X^n/\mathrm{Max}(T)$, 其中 n 为一个正整数, $T \subset X^n$. 假设 G 中存在一个单子模 S 具有有限的投射维数, 则 X^n 中存在一个子模 K, 使得 $\mathrm{Max}(T) \subsetneq K$ 且 $K/\mathrm{Max}(T) \simeq S$. 由引理 2.4 有 $e(K/\mathrm{Max}(T)) = 0$, 从而 $eK \subset e\mathrm{Max}(T)$. 此外, $e\mathrm{Max}(T) \subset eK$. 因此 $eK = e\mathrm{Max}(T) = eT$, 这与 $\mathrm{Max}(T)$ 的定义矛盾.

充分性. 设 $G = X^n/T$, 我们只需证明 $T = \mathrm{Max}_{x^n}(T)$. 反证. 若 $T \neq \mathrm{Max}_{x^n}(T)$, 则 $0 \neq \mathrm{Max}_{x^n}(T)/T \subset G$, 从而 $0 \neq \mathrm{soc}(\mathrm{Max}_{x^n}(T)/T) \subset \mathrm{soc}(G)$. 这说明 $\mathrm{soc}(G)$ 中存在投射维数有限的合成因子. 矛盾.

下面介绍由 Sikko 与 Smalø 给出的一个重要引理. 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 是 A-mod 中的两个满子范畴 (总假定是可加的且在同构下封闭), 定义 A-mod 中的满子范畴 ${}_{\mathcal{A}}\mathcal{E}^{\mathcal{B}}$, 它的对象为所有 A - 模 E 的直和项, 其中 E 是短正合列 $0 \to A \to E \to B \to 0 (A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B})$ 的中间项.

引理 2.7 [15] 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 是 A-mod 中的两个满子范畴. 如果 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 在 A-mod 中都反变有限, 那么 ${}_{\mathcal{A}}\mathcal{E}^{\mathcal{B}}$ 也在 A-mod 中反变有限.

按照 Sikko-Smalø 证明引理 2.7 的思路, 能得到下列推论 2.8. 推论 2.8 的具体证明与文 [15] 中对定理 2.9(a) 的证明相似, 下面只给出简单的证明.

推论 2.8 设 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 是 A-mod 的两个满子范畴, $M \in A$-mod. 如果 M 存在一个右 $\mathcal{A}$ - 逼近, 且 $\mathcal{B}$ 在 A-mod 中反变有限, 那么 M 也存在一个右 ${}_{\mathcal{A}}\mathcal{E}^{\mathcal{B}}$ - 逼近.

证 因为 M 存在一个右 $\mathcal{A}$ - 逼近, 所以存在一个 A - 模 $C \in \mathcal{A}$ 及一个 A - 模同态 $a : C \to M$ 使得 $\mathrm{Hom}_A(\ \ ,C)|_{\mathcal{A}} \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(\ \ ,a)} \mathrm{Hom}_A(\ \ ,M)|_{\mathcal{A}}$ 是一个满态射. 考察函子间的态射: $\mathrm{Ext}_A^1(\ \ ,a)|_{\mathcal{B}} : \mathrm{Ext}_A^1(\ \ ,C)|_{\mathcal{B}} \to \mathrm{Ext}_A^1(\ \ ,M)|_{\mathcal{B}}$. 因为 $\mathcal{B}$ 在 A-mod 中反变有限, 所以函子 $\mathrm{Ext}_A^1(\ \ ,C)|_{\mathcal{B}}$ 与 $\mathrm{Ext}_A^1(\ \ ,M)|_{\mathcal{B}}$ 都是有限表现的. 令 $K = \mathrm{Ker}(\mathrm{Ext}_A^1(\ \ ,a)|_{\mathcal{B}})$, 则 K 也是有限表现的. 特别地, K 是有限生成的. 因此存在一个模 $B_K \in \mathcal{B}$ 以及一个满态射 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\ \ ,B_K)|_{\mathcal{B}} \xrightarrow{\varphi} K$. 因为 $K \subset \mathrm{Ext}_A^1(\ \ ,C)|_{\mathcal{B}}$, 而且 $\varphi_{B_K}(1_{B_K}) \in K(B_K)$, 所以 $\mathrm{Ext}_A^1(\ \ ,a)|_{\mathcal{B}}(\varphi_{B_K}(1_{B_K})) = 0$. 这表明 pushout 交换图 1

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & C & \xrightarrow{i} & E & \longrightarrow & B_K & \xrightarrow{p} & 0 \\
 & & {\scriptstyle a}\downarrow & & \downarrow & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & U & \longrightarrow & B_K & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

图 1: pushout 交换图

的下行是可裂的. 这等价于说存在一个模同态 $E \xrightarrow{\rho} M$ 满足 $i\rho = a$. 因为 $\mathcal{B}$ 在 A-mod 中反变有限, 所以存在一个 A - 模 $B \in \mathcal{B}$ 及一个模同态 $B \xrightarrow{b} M$ 满足 $\mathrm{Hom}_A(\ \ ,b)|_{\mathcal{B}} : \mathrm{Hom}_A(\ \ ,B)|_{\mathcal{B}} \to \mathrm{Hom}_A(\ \ ,M)|_{\mathcal{B}}$ 是一个满态射. 可以证明 $E \amalg B \xrightarrow{(\rho,b)} M$ 便是 M 的一个右 ${}_{\mathcal{A}}\mathcal{E}^{\mathcal{B}}$- 逼近.

最后, 介绍 Auslander 与 Reiten 给出的一个关于 resolving 子范畴的结论:

引理 2.9 [4] 设 A 是一个 Artin 代数, $\mathcal{C}$ 是 A-mod 的一个 resolving 子范畴, 则

(1) 所有存在右 $\mathcal{C}$ - 逼近的 A - 模做成的子范畴是扩张封闭的.

(2) $\mathcal{C}$ 在 A-mod 中反变有限当且仅当所有单 A - 模存在一个右 $\mathcal{C}$ - 逼近.

引理 2.9 (2) 表明子范畴 $\mathcal{P}^{\infty}(A)$ 在 A-mod 中反变有限当且仅当 Ae/Je 存在一个右 $\mathcal{P}^{\infty}(A)$ - 逼近.

3 定理 1.1 的证明

首先, 我们来建立子范畴 $\overline{\mathrm{Fac}}({}_AAe)$ 与 $\mathrm{Fac}({}_{eAe}eAe)$ 之间的同构函子.

命题 3.1 定义函子 $\Phi : \overline{\mathrm{Fac}}({}_AAe) \to \mathrm{Fac}({}_{eAe}eAe)$ 如下: 对任意的 $A^ne/N \in \overline{\mathrm{Fac}}({}_AAe)$, $\Phi(A^ne/N) = eA^ne/eN$; 对任意的 $A^le/L \in \overline{\mathrm{Fac}}({}_AAe)$ 及 $g \in \mathrm{Hom}_A(A^ne/N, A^le/L)$, $\Phi(g) : eA^ne/eN \to eA^le/eL$, $\Phi(g)(a+eN) = ea^g + eL$, $a \in eA^ne$, 其中 $g(a+N) = a^g + L$. 则 Φ 是一个共变函子.

证 (1) $\Phi(g)$ 的定义是有意义的. 因为 (i) 如果 $(a_1)^g + L = (a_2)^g + L$, 那么 $e(a_1)^g + eL = e(a_2)^g + eL$. (ii) 如果 $a \in eN \subset N$, 那么 $g(a+N) = 0$, 从而 $a^g \in L$, $ea^g \in eL$, $\Phi(g)(a+eN) = 0$.

(2) $\Phi(g)$ 是 eAe - 模同态. 因为对任意的 $a, b \in eA^ne$, 由

$$\begin{aligned}&\Phi(g)((a+eN)+(b+eN)) = e(a+b)^g + eL,\\&\Phi(g)(a+eN) + \Phi(g)(b+eN) = (ea^g + eL) + (eb^g + eL),\end{aligned}$$

且由

$$(a+b)^g + L = g((a+b)+N) = g(a+N) + g(b+N) = (a^g + L) + (b^g + L),$$

有 $e(a+b)^g - (ea^g + eb^g) \in eL$, 故

$$\Phi(g)((a+eN)+(b+eN)) = \Phi(g)(a+eN) + \Phi(g)(b+eN).$$

又因为对任意的 $c \in A$, 有

$$\begin{aligned}&g(ecea+N) = eceg(a+N) = ecea^g + L,\\&\Phi(g)(ece(a+eN)) = \Phi(g)(ecea+eN) = ecea^g + eL = ece\Phi(g)(a+eN).\end{aligned}$$

(3) 显然有 $\Phi(I_{A^ne/N}) = I_{eA^ne/eN}$.

(4) 设 $h \in \mathrm{Hom}_A(A^le/L, A^ke/K)$, 则 $\Phi(gh) = \Phi(g)\Phi(h)$. 因为若设 $h(b+L) = b^h + K$, 则对任意的 $a \in eA^ne$, $(gh)(a+N) = h(a^g + L) = (a^g)^h + K$, 因此

$$\begin{aligned}&\Phi(gh)(a+eN) = e(a^g)^h + eK;\\&\Phi(g)\Phi(h)(a+eN) = \Phi(h)(ea^g + eL) = e(ea^g)^h + eK.\end{aligned}$$

因为 $a \in eA^ne$, 所以 $ea = a$, 从而

$$a^g + L = g(a+N) = g(ea+N) = eg(a+N) = ea^g + L,$$

因此 $h(a^g+L)=h(ea^g+L)$, 故 $e(a^g)^h+eK=e(ea^g)^h+eK$, 即 $\Phi(gh)=\Phi(g)\Phi(h)$.

记集合 eA^ne 中第 i 个分量为 e, 其余分量全为零的元素为 $(0,\cdots,0,e,0,\cdots,0)^i_n$, 它同时也是集合 A^ne 中的元素. 设 n 是一个正整数, T 是 eA^ne 的一个子 eAe - 模, 令

$$\begin{aligned}AeT &= \{\Sigma_{i=1}^l(a_ieb_1^ie,a_ieb_2^ie,\cdots,a_ieb_n^ie)\mid l\in\mathbb{Z}^+,a_i\in A,\\ &\qquad (eb_1^ie,eb_2^ie,\cdots,eb_n^ie)\in T,b_k^i\in A,k=1,2,\cdots,n,i=1,2,\cdots,l\}.\end{aligned}$$

显然 AeT 是 A^ne 的一个子 A - 模, 且 $e(AeT)=eT=T$.

命题 3.2 定义函子 $\Psi:\mathrm{Fac}({}_{eAe}eAe)\to\overline{\mathrm{Fac}}({}_AAe)$ 如下: 对任意的 $eA^ne/T\in\mathrm{Fac}({}_{eAe}eAe)$, $\Psi(eA^ne/T)=A^ne/\mathrm{Max}(AeT)\in\overline{\mathrm{Fac}}({}_AAe)$; 对任意的 $h\in\mathrm{Hom}(eA^{n_1}e/T_1,eA^{n_2}e/T_2)$, 设 $h((0,\cdots,0,e,0,\cdots,0)^i_{n_1}+T_1)=(d_1^i,\cdots,d_{n_2}^i)+T_2$, $i=1,\cdots,n_1$, 定义

$$\begin{aligned}&\Psi(h):A^{n_1}e/\mathrm{Max}(AeT_1)\to A^{n_2}e/\mathrm{Max}(AeT_2):\\ &\Psi(h)((a_1,\cdots,a_{n_1})+\mathrm{Max}(AeT_1))=\sum_{i=1}^{n_1}a_i(d_1^i,\cdots,d_{n_2}^i)+\mathrm{Max}(AeT_2),\\ &(a_1,\cdots,a_{n_1})\in A^{n_1}e,\end{aligned}$$

则 Ψ 是一个共变函子.

证 (1) $\Psi(h)$ 的定义是有意义的. 因为 (i) 若

$$h((0,\cdots,0,e,0,\cdots,0)^i_{n_1}+T_1)=(d_1^i,\cdots,d_{n_2}^i)+T_2=(c_1^i,\cdots,c_{n_2}^i)+T_2,$$

则 $(d_1^i,\cdots,d_{n_2}^i)-(c_1^i,\cdots,c_{n_2}^i)\in T_2=e\mathrm{Max}(AeT_2)\subset\mathrm{Max}(AeT_2)$, 从而

$$\begin{aligned}&a_i((d_1^i,\cdots,d_{n_2}^i)-(c_1^i,\cdots,c_{n_2}^i))\in\mathrm{Max}(AeT_2),\\ &\sum_{i=1}^{n_1}a_i((d_1^i,\cdots,d_{n_2}^i)-(c_1^i,\cdots,c_{n_2}^i))\in\mathrm{Max}(AeT_2),\end{aligned}$$

故

$$\sum_{i=1}^{n_1}a_i(d_1^i,\cdots,d_{n_2}^i)+\mathrm{Max}(AeT_2)=\sum_{i=1}^{n_1}a_i(c_1^i,\cdots,c_{n_2}^i)+\mathrm{Max}(AeT_2).$$

(ii) 假设 $(a_1,\cdots,a_{n_1})\in\mathrm{Max}(AeT_1)$, 我们来证 $\sum\limits_{i=1}^{n_1}a_i(d_1^i,\cdots,d_{n_2}^i)\in\mathrm{Max}(AeT_2)$. 令 $\lambda=\sum_{i=1}^{n_1}a_i(d_1^i,\cdots,d_{n_2}^i)$. 因为 $e(a_1,\cdots,a_{n_1})\in e\mathrm{Max}(AeT_1)=T_1$, 从而由 $h(e(a_1,\cdots,a_{n_1})+T_1)=e\lambda+T_2$ 有 $e\lambda\in T_2$. 同理可证: 对任意的 $r\in A$, $er\lambda\in T_2$, 从而 A - 模 $A\lambda=\{r\lambda|r\in A\}$ 满足 $eA\lambda\subset T_2$. 由于 $e(A\lambda+AeT_2)=T_2$, 根据 $\mathrm{Max}(AeT_2)$ 的定义有 $A\lambda\subset\mathrm{Max}(AeT_2)$, 因此 $\lambda\in\mathrm{Max}(AeT_2)$.

(2) $\Psi(h)$ 是一个 A - 模同态. 因为对任意的 $(a_1,\cdots,a_{n_1}),(b_1,\cdots,b_{n_1})\in A^{n_1}e$,

$$\begin{aligned}&\Psi(h)(((a_1,\cdots,a_{n_1})+\mathrm{Max}(AeT_1))+((b_1,\cdots,b_{n_1})+\mathrm{Max}(AeT_1)))\\ =\ &\Psi(h)((a_1+b_1,\cdots,a_{n_1}+b_{n_1})+\mathrm{Max}(AeT_1))=\sum_{i=1}^{n_1}(a_i+b_i)(d_1^i,\cdots,d_{n_2}^i)+\mathrm{Max}(AeT_2)\\ =\ &\Psi(h)((a_1,\cdots,a_{n_1})+\mathrm{Max}(AeT_1))+\Psi(h)((b_1,\cdots,b_{n_1})+\mathrm{Max}(AeT_1));\end{aligned}$$

对任意的 $r \in A$,

$$\begin{aligned}&\Psi(h)(r((a_1,\cdots,a_{n_1})+\mathrm{Max}(AeT_1)))=\Psi(h)((ra_1,\cdots,ra_{n_1})+\mathrm{Max}(AeT_1))\\=&\sum_{i=1}^{n_1}ra_i(d_1^i,\cdots,d_{n_2}^i)+\mathrm{Max}(AeT_2)=r\Psi(h)((a_1,\cdots,a_{n_1})+\mathrm{Max}(AeT_1)).\end{aligned}$$

(3) 显然有 $\Psi(I_{eA^ne/T})=I_{A^ne/\mathrm{Max}(AeT)}$.

(4) 设 $g\in \mathrm{Hom}_A(eA^{n_2}e/T_2,eA^{n_3}e/T_3)$, 则 $\Psi(hg)=\Psi(h)\Psi(g)$. 我们只需证对任意的 $i=1,\cdots,n_1$, 总有

$$\begin{aligned}&\Psi(hg)((0,\cdots,0,e,0,\cdots,0)_{n_1}^i+\mathrm{Max}(AeT_1))\\=&(\Psi(h)\Psi(g))((0,\cdots,0,e,0,\cdots,0)_{n_1}^i+\mathrm{Max}(AeT_1)).\end{aligned}$$

设 $g((0,\cdots,0,e,0,\cdots,0)_{n_2}^i+T_2)=(c_1^i,\cdots,c_{n_3}^i)+T_3$, 则

$$(hg)((0,\cdots,0,e,0,\cdots,0)_{n_1}^i+T_1)\ =\ g((d_1^i,\cdots,d_{n_2}^i)+T_2)=\Sigma_{j=1}^{n_2}d_j^i(c_1^i,\cdots,c_{n_3}^i)+T_3.$$

因此

$$\begin{aligned}\Psi(hg)((0,\cdots,0,e,0,\cdots,0)_{n_1}^i+\mathrm{Max}(AeT_1))&=e\Sigma_{j=1}^{n_2}d_j^i(c_1^i,\cdots,c_{n_3}^i)+\mathrm{Max}(AeT_3);\\(\Psi(h)\Psi(g))((0,\cdots,0,e,0,\cdots,0)_{n_1}^i+\mathrm{Max}(AeT_1))&=\Psi(g)(e(d_1^i,\cdots,d_{n_2}^i)+\mathrm{Max}(AeT_2))\\&=\Sigma_{j=1}^{n_2}ed_j^i(c_1^i,\cdots,c_{n_3}^i)+\mathrm{Max}(AeT_3).\end{aligned}$$

定理 1.1 的证明 只需证明 $\Phi\Psi=I_{\overline{\mathrm{Fac}}(_AAe)}$, $\Psi\Phi=I_{\mathrm{Fac}(_{eAe}eAe)}$.

(1) 证明 $\Phi\Psi=I_{\overline{\mathrm{Fac}}(_AAe)}$.

因为对任意的 $A^ne/N\in\overline{\mathrm{Fac}}(_AAe)$, 由 $e(AeN)=eN$ 有 $\mathrm{Max}(AeN)=\mathrm{Max}(N)=N$, 因此

$$(\Phi\Psi)(A^ne/N)=\Psi(eA^ne/eN)=A^ne/\mathrm{Max}(AeN)=A^ne/N.$$

此外, 对任意的 $g\in\mathrm{Hom}_A(A^{n_1}e/N_1,A^{n_2}e/N_2)$, $(\Phi\Psi)(g)=g$. 因为对于

$$(0,\cdots,0,e,0,\cdots,0)_{n_1}^i\in A^{n_1}e,i=1,\cdots,n_1,$$

设 $g((0,\cdots,0,e,0,\cdots,0)_{n_1}^i+N_1)=(d_1^i,\cdots,d_{n_2}^i)+N_2$, 则

$$\Phi(g)((0,\cdots,0,e,0,\cdots,0)_{n_1}^i+N_1)=(ed_1^i,\cdots,ed_{n_2}^i)+eN_2,$$

$$(\Phi\Psi)(g)((0,\cdots,0,e,0,\cdots,0)_{n_1}^i+N_1)=\Psi(\Phi(g))((0,\cdots,0,e,0,\cdots,0)_{n_1}^i+N_1)$$

$$=(ed_1^i,\cdots,ed_{n_2}^i)+\mathrm{Max}(AeN_2)=(ed_1^i,\cdots,ed_{n_2}^i)+N_2.$$

注意到 $(ed_1^i,\cdots,ed_{n_2}^i)+N_2=eg((0,\cdots,0,e,0,\cdots,0)_{n_1}^i+N_1)=g((0,\cdots,0,e,0,\cdots,0)_{n_1}^i+N_1)=(d_1^i,\cdots,d_{n_2}^i)+N_2$, 所以 $(\Phi\Psi)(g)=g$. 故 $\Phi\Psi=I_{\overline{\mathrm{Fac}}(_AAe)}$.

(2) 证明 $\Psi\Phi=I_{\mathrm{Fac}(_{eAe}eAe)}$.

对任意的 $eA^ne/T \in \mathrm{Fac}({}_{eAe}eAe)$,

$$(\Psi\Phi)(eA^ne/T) = \Phi(A^ne/\mathrm{Max}(AeT)) = eA^ne/e\mathrm{Max}(AeT) = eA^ne/T.$$

而且对任意的 $h \in \mathrm{Hom}(eA^{n_1}e/T_1, eA^{n_2}e/T_2)$, $(\Psi\Phi)(h) = h$. 因为对于

$$(0, \cdots, 0, e, 0, \cdots, 0)^i_{n_1} \in eA^{n_1}e, i = 1, \cdots, n_1,$$

若设 $h((0, \cdots, 0, e, 0, \cdots, 0)^i_{n_1} + T_1) = (c^i_1, \cdots, c^i_{n_2}) + T_2$, 则

$$\begin{aligned}
\Psi(h)((0, \cdots, 0, e, 0, \cdots, 0)^i_{n_1} + T_1) &= (c^i_1, \cdots, c^i_{n_2}) + \mathrm{Max}(AeT_2), \\
(\Psi\Phi)(h)((0, \cdots, 0, e, 0, \cdots, 0)^i_{n_1} + T_1) &= \Phi(\Psi(h))((0, \cdots, 0, e, 0, \cdots, 0)^i_{n_1} + T_1) \\
&= (ec^i_1, \cdots, ec^i_{n_2}) + e\mathrm{Max}(AeT_2) \\
&= (ec^i_1, \cdots, ec^i_{n_2}) + T_2 = (c^i_1, \cdots, c^i_{n_2}) + T_2,
\end{aligned}$$

所以 $(\Psi\Phi)(h) = h$. 故 $\Psi\Phi = I_{\mathrm{Fac}({}_{eAe}eAe)}$.

4 定理 1.2 的证明

为了证明定理 1.2, 我们先来给出函子 Ψ 与 Φ 的一些性质.

引理 4.1 (1) 设 $G \in \mathrm{Fac}({}_{eAe}eAe)$. 则如果 $\mathrm{pd}_{eAe}G < \infty$, 那么 $\mathrm{pd}_A\Psi(G) < \infty$.

(2) 设 $H \in \overline{\mathrm{Fac}}({}_AAe)$, 且 $\mathrm{pd}_{eAe}eAf < \infty$. 则如果 $\mathrm{pd}_AH < \infty$, 那么 $\mathrm{pd}_{eAe}\Phi(H) < \infty$.

证 (1) 考虑 ${}_{eAe}G$ 的一个投射分解 $0 \to Q_n \to \cdots \to Q_1 \to Q_0 \to G \to 0$, 用正合函子 Ψ 作用得长正合列 $0 \to \Psi(Q_n) \to \cdots \to \Psi(Q_1) \to \Psi(Q_0) \to \Psi(G) \to 0$. 因为 $\mathrm{pd}_A\Psi(Q_i) \le \mathrm{pd}_A\Psi(eAe) = \mathrm{pd}_A(Ae/\mathrm{Max}(0))$, 根据推论 2.5 有 $\mathrm{pd}_A\mathrm{Max}(0) < \infty$, 故 $\mathrm{pd}_A\Psi(Q_i) < \infty$, $i = 0, 1, \cdots, n$. 因此 $\mathrm{pd}_A\Psi(G) < \infty$.

(2) 设 $H = A^ne/N$, 则 $\Phi(H) = eA^ne/eN$. 因为 $\mathrm{pd}_AH < \infty$, 所以 $\mathrm{pd}_AN < \infty$. 考虑 ${}_AN$ 的一个投射分解 $0 \to P_m \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to N \to 0$, 用正合函子 $F : A\text{-mod} \to eAe\text{-mod}, F(T) = eT (\forall T \in A\text{-mod})$ 作用得长正合列 $0 \to eP_m \to \cdots \to eP_1 \to eP_0 \to eN \to 0$. 因为 $\mathrm{pd}_{eAe}eAf < \infty$, 所以 $\mathrm{pd}_{eAe}eP_i \le \mathrm{pd}_{eAe}eA = \mathrm{pd}_{eAe}eAf < \infty$, $i = 0, 1, \cdots, m$. 因此 $\mathrm{pd}_{eAe}eN < \infty$, 故 $\mathrm{pd}_{eAe}\Phi(H) < \infty$.

再给出一个对定理 1.2 的证明起重要作用的引理.

引理 4.2 设 A 是一个 Artin 代数, $\mathrm{rad}A = J$, e, f 是 A 的幂等元, 满足 $e + f = 1$, $\mathrm{pd}_A(Af/Jf) < \infty$, Ae/Je 中的每一个单子模都是投射维数无限的. 则

(1) 正则模 ${}_AA$, 必存在一个子模 $\tilde{M}$ 满足: $\tilde{M}/J\tilde{M}$ 的每一个合成因子的投射维数都无限, ${}_AA/\tilde{M}$ 的每一个合成因子的投射维数都有限;

(2) 设 $\mathcal{A} = \mathrm{Gen}(Ae) \cap \mathcal{P}^\infty(A)$, 则 $\mathcal{P}^\infty(A) = {}_\mathcal{A}\mathcal{E}^{\mathrm{Gen}({}_AA/\tilde{M})}$.

证 (1) 如果 A/JA 的每一个合成因子的投射维数都无限, 则取 $\tilde{M} ={}_A A$ 即可. 否则, 设 A/JA=$T_1 \oplus H_1$, 其中 T_1 的每一个合成因子的投射维数都有限, H_1 的每一个合成因子的投射维数都无限, 则必存在 ${}_AA$ 的一个子模 M_1, 使得 ${}_AA/M_1 = T_1$. 如果 M_1/JM_1 的每一个合成因子的投射维数都无限, 则取 $\tilde{M} = M_1$ 即可. 否则, 把 M_1 看成 ${}_AA$, 同理可证存在 M_1 的一个子模 M_2, 使得 M_1/M_2 的每一个合成因子的投射维数都有限. 因此由短正合列

$0 \to M_1/M_2 \to_A A/M_2 \to_A A/M_1 \to 0$ 可知 ${}_AA/M_2$ 的每一个合成因子的投射维数都有限. 再把 M_2 看成 ${}_AA$, 继续按此操作进行得到子模列 ${}_AA \supset M_1 \supset M_2 \supset \cdots M_k \supset \cdots$. 因为 ${}_AA$ 的合成因子的个数有限, 所以进行有限步操作后必存在 ${}_AA$ 的一个子模 M_l 使得 M_l/JM_l 的每一个合成因子的投射维数都无限, 且 ${}_AA/M_l$ 的每一个合成因子的投射维数都有限. 从而取 $\tilde{M} = M_l$ 即可.

(2) 对任意的 $T \in \mathcal{P}^{\infty}(A)$, 存在一个正整数 k 及一个 A- 模满同态 $\alpha : A^k \twoheadrightarrow T$, 从而有行正合交换图 2:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \tilde{M}^k \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i\alpha"'] & A^k \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & A^k/\tilde{M}^k \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Im}(i\alpha) \arrow[r] & T \arrow[r] & T/\mathrm{Im}(i\alpha) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

图 2: 行正合交换图

因为 $i\alpha$ 与 α 都是满同态, 所以 β 也是满同态, 因此 $T/\mathrm{Im}(i\alpha) \in \mathrm{Gen}({}_AA/\tilde{M})$. 注意到 $\tilde{M}/J\tilde{M}$ 的每一个合成因子的投射维数都无限, 所以 $\tilde{M} \in \mathrm{Gen}(Ae)$, 从而 $\mathrm{Im}(i\alpha) \in \mathrm{Gen}(Ae)$. 根据 $A/\tilde{M}$ 的每一个合成因子的投射维数都有限有 $T/\mathrm{Im}(i\alpha) \in \mathcal{P}^{\infty}(A)$, $\mathrm{Im}(i\alpha) \in \mathcal{A}$. 故 $\mathcal{P}^{\infty}(A) \subset {}_{\mathcal{A}}\mathcal{E}^{\mathrm{Gen}({}_AA/\tilde{M})}$. 此外, 显然有 $\mathcal{P}^{\infty}(A) \supset {}_{\mathcal{A}}\mathcal{E}^{\mathrm{Gen}({}_AA/\tilde{M})}$. 因此 $\mathcal{P}^{\infty}(A) = {}_{\mathcal{A}}\mathcal{E}^{\mathrm{Gen}({}_AA/\tilde{M})}$.

定理 1.2 的证明 充分性. 为证明 $\mathcal{P}^{\infty}(A)$ 在 A-mod 中反变有限, 我们只需证明 Ae/Je 存在一个右 $\mathcal{P}^{\infty}(A)$ - 逼近. 根据引理 4.2 (1), 设 ${}_AA$ 的子模 $\tilde{M}$ 满足: $\tilde{M}/J\tilde{M}$ 的每一个合成因子的投射维数都无限, ${}_AA/\tilde{M}$ 的每一个合成因子的投射维数都有限. 因为子范畴 $\mathrm{Gen}({}_AA/\tilde{M})$ 在 A-mod 中反变有限, 由引理 4.2 (2) 与推论 2.8 可知, 只需证明 Ae/Je 存在一个右 $\mathcal{A}$ - 逼近即可, 其中 $\mathcal{A} = \mathrm{Gen}(Ae) \cap \mathcal{P}^{\infty}(A)$.

设 $\mu :_{eAe} G \to eAe/eJe$ 是 eAe/eJe 的一个右 $\mathcal{P}^{\infty}(eAe)$ - 逼近. 因为 Ae/Je 的每一个合成因子的投射维数都无限, 由 $\Phi(Ae/Je) = eAe/eJe$ 和引理 2.6 有 $\Psi(eAe/eJe) = Ae/Je$. 下证 $\Psi(\mu) : \Psi({}_{eAe}G) \to Ae/Je$ 是 Ae/Je 的一个右 $\mathcal{A}$ - 逼近. 首先根据引理 4.1(1) 有 $\mathrm{pd}_A(\Psi({}_{eAe}G)) < \infty$, 此外, $\Psi({}_{eAe}G) \in \overline{\mathrm{Fac}}({}_AAe)$, 故 $\Psi({}_{eAe}G) \in \mathcal{A}$.

对任意的 $H \in \mathcal{A}$ 及任意的 A - 模同态 $g : H \to Ae/Je$, 设 $\sigma_1 : H \xrightarrow{\simeq} A^ne/K$, 则有 A - 模同态 $\sigma_1^{-1}g : A^ne/K \to Ae/Je$. 考察交换图 3:

$$\begin{tikzcd}
A^ne/\mathrm{Max}(K) \arrow[dd, dotted, "g_2"] \arrow[ddr, "g_1"] & A^ne/K \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[dd, "\sigma_1^{-1}g"] & \\
& & H. \arrow[ul, "\sigma_1"', "\simeq"] \arrow[dl, "g"] \\
\Psi({}_{eAe}G) \arrow[r, "\Psi(\mu)"] & Ae/Je &
\end{tikzcd}$$

图 3: 交换图

因为 $K \subset \mathrm{Max}(K) \subset A^n e$, 所以存在一个自然满同态 $\pi_1 : A^n e/K \twoheadrightarrow A^n e/\mathrm{Max}(K)$. 根据推论 2.5 可知 $\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Max}(K)/K, Ae/Je) = 0$: 用函子 $\mathrm{Hom}_A(\ \ , Ae/Je)$ 作用短正合列 $0 \to \mathrm{Max}(K)/K \to A^n e/K \to A^n e/\mathrm{Max}(K) \to 0$ 得正合列 $0 \to \mathrm{Hom}_A(A^n e/\mathrm{Max}(K), Ae/Je) \to \mathrm{Hom}_A(A^n e/K, Ae/Je) \to 0$. 因此存在一个 A - 模同态 $g_1 : A^n e/\mathrm{Max}(K) \to Ae/Je$ 使得 $\pi_1 g_1 = \sigma_1^{-1} g$. 注意到 $\mathrm{pd}_A A^n e/K = \mathrm{pd}_A H < \infty$, $\mathrm{pd}_A \mathrm{Max}(K)/K < \infty$, 所以有 $\mathrm{pd}_A(A^n e/\mathrm{Max}(K)) < \infty$. 下证存在一个 A - 模同态 $g_2 : A^n e/\mathrm{Max}(K) \to \Psi({}_{eAe}G)$ 使 $g_2\Psi(\mu) = g_1$. 根据函子 Φ 与 Ψ 的性质, 用函子 Φ 作用 A - 模同态 g_1 与 $\Psi(\mu)$ 得 eAe - 模同态 $\Phi(g_1) : \Phi(A^n e/\mathrm{Max}(K)) \to eAe/eJe$ 与 $\mu :_{eAe} G \to eAe/eJe$. 由 $\mathrm{pd}_{eAe} eAf < \infty$ 及引理 4.1(2) 有 $\mathrm{pd}_{eAe}\Phi(A^n e/\mathrm{Max}(K)) < \infty$. 因为 $\mu :_{eAe} G \to eAe/eJe$ 是 eAe/eJe 的一个极小右 $\mathcal{P}^\infty(eAe)$ - 逼近, 所以存在一个 eAe - 模同态 $h : \Phi(A^n e/\mathrm{Max}(K)) \to_{eAe} G$ 满足 $h\mu = \Phi(g_1)$, 即有交换图 4:

$$\begin{tikzcd}
\Phi(A^n e/\mathrm{Max}(K)) \arrow[d, dotted, "h"'] \arrow[dr, "\Phi(g_1)"] & \\
{}_{eAe}G \arrow[r, "\mu"'] & eAe/eJe.
\end{tikzcd}$$

图 4: 交换图

再用函子 Ψ 作用交换图 4, 根据 $\Phi\Psi = I_{\overline{\mathrm{Fac}}({}_A Ae)}$ 得 $\Psi(h)\Psi(\mu) = g_1$. 取 $g_2 = \Psi(h)$, 则 $g_2\Psi(\mu) = g_1$, 从而 $\sigma_1\pi_1 g_2\Psi(\mu) = \sigma_1\pi_1 g_1 = g$. 因此 $\Psi(\mu) : \Psi({}_{eAe}G) \to Ae/Je$ 是 Ae/Je 的一个右 $\mathcal{A}$ - 逼近.

必要性. 任意给定一个 eAe- 模 M, 对于任意的 $X \in \mathcal{P}^\infty(eAe)$ 及一个 eAe - 模同态 $\alpha : X \to M$, 用函子 Ψ 作用 α 得到 A - 模同态 $\Psi(\alpha) : \Psi(X) \to \Psi(M)$. 因为 $\mathcal{P}^\infty(A)$ 在 A-mod 中反变有限, 所以 $\Psi(M)$ 存在一个右 $\mathcal{P}^\infty(A)$ - 逼近 $\nu : D \to \Psi(M)$. 因为 $\Psi(X) \in \mathcal{P}^\infty(A)$, 所以存在一个 A - 模同态 $\varrho : \Psi(X) \to D$ 使得 $\varrho\nu = \Psi(\alpha)$. 因此 $\Phi(\nu) : \Phi(D) \to M$ 满足 $\Phi(\varrho)\Phi(\nu) = \alpha$, 从而 M 存在一个右 $\mathcal{P}^\infty(eAe)$ - 逼近 $\Phi(\nu)$. 故 $\mathcal{P}^\infty(eAe)$ 在 eAe-mod 中反变有限.

参 考 文 献

[1] Auslander M, Smalø S O. Preprojective modules over artin algebras[J]. J. Algebra,1980, 66(1): 61–122.

[2] Auslander M , Smalø S O. Almost split sequences in subcategories[J]. J. Algebra, 1981, 69(2): 426–454.

[3] Happel D , Ringel C M . Tilted algebras[J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1982, 274(2): 399–443.

[4] Auslander M, Reiten I. Applications of contravariantly finite subcategories[J]. Advances Math., 1991, 86(1): 111–152.

[5] Ringel C M.The category of modules with good filtrations over a quasi-hereditary algebra has almost splitsequences[J]. Math. Zeitschrift , 1991, 208: 209–225.

[6] Auslander M, Smalø S O. Relative homology and representation theory I: Relative homology and homologically finite subcategories[J]. Commun. Algebra, 1993, 21(9): 2995–3031.

[7] Happel D, Unger L. Modules of finite projective dimension and cocovers[J]. Mathematische Annalen, 1996, 306: 445–457.

[8] Igusa K, Smalø S O, Todorov G. Finite projectivity and contravariant finiteness[J]. Proc. Amer. Math. Society, 1990, 109(4): 937–941.

[9] Deng B M. On contravariant finiteness of subcategories of modules of projective dimension $\leq i$[J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1996, 124(6): 1673–1677.

[10] 万冰蓉. 关于投射维数有限的模构成的子范畴的反变有限性 [J]. 数学学报, 2009, 52(2): 245–252.

[11] Xi C C. On the finitistic dimension conjecture, III: Related to the pair $eAe \subseteq A$[J]. J. Algebra , 2008, 319: 3666–3688.

[12] Green E, Kirkman E, Kuzmanovich J. Finitistic dimension of finite dimensional monomial algebras[J]. J. Algebra, 1991, 136: 37–50.

[13] Green E L, Zimmermann Huisgen B. Finitistic dimension of artinian rings with vanishing radical cube[J]. Mathematische Zeitschrift, 1991, 206: 505–526.

[14] Fuller K R, Saorin M. On the finitistic dimension conjecture for artinian rings[J]. Manuscripta Mathematica, 1992, 74: 117–132.

[15] Sikko S A, Smalø S O. Extensions of homologically finite subcategories[J]. Archivder Mathematik, 1993, 60: 517–526.

A PAIR OF ISOMORPHIC MODULE CATEGORIES ON TWO RELATED ALGEBRAS

WAN Bing-rong

(*College of Science, Nanchang Institute of Technology, Nanchang 330099, China*)

Abstract: This paper studies the relationship between contravariantly finite module categories of the Artin algebra A and its subalgebra. Using the isomorphism of categories, we find an condition under which $\mathcal{P}^{\infty}(A)$ the subcategory consisting of all finitely generated left A-modules with finite projective dimensions is contravariantly finite in A-mod the category of all finitely generated left A-modules, and extend the conclusion on the contravariant finiteness of $\mathcal{P}^{\infty}(A)$.

Keywords: category isomorphism; contravariantly finite subcategory; finite projective dimension

2010 MR Subject Classification: 16E30; 16G30