Vol. 35 (2015)
No. 5

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

一类有界对称域上的 Hartogs 型域的自同构群

金 帅
(武汉大学数学与统计学院, 湖北 武汉 430072)

摘 要: 本文研究了稍微广泛的一类 Hartogs 型域的自同构群. 利用华域的自同构群, 获得了一类有界对称域上的 Hartogs 型域的自同构群的具体形式, 推广了有界对称域上的 Hartogs 型域的自同构群这一结果.

关键词: 全纯自同构群; 对称域; Hartogs 域
MR(2010) **主题分类号**: 32A07; 32M05; 32M15 **中图分类号**: O174.56
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2015)05-1201-08

1 引言

$\mathbb{C}^n$ 中一个域 D 的自同构群是 D 上的双全纯映射的集合. 自同构群在多复变函数论的研究中已成为一个非常有力的工具. 在文 [7] 中, Thullen 研究了所谓的 Thullen 域

$$\mathbb{E}^\mu := \{(z,\zeta)\in\mathbb{C}^2 : |z|^2+|\zeta|^{2\mu}<1\},$$

其中 $\mu>1$, 并得到 $\mathrm{Aut}(\mathbb{E}^\mu)$ 是下列所有映射构成的集合:

$$(z,\zeta)\longmapsto\left(e^{i\theta_1}\frac{z-a}{1-\overline{a}z}, e^{i\theta_2}\frac{(1-|a|^2)^{1/2\mu}}{(1-\overline{a}z)^{1/\mu}}\zeta\right),$$

其中 $a\in\mathbb{C}$ 且 $|a|<1$, $\theta_1,\theta_2\in\mathbb{R}$. 同样在文 [2, 3] 中, Bedford 和 Pinchuk 证明了如下定理: 如果 $D\subset\mathbb{C}^2$ 是一个带有实解析边界的有界 (拟凸) 域且它的自同构群是非紧的, 那么 D 双全纯等价于 $\mathbb{E}^\mu$ (其中 μ 为整数).

有界对称域代表了全体非紧型的 Hermitian 对称空间. 每一个对称有界域, 都有一个对应的一般范数 $N_\Omega(z,z)$ (generic norm), 满足对任意的 $z\in\Omega$ 都有 $0<N_\Omega(z,z)\le 1$ 并且 $N_\Omega(z,z)=1$ 当且仅当 $z=0$. $N_\Omega(z,z)$ 与 Ω 的 Bergman 核 $K_\Omega(z,z)$ 有如下关系: $N_\Omega(z,z)=(V(\Omega)K_\Omega(z,z))^{-\frac{1}{\gamma}}$, 其中 γ 为 Ω 的亏格而 $V(\Omega)$ 为 Ω 在 Lebsgue 测度下的体积. 对一个不可分解的有界对称域 Ω, 定义 Hartogs 型域

$$\widehat{\Omega}_m := \{(z,\zeta)\in\Omega\times\mathbb{C}^m : \|\zeta\|^{2\mu}<N_\Omega(z,z)\}. \tag{1.1}$$

如果 Ω 是单位圆盘且 $m=1$, 那么该 Hartogs 型域就变成了 Thullen 域.

设 G 由具有下列形式的的映射 Φ 生成

$$\Phi(z,\zeta)=(\Phi_1(z,\zeta),\Phi_2(z,\zeta)),\ \ (z,\zeta)\in\widehat{\Omega}_m, \tag{1.2}$$

*收稿日期: 2014-12-02 接收日期: 2015-03-24
作者简介: 金帅 (1989–), 男, 回族, 河南卢氏, 硕士, 主要研究方向: 多复变函数论.

其中 $\Phi_1(z,\zeta)=\varphi(z)\in \mathrm{Aut}(\Omega)$ 且

$$\Phi_2(z,\zeta)=U(\zeta)\frac{N_\Omega(z_0,z_0)^{1/2\mu}}{N_\Omega(z,z_0)^{1/\mu}},\ z_0=\varphi^{-1}(0),\ U\in\mathcal{U}(m),$$

这里 $\mathcal{U}(m)$ 是一个 m 阶酉矩阵. 论文 [10] 证明了 G 为 $\mathrm{Aut}(\widehat{\Omega}_m)$ 的一个子群. 文 [1] 给出了如下结果:

定理 1.1 设 $\widehat{\Omega}_m$ 是一典型域 Ω 上的 Hartogs 型域. 假设 $\widehat{\Omega}_m$ 不是单位球, 那么 G 即为 $\mathrm{Aut}(\widehat{\Omega}_m)$.

最近, 涂振汉和王磊 [9] 研究了华域之间的逆紧全纯映照的刚性问题, 并且得到了全部华域的自同构群, 作为其特例得到了全部不可分解的有界对称域 Ω 上的 Hartogs 型域 $\widehat{\Omega}_m$ 的自同构群.

作为不可分解的有界对称域上的 Hartogs 型域的一种自然推广, 我们考虑一类稍微广泛的 Hartogs 型域. 设 $\Omega:=\Omega_1\times\Omega_2$ (其中 Ω_1 和 Ω_2 都是不可分解的有界对称域), 定义

$$\widetilde{\Omega}_m:=\{(z,\eta,\zeta)\in\Omega_1\times\Omega_2\times\mathbb{C}^m\subset\mathbb{C}^{d_1}\times\mathbb{C}^{d_2}\times\mathbb{C}^m:\ \ \|\zeta\|^{2\mu}<N_\Omega(z,z;\eta,\eta)\},\tag{1.3}$$

其中 $N_\Omega(z,z;\eta,\eta):=N_{\Omega_1}(z,z)N_{\Omega_2}(\eta,\eta)$.

设集合 $\widetilde{G}$ 由下列形式的映射生成

$$\Phi(z,\eta,\zeta)=(\Phi_1(z,\eta,\zeta),\Phi_2(z,\eta,\zeta),\Phi_3(z,\eta,\zeta)),\ \ (z,\eta,\zeta)\in\widetilde{\Omega}_m,\tag{1.4}$$

其中 $\Phi_1(z,\eta,\zeta)=\phi(z)\in\mathrm{Aut}(\Omega_1),\Phi_2(z,\eta,\zeta)=\psi(z)\in\mathrm{Aut}(\Omega_2)$ 且

$$\Phi_3(z,\eta,\zeta)=U(\zeta)\frac{N_\Omega(z_0,z_0;\eta_0,\eta_0)^{1/2\mu}}{N_\Omega(z,z_0;\eta,\eta_0)^{1/\mu}},\ \ z_0=\phi_1^{-1}(0),\ \ \eta_0=\psi_2^{-1}(0),\ \ U\in\mathcal{U}(m),$$

这里 $\mathcal{U}(m)$ 是一个 m 阶酉矩阵.

应用涂振汉和王磊 [9] 的推理, 本文给出了如下结果:

定理 1.2 假定 $\widetilde{\Omega}_m$ 不是单位球, 那么集合 $\widetilde{G}$ 即为 $\mathrm{Aut}(\widetilde{\Omega}_m)$.

定理 1.2 的证明类似于定理 1.1. 我们的证明主要分为两步: 首先需要证明 $\mathrm{Aut}(\widetilde{\Omega}_m)$ 的每个元素保持零截面 $\Omega\times\{0\}$, 此处用到了 $\widetilde{\Omega}_m$ 中只有边界部分 $b_0\widetilde{\Omega}_m$ 是强拟凸的 (其中 $b_0\widetilde{\Omega}_m$ 是强拟凸的证明来源于文献 [9] 的推理), $\widetilde{\Omega}_m$ 是齐性域当且仅当 $\widetilde{\Omega}_m$ 是单位球; 其次使用 Cartan 定理来得到在原点的迷向自同构必为线性形式. 这就完成了定理 1.2 的证明. 相关的研究也可见文献 [4, 6, 8].

2 预备知识

按照华罗庚 [5] 的定义列出四类典型域 Ω 和相应的一般范数 $N_\Omega(z,w)$ 如下:

(i) 类型 $I_{p,q}(1\le p\le q)$: 设 V 是由 $p\times q$ 复矩阵构成的空间,

$$\Omega=\{z\in V:\ I-z\overline{z}^t>0\},\ N_\Omega(z,w)=\det(I-z\overline{w}^t),$$

这里记号 $z>0$ 表示方阵 z 是正定的, 且 I 表示单位矩阵.

(ii) 类型 II_n : 设 V 是由反对称 $n\times n$ 复矩阵构成的空间,

$$\Omega=\{z\in V:\ I+z\overline{z}>0\},\ N_\Omega(z,w)^2=\det(I+z\overline{w}^t).$$

(iii) 类型 III_n : 设 V 是由对称 $n\times n$ 复矩阵构成的空间,

$$\Omega=\{z\in V:\ I-z\overline{z}>0\},\ N_\Omega(z,w)=\det(I-z\overline{w}^t).$$

(iv) 类型 IV_n :

$$\begin{aligned}&\Omega=\{z=(z_1,\cdots,z_n)\in\mathbb{C}^n:\ 1-2Q(z,\overline{z})+|Q(z,z)|^2>0,\ Q(z,z)<1\},\\&N_\Omega(z,w)=1-2Q(z,\overline{w})+Q(z,z)Q(\overline{w},\overline{w}),\end{aligned}$$

其中 $Q(z,w)=\sum\limits_{j=1}^n z_jw_j$. 另外, 不可分解的有界对称域还包含两个例外域. 在本文中, Ω_i $(i=1,2)$ 总表示不可分解的有界对称域中的一种且用 $N_i(z,w)$ 来表示 $N_{\Omega_i}(z,w)$.

下面的命题 2.1 的证明中的关键部分是自同构群下的下列一般范数的变换公式 (见文 [10]). 设 Ω 为一个不可分解的有界对称域, γ 是 Ω 的亏格且 $J\phi(z)$ 是 ϕ 的 Jacabian 行列式. 对 $\phi\in\mathrm{Aut}(\Omega)$ 和 $z,t\in\Omega$, 总成立 $N(\phi(z),\phi(t))^\gamma=J\phi(z)N(z,t)^\gamma\overline{J\phi(t)}$, 并且如果 $z_0=\phi^{-1}(0)$, 则有 $\frac{N(\phi(z),\phi(z))}{N(z,z)}=\frac{N(z_0,z_0)}{|N(z,z_0)|^2}$.

命题 2.1 $\widetilde{G}$ 是 $\mathrm{Aut}(\widetilde{\Omega}_m)$ 的子群.

证 从 (1.4) 式中容易证明 $\widetilde{G}$ 的每个元素是 $\widetilde{\Omega}_m$ 的自同构. 为了证明 $\widetilde{G}$ 是一个群, 将证 $\widetilde{\Phi}\circ\Phi\in\widetilde{G}$, 这里 Φ 是由 (1.4) 式定义且 $\widetilde{\Phi}$ 具有下列形式

$$\begin{aligned}&\widetilde{\Phi}(z,\eta,\zeta)=(\widetilde{\phi}(z),\widetilde{\psi}(\eta),\widetilde{U}(\zeta)\frac{N(\widetilde{z}_0,\widetilde{z}_0;\widetilde{\eta}_0,\widetilde{\eta}_0)^{1/2\mu}}{N(z,\widetilde{z}_0;\eta,\widetilde{\eta}_0)^{1/\mu}}),\\&\widetilde{\phi}\in\mathrm{Aut}(\Omega_1),\widetilde{\psi}\in\mathrm{Aut}(\Omega_2),\ \widetilde{z}_0=\widetilde{\phi}^{-1}(0),\ \widetilde{\eta}_0=\widetilde{\psi}^{-1}(0),\ \widetilde{U}\in\mathcal{U}(m),\end{aligned}$$

继而断言存在 $z_1:=(\widetilde{\phi}\circ\phi)^{-1}(0)$, $\eta_1:=(\widetilde{\psi}\circ\psi)^{-1}(0)$ 且 $U_1\in\mathcal{U}(m)$ 满足

$$\widetilde{\Phi}\circ\Phi(z,\eta,\zeta)=(\widetilde{\phi}\circ\phi(z),\widetilde{\psi}\circ\psi(\eta),U_1(\zeta)\frac{N(z_1,z_1;\eta_1,\eta_1)^{1/2\mu}}{N(z,z_1;\eta,\eta_1)^{1/\mu}}).\tag{2.1}$$

注意到

$$\widetilde{\Phi}(\Phi(z,\eta,\zeta))=(\widetilde{\phi}(\phi(z)),\widetilde{\psi}(\psi(\eta)),\widetilde{U}(U(\zeta))\frac{N(z_0,z_0;\eta_0,\eta_0)^{1/2\mu}}{N(z,z_0;\eta,\eta_0)^{1/\mu}}\frac{N(\widetilde{z}_0,\widetilde{z}_0;\widetilde{\eta}_0,\widetilde{\eta}_0)^{1/2\mu}}{N(\phi(z),\widetilde{z}_0;\psi(\eta),\widetilde{\eta}_0)^{1/\mu}}),$$

由 (2.1) 式有

$$\begin{aligned}&N(\phi(z_1),\phi(z_1);\psi(\eta_1),\psi(\eta_1))=N(z_1,z_1;\eta_1,\eta_1)|J\phi(z_1)J\psi(\eta_1)|^{2/\gamma},\\&N(\phi(z),\phi(z_1);\psi(\eta),\psi(\eta_1))=N(z,z_1;\eta,\eta_1)(J\phi(z)\overline{J\phi(z_1)})^{1/\gamma}(J\psi(\eta)\overline{J\psi(\eta_1)})^{1/\gamma},\end{aligned}$$

并且由于 $N(z,0;\eta,0)=N(0,w;0,v)=1$ 对任意的 $z,w,\eta,v\in\widetilde{\Omega}_m$ 成立, 有

$$\begin{aligned}N(z_0,z_0;\eta_0,\eta_0)&=N(\phi(z_0),\phi(z_0);\psi(\eta_0),\psi(\eta_0))|J\phi(z_0)J\psi(\eta_0)|^{-2/\gamma}\\&=|J\phi(z_0)J\psi(\eta_0)|^{-2/\gamma},\\N(z,z_0;\eta,\eta_0)&=N(\phi(z),\phi(z_0);\psi(\eta),\psi(\eta_0))(J\phi(z)\overline{J\phi(z_0)})^{-1/\gamma}(J\psi(\eta)\overline{J\psi(\eta_0)})^{-1/\gamma}\\&=(J\phi(z)\overline{J\phi(z_0)})^{-1/\gamma}(J\psi(\eta)\overline{J\psi(\eta_0)})^{-1/\gamma}.\end{aligned}$$

由于 $\phi(z_1)=\widetilde{z_0},\psi(\eta_1)=\widetilde{\eta_0}$, 综合上述等式, 得到

$$\begin{aligned}&\frac{N(z_0,z_0;\eta_0,\eta_0)}{N(z,z_0;\eta,\eta_0)^2}\frac{N(\widetilde{z}_0,\widetilde{z}_0;\widetilde{\eta}_0,\widetilde{\eta}_0)}{N(\phi(z),\phi(\widetilde{z}_0);\psi(\eta),\psi(\widetilde{\eta}_0))^2}\\ =\ &\frac{N(z_0,z_0;\eta_0,\eta_0)}{N(z,z_0;\eta,\eta_0)^2}\frac{N(\phi(z_1),\phi(z_1);\psi(\eta_1),\psi(\eta_1))}{N(\phi(z),\phi(z_1);\psi(\eta),\psi(\eta_1))^2}\\ =\ &\frac{\overline{J\phi(z_0)J\psi(\eta_0)}^{2/\gamma}}{|J\phi(z_0)J\psi(\eta_0)|^{2/\gamma}}\frac{|J\phi(z_1)J\psi(\eta_1)|^{2/\gamma}}{\overline{J\phi(z_1)J\psi(\eta_1)}^{2/\gamma}}\frac{N(z_1,z_1;\eta_1,\eta_1)}{N(z,z_1;\eta,\eta_1)^2},\end{aligned}$$

取 $U_1\in\mathcal{U}(m)$ 使得

$$U_1=(\frac{\overline{J\phi(z_0)J\psi(\eta_0)}^{2/\gamma}}{|J\phi(z_0)J\psi(\eta_0)|^{2/\gamma}}\frac{|J\phi(z_1)J\psi(\eta_1)|^{2/\gamma}}{\overline{J\phi(z_1)J\psi(\eta_1)}^{2/\gamma}})^{1/2\mu}\widetilde{U}\circ U.$$

即为等式 (2.1). 命题 2.1 得证.

现在要研究 $\widetilde{\Omega}_m$ 的边界 $b\widetilde{\Omega}_m$ 的强拟凸性, 其边界 $b\widetilde{\Omega}_m$ 可以进行如下分解:

$$b\widetilde{\Omega}_m=b_0\widetilde{\Omega}_m\cup b(\Omega_1\times\Omega_2\times\{0\}),$$

其中 $b(\Omega_1\times\Omega_2\times\{0\})=b\Omega_1\times\Omega_2\times\{0\})\cup(\Omega_1\times b\Omega_2\times\{0\})\cup(b\Omega_1\times b\Omega_2\times\{0\})$, 而 $b_0\widetilde{\Omega}_m:=\{(z,\eta,\zeta)\in\Omega_1\times\Omega_2\times\mathbb{C}^m\subset\mathbb{C}^{d_1}\times\mathbb{C}^{d_2}\times\mathbb{C}^m:\rho:=\|\zeta\|^{2\mu}-N(z,z;\eta,\eta)=0\}$ 是 $b\widetilde{\Omega}_m$ 的光滑部分. 注意到对任意 $(z,\eta,\zeta)\in b_0\widetilde{\Omega}_m$ 有 $(z,\eta)\in\Omega_1\times\Omega_2$, 从而 $N(z,z;\eta,\eta)>0$, 故 $\zeta\neq 0$.

下列的命题 2.2 是显然的.

命题 2.2 假设 $D_i\subset\mathbb{C}^{n_i}$ 是有界域, 其 Bergman 核函数记为 $K_i(i=1,2)$, 则 $D:=D_1\times D_2$ 的 Bergman 核函数 K 满足

$$K((\xi_1,\xi_2),(z_1,z_2))=K_1(\xi_1,z_1)K_2(\xi_2,z_2),(\xi_1,\xi_2),(z_1,z_2)\in D_1\times D_2.$$

现在给出如下的关键引理, 它是论文涂振汉、王磊文 [9] 中的一个引理的稍微推广.

命题 2.3 设 $\Omega_i\subset\mathbb{C}^{d_i}(i=1.2)$ (在 Harish-Chandra 嵌入下) 是亏格为 γ^i 的不可分解的有界对称域, 则有如下结论成立:

1. $\widetilde{\Omega}_m$ 在 $b_0\widetilde{\Omega}_m$ 的每一个点都是强拟凸的;

2. $\widetilde{\Omega}_m$ 在 $b(\Omega\times\{0\})$ 的任意一点都不是强拟凸的, 这里 $b(\Omega\times\{0\})=(b\Omega_1\times\Omega_2\times\{0\})\cup(\Omega_1\times b\Omega_2\times\{0\})\cup(b\Omega_1\times b\Omega_2\times\{0\})$.

证 本证明来源于文献 [9] 的推理. 设 $h_i(z)_{i=1}^{\infty},g_j(\eta)_{i=1}^{\infty}$ 分别是 Hilbert 空间 $A^2(\Omega_1)$, $A^2(\Omega_2)$ 的一组标准正交基, 其中 $A^2(\Omega_1),A^2(\Omega_2)$ 分别由所有平方可积的全纯函数构成. 由命题 2.2, 得到

$$K(z,\overline{z};\eta,\overline{\eta})=K_1(z,\overline{z})K_2(\eta,\overline{\eta})=\sum h_i(z)\overline{h_i(z)}\sum g_j(\eta)\overline{g_j(\eta)}$$

在 Ω 的任一紧致子集上一致收敛. 设 $\rho(z,\eta,\zeta):=\|\zeta\|^{2\mu}-\delta K_1(z,\overline{z})^{-\lambda_1}K_2(\eta,\overline{\eta})^{-\lambda_2}$, 其中 $\delta:=(V(\Omega_1))^{-\frac{1}{\gamma_1}}(V(\Omega_2))^{-\frac{1}{\gamma_2}}$ 且 $\lambda_i:=-\frac{1}{\gamma_i},(i=1,2)$ 均为正数. 从而 ρ 是 $b_0\widetilde{\Omega}_m$ 上的一个实值定义函数.

固定 $(z_0,\eta_0,\zeta_0)\in b_0\widetilde{\Omega}_m$, 并且令 $T=(u,v,w)\in T^{1,0}_{(z_0,\eta_0,\zeta_0)}(b_0\widetilde{\Omega}_m)\subset\mathbb{C}^{d_1}\times\mathbb{C}^{d_2}\times\mathbb{C}^m$. 为了简便, 用 (z,η,ζ) 代替 (z_0,η_0,ζ_0). 由定义可得

$$\begin{aligned}&\|\zeta\|^{2\mu}-\delta K_1(z,\overline{z})^{-\lambda_1}K_2(\eta,\overline{\eta})^{-\lambda_2}=0,\\&\mu\|\zeta\|^{2(\mu-1)}(\overline{\zeta}\cdot w)+\delta\lambda_1K_2(\eta,\overline{\eta})^{-\lambda_2}K_1(z,\overline{z})^{-(\lambda_1+1)}\sum\overline{h_i(z)}(h_i(z)'\cdot u)\\+&\delta\lambda_2K_2(\eta,\overline{\eta})^{-(\lambda_2+1)}K_1(z,\overline{z})^{-\lambda_1}\sum\overline{g_j(\eta)}(g_j(\eta)'\cdot v)=0,\end{aligned}\tag{2.2}$$

其中 $h_i(z)'\cdot u=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{\partial h_i}{\partial z_k}(z)u_k,\ \ g_j(\eta)'\cdot v=\sum\limits_{l=1}^{\infty}\frac{\partial g_j}{\partial\eta_l}(\eta)v_l$.

最后通过 (2.2) 式, ρ 在 (z,η,ζ) 的 Levi 形式计算如下:

$$\begin{aligned}L_\rho(T,T):=&\sum_{i,j=1}^{d_1+d_2+m}\frac{\partial^2\rho}{\partial Ti\partial\overline{Tj}}\\
=&\mu\|\zeta\|^{2(\mu-1)}\|w\|^2+\mu(\mu-1)\|\zeta\|^{2(\mu-2)}|\overline{\zeta}\cdot w|^2\\
&+\delta\lambda_1K_2(\eta,\overline{\eta})^{-\lambda_2}\big[-(\lambda_1+1)K_1(z,\overline{z})^{-(\lambda_1+2)}|\sum\overline{h_i(z)}(h_i(z)'\cdot u)|^2\\
&+K_1(z,\overline{z})^{-(\lambda_1+1)}\sum|(h_i(z)'\cdot u)|^2\big]\\
&+\delta\lambda_2K_1(z,\overline{z})^{-\lambda_1}\big[-(\lambda_2+1)K_2(\eta,\overline{\eta})^{-(\lambda_2+2)}|\sum\overline{g_j(\eta)}(g_j(\eta)'\cdot u)|^2\\
&+K_2(\eta,\overline{\eta})^{-(\lambda_2+1)}\sum|(g_l(\eta)'\cdot v)|^2\big]\\
&-\delta\lambda_1\lambda_2K_1(z,\overline{z})^{-(\lambda_1+1)}K_2(\eta,\overline{\eta})^{-(\lambda_2+1)}2\mathrm{Re}\big[(\sum h_i(z)\overline{(h_i(z)'\cdot u)})(\sum\overline{g_j(\eta)}(g_j(\eta)'\cdot v))\big]\\
=&\mu\|\zeta\|^{2(\mu-2)}(\|\zeta\|^2\|w\|^2-|\overline{\zeta}\cdot w|^2)+\mu^2\|\zeta\|^{2(\mu-2)}|\overline{\zeta}\cdot w|^2\\
&-\delta\lambda_1^2K_1(z,\overline{z})^{-(\lambda_1+2)}K_2(\eta,\overline{\eta})^{-\lambda_2}|\sum\overline{h_i(z)}(h_i(z)'\cdot u)|^2\\
&-\delta\lambda_2^2K_1(z,\overline{z})^{-\lambda_1}K_2(\eta,\overline{\eta})^{-(\lambda_2+2)}|\sum\overline{g_j(\eta)}(g_j(\eta)'\cdot u)|^2\\
&-\delta\lambda_1\lambda_2K_1(z,\overline{z})^{-(\lambda_1+1)}K_2(\eta,\overline{\eta})^{-(\lambda_2+1)}2\mathrm{Re}\big[(\sum h_i(z)\overline{(h_i(z)'\cdot u)})(\sum\overline{g_j(\eta)}(g_j(\eta)'\cdot v))\big]\\
&+\delta\lambda_1K_1(z,\overline{z})^{-(\lambda_1+2)}K_2(\eta,\overline{\eta})^{-\lambda_2}\big[K_1(z,\overline{z})\sum|(h_i(z)'\cdot u)|^2-|\sum\overline{h_i(z)}(h_i(z)'\cdot u)|^2\big]\\
&+\delta\lambda_2K_1(z,\overline{z})^{-\lambda_1}K_2(\eta,\overline{\eta})^{-(\lambda_2+2)}\big[K_2(\eta,\overline{\eta})\sum|(g_l(\eta)'\cdot v)|^2-|\sum\overline{g_j(\eta)}(g_j(\eta)'\cdot u)|^2\big]\\
=&\mu\|\zeta\|^{2(\mu-2)}(\|\zeta\|^2\|w\|^2-|\overline{\zeta}\cdot w|^2)+\Big[\mu^2\|\zeta\|^{4(\mu-1)}|\overline{\zeta}\cdot w|^2\\
&-\delta^2\lambda_1^2K_1(z,\overline{z})^{-(2\lambda_1+2)}K_2(\eta,\overline{\eta})^{-2\lambda_2}|\sum\overline{h_i(z)}(h_i(z)'\cdot u)|^2\\
&-\delta^2\lambda_2^2K_1(z,\overline{z})^{-2\lambda_1}K_2(\eta,\overline{\eta})^{-(2\lambda_2+2)}|\sum\overline{g_j(\eta)}(g_j(\eta)'\cdot u)|^2\\
&-\delta^2\lambda_1\lambda_2K_1(z,\overline{z})^{-(2\lambda_1+1)}K_2(\eta,\overline{\eta})^{-(2\lambda_2+1)}2\mathrm{Re}\big[(\sum h_i(z)\overline{(h_i(z)'\cdot u)})(\sum\overline{g_j(\eta)}(g_j(\eta)'\cdot v))\big]\Big]\Big/\|\zeta\|^{2\mu}\\
&+\delta\lambda_1K_1(z,\overline{z})^{-(\lambda_1+2)}K_2(\eta,\overline{\eta})^{-\lambda_2}\big[K_1(z,\overline{z})\sum|(h_i(z)'\cdot u)|^2-|\sum\overline{h_i(z)}(h_i(z)'\cdot u)|^2\big]\\
&+\delta\lambda_2K_1(z,\overline{z})^{-\lambda_1}K_2(\eta,\overline{\eta})^{-(\lambda_2+2)}\big[K_2(\eta,\overline{\eta})\sum|(g_l(\eta)'\cdot v)|^2-|\sum\overline{g_j(\eta)}(g_j(\eta)'\cdot u)|^2\big]\\
=&\mu\|\zeta\|^{2(\mu-2)}(\|\zeta\|^2\|w\|^2-|\overline{\zeta}\cdot w|^2)\\
&+\delta\lambda_1K_1(z,\overline{z})^{-(\lambda_1+2)}K_2(\eta,\overline{\eta})^{-\lambda_2}\big[K_1(z,\overline{z})\sum|(h_i(z)'\cdot u)|^2-|\sum\overline{h_i(z)}(h_i(z)'\cdot u)|^2\big]\\
&+\delta\lambda_2K_1(z,\overline{z})^{-\lambda_1}K_2(\eta,\overline{\eta})^{-(\lambda_2+2)}\big[K_2(\eta,\overline{\eta})\sum|(g_l(\eta)'\cdot v)|^2-|\sum\overline{g_j(\eta)}(g_j(\eta)'\cdot u)|^2\big]\\
\geq&0.\end{aligned}$$

由 Cauchy-Schwartz 不等式, 对所有的 $T=(u,v,w)\in T^{1,0}_{(z_0,\eta_0,\zeta_0)}(b_0\widetilde{\Omega}_m)$ 等式成立当且仅当

$$\begin{aligned}&\|\zeta\|^2\|w\|^2-|\overline{\zeta}\cdot w|^2=0,\\&K_1(z,\overline{z})\sum|(h_i(z)'\cdot u)|^2-|\sum\overline{h_i(z)}(h_i(z)'\cdot u)|^2=0,\\&K_2(\eta,\overline{\eta})\sum|(g_l(\eta)'\cdot v)|^2-|\sum\overline{g_j(\eta)}(g_j(\eta)'\cdot u)|^2=0.\end{aligned}\tag{2.3}$$

现在将证明 ρ 在 (z_0,η_0,ζ_0) 的 Levi 形式 $L_\rho(T,T)$ 对所有 $T^{1,0}_{(z_0,\eta_0,\zeta_0)}(b_0\widetilde{\Omega}_m)$ 都是正定的.

情形 1 假设 $u\neq 0$. 因为 $K_1(z,\overline{z})=\sum h_i(z)\overline{h_i(z)}$ 与 Hilbert 空间 $A^2(\Omega_1)$ 中标准正交基 $h_i(z)_{i=1}^{\infty}$ 的选取无关且 Ω_1 有界, 从而可以挑选 $h_1(z)$ 是一个非零常数并且选取 $h_2(z)$ 满足 $h_2(z)'\cdot u\neq 0$. 这就说明了 $(h_1(z),h_2(z))$ 和 $(h'(z)\cdot u,h'(z)\cdot u)$ 是线性无关的, 从而

$$K_1(z,\overline{z})\sum|(h_i(z)'\cdot u)|^2-|\sum\overline{h_i(z)}(h_i(z)'\cdot u)|^2>0.$$

这与 (2.3) 式矛盾. 因此 $L_\rho(T,T)>0$ 对所有满足 $u\neq 0$ 的 $T=(u,v,w)\in T^{1,0}_{(z_0,\eta_0,\zeta_0)}(b_0\widetilde{\Omega}_m)$ 成立.

情形 2 假设 $v\neq 0$. 与情形 1 类似, 因为 $K_2(\eta,\overline{\eta})=\sum g_j(\eta)\overline{g_j(\eta)}$ 与 Hilbert 空间 $A^2(\Omega_2)$ 中标准正交基 $g_j(\eta)_{j=1}^{\infty}$ 的选取无关且 Ω_2 有界, 从而可以挑选 $g_1(\eta)$ 是一个非零常数并且选取 $g_2(\eta)$ 满足 $g_2(\eta)'\cdot v\neq 0$. 这就说明了 $(g_1(\eta),g_2(\eta))$ 和 $(g'(\eta)\cdot v,g'(\eta)\cdot v)$ 是线性无关的, 从而

$$K_2(\eta,\overline{\eta})\sum|(g_j(\eta)'\cdot v)|^2-|\sum\overline{g_j(\eta)}(g_j(\eta)'\cdot v)|^2>0,$$

这与 (2.3) 式矛盾. 因此 $L_\rho(T,T)>0$ 对所有满足 $v\neq 0$ 的 $T=(u,v,w)\in T^{1,0}_{(z_0,\eta_0,\zeta_0)}(b_0\widetilde{\Omega}_m)$ 成立.

情形 3 假设 $u=0$ 且 $v=0$, 则由 $T=(u,v,w)\neq 0$ 得到 $w\neq 0$, 从而由 (2.2) 式, 有 $\overline{\zeta}\cdot w=0$. 于是由 $w\neq 0,\zeta\neq 0$ 知

$$\|\zeta\|^2\|w\|^2-|\overline{\zeta}\cdot w|^2=\|\zeta\|^2\|w\|^2>0,$$

这与 (2.3) 式矛盾, 故 $L_\rho(T,T)>0$ 对所有满足 $w\neq 0$ 的 $T=(0,0,w)\in T^{1,0}_{(z_0,\eta_0,\zeta_0)}(b_0\widetilde{\Omega}_m)$ 成立.

这样 Levi 形式 $L_\rho(T,T)$ 在 $T^{1,0}_{(z_0,\eta_0,\zeta_0)}(b_0\widetilde{\Omega}_m)$ 是正定的. 这就是说 $(b_0\widetilde{\Omega}_m)$ 的每一个点都是强拟凸的.

对任意一个不可分解的有界对称域 $\Omega_i\subset\mathbb{C}^{d_i}(i=1,2)$, 有 $G(\widetilde{\Omega}_m)$ 在 $\Omega_1\times\Omega_2\times\{0\}(\subset\widetilde{\Omega}_m)$ 上是可迁的. 因为 $\widetilde{\Omega}_m$ 不是单位球, 由 Wong-Rosay 定理 [11] 可知, $\widetilde{\Omega}_m$ 在 $b\{\Omega_1\times\Omega_2\times\{0\}\}$ 的每一点都不是强拟凸的.

3 主定理的证明

引理 3.1 (见文 [1]) $\Psi\in\mathrm{Aut}(\widetilde{\Omega}_m)$ 把 $\Omega\times\{0\}$ 映为自身.

证 设 $\Psi\in\mathrm{Aut}(\widetilde{\Omega}_m)$ 并在 $\Omega_1\times\Omega_2\times\{0\}$ 中选取序列 $\{(z_j,\eta_j,0)\}$ 收敛到 $b(\Omega_1\times\Omega_2\times\{0\})$. 由 (1.4) 及命题 2.1 可知, 可以选取 $\Phi_j\in\mathrm{Aut}(\widetilde{\Omega}_m)$ 满足 $\Phi_j(0,0,0)=(z_j,\eta_j,0)$. 从而 $\Psi(z_j,\eta_j,0)$ 可以被看为是一个自同构轨道 $\{(\Psi\circ\Phi_j)(0,0,0)\}$. 假设 $\Psi(z_j,\eta_j,0)$ 有一个子序列

收敛到某个 $P \in b_0\widetilde{\Omega}_m$. 从命题 2.3 可知, P 必须是一个强拟凸点. 由 Wong-Rosay 定理可得 $\widetilde{\Omega}_m$ 是齐性域, 从而 $\widetilde{\Omega}_m$ 只能是单位球. 这与 $\widetilde{\Omega}_m$ 不是单位球矛盾. 因此对每一个收敛到 $b(\Omega_1 \times \Omega_2 \times \{0\})$ 的序列 $\{(z_j, \eta_j, 0)\}$, 序列 $\{\Psi(z_j, \eta_j, 0)\}$ 同样收敛到 $b(\Omega_1 \times \Omega_2 \times \{0\})$ 的某点.

设 $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3) \in \mathrm{Aut}(\widetilde{\Omega}_m)$. 由 $f(z,\eta) = \Psi_3(z,\eta,0)$ 定义一个全纯映照 $f: \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{C}^m$. 则 $f(z,\eta)$ 在 $b(\Omega_1 \times \Omega_2)$ 退化, 因此也必然在 $\Omega_1 \times \Omega_2$ 退化, 从而 $\Psi_3(z,\eta,0) \equiv 0$ 对所有的 $z \in \Omega_1, \eta \in \Omega_2$ 成立. 引理 3.1 得证.

引理 3.2 如果 $\Psi \in \mathrm{Aut}(\widetilde{\Omega}_m)$ 满足 $\Psi(0,0,0) = (0,0,0)$, 则 Ψ 具有如下形式: $\Psi(z,\eta,\zeta) = (I_1(z), I_2(\eta), U(\zeta))$, 其中 $I_i \in \mathrm{Aut}(\Omega_i)$, $I_i(0) = 0 (i = 1,2)$ 和 $U \in \mathcal{U}_m$. 特别 $\Psi \in \widetilde{G}$.

证 因为 $\widetilde{\Omega}_m$ 是有界圆形域, 由 Cartan 唯一性定理可知 Ψ 是线性的. 由引理 3.1 知, $\Psi(z,\eta,0) = (I_1(z), I_2(\eta), 0)$ 对 $I_i \in \mathrm{Aut}(\Omega_i)$ 且 $I_i(0) = 0 (i = 1,2)$ 成立. 选取 $\Psi_0 \in \widetilde{G}$ 使得 $\Psi_0(z,\eta,0) = (I_1(z), I_2(\eta), 0)$, 则我们有 $(\Psi_0^{-1} \circ \Psi)(z,\eta,0) = (z,\eta,0)$, 从而 $\Psi_0^{-1} \circ \Psi$ 是线性的, 即

$$(\Psi_0^{-1} \circ \Psi)(z,\eta,\zeta) = \begin{pmatrix} I_{01} & 0 & A \\ 0 & I_{02} & B \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix},$$

其中 $I_{0i}\,(i = 1,2)$ 单位矩阵且 A, B, C 分别为 $d_1 \times m, d_2 \times m$ 阶矩阵. 由于 $\Psi_0^{-1} \circ \Psi \in \mathrm{Aut}(\widetilde{\Omega}_m)$, C 和 C^{-1} 映 $\zeta \in \mathcal{U}_m : \|\zeta\| < 1$ 为自身, 因此 C 是酉矩阵. 下证 $A, B = 0$. 由于线性映射把边界映为边界. 由 $\widetilde{\Omega}_m$ 的定义可得

$$\|C\zeta\|^{2\mu} = N_1(z + A\zeta, z + A\zeta) N_2(\eta + B\zeta, \eta + B\zeta),$$
$$\|\zeta\|^{2\mu} = N_1(z,z) N_2(\eta,\eta).$$

由于 C 是酉矩阵, 有 $N_1(z + A\zeta, z + A\zeta) N_2(\eta + B\zeta, \eta + B\zeta) = N_1(z,z) N_2(\eta,\eta)$. 令 $z = 0, \eta = 0$, 可得 $N_1(0,0) N_2(0,0) = 1$ 和 $N_1(A\zeta, A\zeta) N_2(B\zeta, B\zeta) = 1$. 考虑到 $0 \le N_1(A\zeta, A\zeta) \le 1, 0 \le N_2(B\zeta, B\zeta) \le 1$, 得到如下结果:

$$N_1(A\zeta, A\zeta) = 1, N_2(B\zeta, B\zeta) = 1,$$

也就是说 $A\zeta = 0$, $B\zeta = 0$, $\forall \zeta$. 由此可得 $A = 0, B = 0$ 且有

$$\Psi_0^{-1} \circ \Psi(z,\eta,\zeta) = \begin{pmatrix} I_{01} & 0 & 0 \\ 0 & I_{02} & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix},$$
$$\Psi(z,\eta,\zeta) = (I_1(z), I_2(\eta), C(\zeta)),$$

这就证明了了引理 3.2.

现在来证明定理 1.2. 设 $\Psi \in \mathrm{Aut}(\widetilde{\Omega}_m)$. 由引理 3.1, $\Psi(0,0,0) = (z_0, \eta_0, 0)$ 对某个 $z_0 \in \Omega_1, \eta_0 \in \Omega_2$ 成立. 选取 $\Phi \in \widetilde{G}$ 使得 $\Phi(z_0, \eta_0, 0) = (0,0,0)$. 从而得到 $(\Phi \circ \Psi)(0,0,0) = (0,0,0)$. 由引理 3.2 得到 $\Phi \circ \Psi \in \widetilde{G}$. 再由命题 2.1 知 $\widetilde{G}$ 是一个子群, 从而 $\Psi \in \widetilde{G}$. 这就证明了 $\mathrm{Aut}(\widetilde{\Omega}_m)$ 由 $\widetilde{G}$ 生成. 定理 1.2 得证.

参 考 文 献

[1] Ahn H, Byun J, Park J-D. Automorphisms of the Hartogs type domains over classical symmetric domains[J]. Intern. J. Math., 2012, 23(9): 11 pages.

[2] Bedford E, Pinchuk S I. Domains in $\mathbb{C}^2$ with noncompact groups of holomorphic automorphisms[J]. Matematicheskii Sbornik (N.S.), 1988, 135(2): 147–157 (in Russian); Trans. in Math. USSR-Sbornik, 1989, 63(1): 141–151.

[3] Bedford E, Pinchuk S I. Domains in $\mathbb{C}^2$ with noncompact automorphism groups[J]. Indiana Univer. Math. J., 1998, 47(1): 199–222.

[4] Feng Z M, Tu Z H. On canonical metrics on Cartan-Hartogs domains[J]. Math. Zeitschrift, 2014, 278: 301–320.

[5] Hua L K. Harmornic analysis of functions of several complex variables in the classical domains[M]. Providence, RI: Trans. Math. Monographs Vol.6, American Math. Soc., 1979.

[6] Kim K T, Ninh V T, Yamamori A. The automorphism group of a certain unbounded non-hyperbolic domain[J]. J. Math. Anal. Appl., 2014, 409(2): 637–642.

[7] Thullen P. Zu den Abbildungen durch analytische Funktionen mehrerer komplexer Veranderlichen Die invarianz des Mittelounktes von Kreiskorpern [J]. Mathematische Annalen, 1931, 104(1): 244–259.

[8] Tu Z H, Wang L. Rigidity of proper holomorphic mappings between certain unbounded non-hyperbolic domains[J]. J. Math. Anal. Appl., 2014, 419: 703–714.

[9] Tu Z H, Wang L. Rigidity of proper holomorphic mappings between equidimensional Hua domains[J]. Mathematische Annalen, DOI: 10.1007/s00208-014-1136-1, in press.

[10] Wang A, Yin W, Zhang L, Roos G. The Kähler-Einstein metric for some Hartogs domains over symmetric domains[J]. Sci. China Math. Ser.A, 2006, 49(9): 1175–1210.

[11] Wong B. Characterization of the unit ball in $\mathbb{C}^n$ by its automorphism group[J]. Inventiones Mathematicae, 1977, 41(3): 253–257.

AUTOMORPHISMS OF SOME HARTOGS-TYPE DOMAINS OVER BOUNDED SYMMETRIC DOMAINS

JIN Shuai

(*School of Mathematics and Statistics, Wuhan University, Wuhan 430072, China*)

Abstract: In this paper we study the problem of the general automorphism group of some Hartogs type domains over bounded symmetric domains. With the methods of Tu and Wang who completely describe the automorphism group of the Hua domains, we obtain the explicit form of the automorphism group of some Hartogs type domains over bounded symmetric domains and popularize the automorphism group of Hartogs type domains over bounded symmetric domains.

Keywords: holomorphic automorphism groups; symmetric domains; Hartogs domain

2010 MR Subject Classification: 32A07; 32M05; 32M15