Vol. 35 (2015)
No. 3

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

稳定分布的多期投资组合模型及其应用

玄海燕 [1], 包海明 [1], 石新勇 [2], 杨娜娜 [1]

(1. 兰州理工大学理学院, 甘肃 兰州 730050)

(2. 中国人民解放军 68048 部队, 陕西 宝鸡 721013)

摘 要: 本文研究了多期投资组合模型的问题. 利用非正态稳定分布和参数估计的方法, 建立了市场上含一个无风险证券和多个风险证券时多期投资组合的模型, 对于描述风险证券所具有的偏态和过度峰态的非正态特征及其股市中的应用起到了作用.

关键词: 稳定分布; 投资组合; 参数估计

MR(2010) **主题分类号:** 62P20; 91G10　　**中图分类号:** O212

文献标识码: A　　**文章编号:** 0255-7797(2015)03-0735-08

1 引言

资产组合选择是投资者进行资产投资和管理必须面对的基本问题, 也是金融领域研究的核心问题. 投资组合可以降低投资风险, 是现代金融投资理论的重要内容. 投资者进行投资组合的基本目的是在可容许的风险水平上, 尽可能地得到最大的收益. 但是经验表明, 收益总是和风险形影相随.

Markowitz[1] 提出了用收益率的均值来度量投资组合收益, 用收益率的方差来度量风险, 从而建立了投资组合的均值 - 方差模型. 传统的对投资组合的研究大多采用正态分布来描述收益率的概率分布, 上述模型正是基于正态分布的假设展开的, 但是大量的实证研究表明风险证券的收益率往往不服从正态分布, 其经验分布呈现明显的偏态和过度峰态的非正态特征 [2]. 通过对股市的收益率数据进行统计分析, 发现我国的股票收益率呈现"尖峰厚尾"的特征 [3], 并且比较正态分布和稳定分布, 发现稳定分布对收益率的拟合效果较好, 并且不会低估投资产生的风险 [4].

本文在市场上含有一个无风险证券和多个风险证券时, 假设市场组合收益率服从 α_2 - 稳定非对称分布、扰动项服从 α_1 - 稳定子 - 高斯分布的条件下, 建立了多期投资组合模型, 并得到了该模型的解和参数估计. 最后, 从美国标准普尔指数中抽取样本数据, 给出了多期投资组合的最优投资组合策略, 并验证了该模型的可行性.

2 基于稳定分布的投资组合模型

假设市场有 $n+1$ 种证券, 前 n 种证券为具有稳定分布收益率的风险证券, 且各种风险证券相互独立, 第 $n+1$ 种证券为无风险证券. 设多期投资组合有 $[0,t_1),[t_1,t_2),\cdots,$ $[t_{T-2},\, t_{T-1})$, $[t_{t-1},t_T]$ 共 T 个周期, 在第 $j\,(j=1,2,\cdots,T)$ 个周期, 第 $i\,(i=1,2,\cdots,n)$ 个风

*收稿日期: 2014-01-22　　接收日期: 2014-08/22

基金项目: 国家自然科学基金资助 (11261031); 内蒙古自然科学基金资助 (2013MS0101).

作者简介: 玄海燕 (1973–), 女, 吉林汪清, 副教授, 主要研究方向: 概率统计.

险证券的收益率 z_{i,t_j} 是随机变量, 记风险证券的收益率向量为 $\boldsymbol{z}_{t_j}=(z_{1,t_j},z_{2,t_j},\cdots,z_{n,t_j})^T$, 第 $n+1$ 种无风险证券的收益率为 $z_{0,t}(t=t_0,t_1,\cdots,t_{T-1})$. 股票收益率 z_t 定义为 $z_t=\frac{P_{t+1}-P_t}{P_t}$, 其中 P_t 表示 t 时刻的股票价格. 设 $t=t_j$ 时第 i 个风险证券的投资量为 x_{i,t_j}, 记 n 种风险证券的投资量向量为 $\boldsymbol{x}_{t_j}=(x_{1,t_j},x_{2,t_j},\cdots,x_{n,t_j})^T$, 其中 $t_j=t_0,t_1,\cdots,t_{T-1}$ $(t_0=0,t_i<t_{i+1})$. 在 $t=t_j$ 时, $n+1$ 种证券的投资量为 $W_{t_j}=\sum\limits_{i=0}^{n}x_{i,t_j}$, 则无风险证券投资量为 $x_{0,t_j}=W_{t_j}-\boldsymbol{x}_{t_j}^T\boldsymbol{e}$, 且初始资产 $W_0=\sum\limits_{i=0}^{n}x_{i,0}$ 已知, 其中 $\boldsymbol{e}=(1,1,\cdots,1)_n^T$ 且 x_{0,t_j} 为随机变量.

2.1 主要模型

假设所有风险证券都受市场因素的影响, 则以收益率度量收益, 以尺度参数度量风险, 基于稳定分布的多期市场模型可以表示为:

$$z_{i,t}=\mu_{i,t}+b_{i,t}Y_t+\varepsilon_{i,t}, \tag{2.1}$$

其中 $z_{i,t}$ 表示第 i 个证券在第 t 个周期的收益率; Y_t 表示市场组合收益率, 市场投资组合是整个资本投资市场包含的加权投资组合; $\mu_{i,t}$ 为 $z_{i,t}$ 的均值, $b_{i,t}$ 为第 i 种证券对市场的敏感性, $\varepsilon_{i,t}$ 为随机扰动项. 对 $t=t_0,t_1,\cdots,t_{T-1}$, 假设 Y_t 独立同分布且服从 α_2 - 稳定非对称分布 $(Y_t\sim S_{\alpha_2}(\sigma_Y,\beta_Y,0),\ \beta_Y\neq0,\alpha_2\in(1,2))$, 扰动项 $\boldsymbol{\varepsilon}_t=(\varepsilon_{1,t},\varepsilon_{2,t},\cdots,\varepsilon_{n,t})^T$ 独立同分布且服从 α_1 - 稳定子 - 高斯分布 $(\varepsilon_{i,t}\sim S_{\alpha_1}(\sigma_i,0,0),\alpha_1\in(1,2])$, Y_t 和 $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ 之间是相互独立的. 在这些假设下, 收益率的相关结果基本上就可以用扰动项 $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ 的方差矩阵 $\boldsymbol{Q}_t=(\sigma_{ij})_{n\times n}$ 来描述, 收益率向量有指数小于 $\min(\alpha_1,\alpha_2)$ 的正的极小矩. 此外, 由于 $\boldsymbol{\mu}_t,Y_t,\boldsymbol{\varepsilon}_t$ 相互独立, 所以 $\boldsymbol{z}_t$ 的特征函数可表示为

$$\Phi_{\boldsymbol{z}_t}(\boldsymbol{u})=\exp\{-(\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{Q}_t\boldsymbol{u})^{\frac{\alpha_1}{2}}-|\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{b}_t\sigma_Y|^{\alpha_2}[1-i|\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{b}_t\sigma_Y|^{\langle\alpha_2\rangle}\beta_Y\tan\frac{\pi\alpha}{2}]+i\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{\mu}_t\}, \tag{2.2}$$

其中 $x^{\langle\alpha\rangle}=\operatorname{sign}(x)|x|^\alpha$, $\boldsymbol{b}_t=(b_{1,t},b_{2,t},\cdots,b_{n,t})^T$, $\boldsymbol{\mu}_t=E(\boldsymbol{z}_t)$, $\boldsymbol{Q}_t$ 为扰动向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_t=(\varepsilon_{1,t},\varepsilon_{2,t},\cdots,\varepsilon_{n,t})^T$ 在时间 t 时正定的方差矩阵, 且 σ_Y, β_Y 分别是 Y(与 $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ 独立) 的尺度参数和偏度参数.

下面考虑第 k 期末的资产量

$$W_{t_{k+1}}=\sum_{i=0}^{n}x_{i,t_k}(1+z_{i,t_k})=(1+z_{0,t_k})W_{t_k}+\boldsymbol{x}_{t_k}^T\boldsymbol{p}_{t_k},\quad k=0,1,2,\cdots,T-1,$$

其中 $\boldsymbol{p}_{t_k}=(p_{1,t_k},p_{2,t_k},\cdots,p_{n,t_k})^T$ 为超额收益率向量, $p_{i,t_k}=z_{i,t_k}-z_{0,t_k}$, 则最终资产可以表示为

$$\begin{aligned}W_{t_T}&=(1+z_{0,t_{T-1}})W_{t_{T-1}}+\boldsymbol{x}_{t_{T-1}}^T\boldsymbol{p}_{t_{T-1}}\\&=\prod_{k=0}^{T-1}(1+z_{0,t_k})W_0+\sum_{i=0}^{T-2}[\boldsymbol{x}_{t_i}^T\boldsymbol{p}_{t_i}\prod_{k=i+1}^{T-1}(1+z_{0,t_k})]+\boldsymbol{x}_{t_{T-1}}^T\boldsymbol{p}_{t_{T-1}},\end{aligned}$$

其中 $W_{t_0}=W_0$, 因为多期投资组合策略中风险资产的投入量 $\boldsymbol{x}_{t_j}$ 是确定的, 并且收益率向量相互独立, 所以在 t_0 最终资产 W_{t_T} 的条件期望为

$$E_{t_0}(W_{t_T})=W_0\prod_{k=0}^{T-1}(1+z_{0,t_k})+\sum_{i=0}^{T-2}[\boldsymbol{x}_{t_i}^TE_{t_0}(\boldsymbol{p}_{t_i})\prod_{k=i+1}^{T-1}(1+z_{0,t_k})]+\boldsymbol{x}_{t_{T-1}}^TE_{t_0}(\boldsymbol{p}_{t_{T-1}}).$$

当收益率向量独立 (即 p_{t_i} 与在时间 t_0 的价格生成的 σ 代数上的 p_{t_0} 独立) 时, 有 $E_{t_0}(p_{t_i})=E(p_{t_i})$. 令 $\boldsymbol{z}_0^{(t_i)}=[z_{0,t_i},\cdots,z_{0,t_i}]^T$, 则

$$\begin{aligned}W_{t_T} &= W_0\prod_{k=0}^{T-1}(1+z_{0,t_k})-\sum_{i=0}^{T-2}[\boldsymbol{x}_{t_i}^T\boldsymbol{z}_0^{(t_i)}\prod_{k=i+1}^{T-1}(1+z_{0,t_k})]-\boldsymbol{x}_{t_{T-1}}^T\boldsymbol{z}_0^{(t_{T-1})}\\&\quad+\sum_{i=0}^{T-2}[\boldsymbol{x}_{t_i}^T\boldsymbol{\mu}_{t_i}\prod_{k=i+1}^{T-1}(1+z_{0,t_k})]+\boldsymbol{x}_{t_{T-1}}^T\boldsymbol{\mu}_{t_{T-1}}\\&\quad+\sum_{i=0}^{T-2}[\boldsymbol{x}_{t_i}^T\boldsymbol{b}_{t_i}Y_{t_i}\prod_{k=i+1}^{T-1}(1+z_{0,t_k})]+\boldsymbol{x}_{t_{T-1}}^T\boldsymbol{b}_{t_{T-1}}Y_{t_{T-1}}\\&\quad+\sum_{i=0}^{T-2}[\boldsymbol{x}_{t_i}^T\varepsilon_{t_i}\prod_{k=i+1}^{T-1}(1+z_{0,t_k})]+\boldsymbol{x}_{t_{T-1}}^T\varepsilon_{t_{T-1}}.\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{z}_{t_i}=\boldsymbol{p}_{t_i}+\boldsymbol{z}_0^{(t_i)}$, 所以 $\boldsymbol{\mu}_{t_i}=E(\boldsymbol{z}_{t_i})=E(\boldsymbol{p}_{t_i}+\boldsymbol{z}_0^{(t_i)})=E(\boldsymbol{p}_{t_i})+\boldsymbol{z}_0^{(t_i)}$, 又因为 Y_{t_i} 服从相同的稳定分布, 则

$$\begin{aligned}W_{t_T}=&W_0\prod_{k=0}^{T-1}(1+z_{0,t_k})+\sum_{i=0}^{T-2}[\boldsymbol{x}_{t_i}^TE_{t_0}(\boldsymbol{p}_{t_i})\prod_{k=i+1}^{T-1}(1+z_{0,t_k})]+\boldsymbol{x}_{t_{T-1}}^TE_{t_0}(\boldsymbol{p}_{t_{T-1}})\\&+Y\{\sum_{i=0}^{T-2}[\boldsymbol{x}_{t_i}^T\boldsymbol{b}_{t_i}\prod_{k=i+1}^{T-1}(1+z_{0,t_k})]+\boldsymbol{x}_{t_{T-1}}^T\boldsymbol{b}_{t_{T-1}}\}+\sum_{i=0}^{T-2}[\boldsymbol{x}_{t_i}^T\varepsilon_{t_i}\prod_{k=i+1}^{T-1}(1+z_{0,t_k})]+\boldsymbol{x}_{t_{T-1}}^T\varepsilon_{t_{T-1}}\\=&E_{t_0}(W_{t_T})+A_xY+\Psi_x,\end{aligned}\tag{2.3}$$

其中

$$\begin{aligned}E_{t_0}(W_{t_T}) &= W_0\prod_{k=0}^{T-1}(1+z_{0,t_k})+\sum_{i=0}^{T-2}[\boldsymbol{x}_{t_i}^TE_{t_0}(\boldsymbol{p}_{t_i})\prod_{k=i+1}^{T-1}(1+z_{0,t_k})]+\boldsymbol{x}_{t_{T-1}}^TE_{t_0}(\boldsymbol{p}_{t_{T-1}}),\\A_x &= \sum_{i=0}^{T-2}[\boldsymbol{x}_{t_i}^T\boldsymbol{b}_{t_i}\prod_{k=i+1}^{T-1}(1+z_{0,t_k})]+\boldsymbol{x}_{t_{T-1}}^T\boldsymbol{b}_{t_{T-1}},\\\Psi_x &= \sum_{i=0}^{T-2}[\boldsymbol{x}_{t_i}^T\varepsilon_{t_i}\prod_{k=i+1}^{T-1}(1+z_{0,t_k})]+\boldsymbol{x}_{t_{T-1}}^T\varepsilon_{t_{T-1}}\end{aligned}$$

且 $\Psi_x\sim S_{\alpha_1}(\sigma_{(\boldsymbol{x}_{t_i}^T\boldsymbol{\varepsilon}_{t_i})},0,0)$, 尺度参数 $\sigma_{(\boldsymbol{x}_{t_i}^T\boldsymbol{\varepsilon}_{t_i})}$ 可以表示为

$$\sigma_{(\boldsymbol{x}_{t_i}^T\boldsymbol{\varepsilon}_{t_i})}^{\alpha_1}=\sum_{i=0}^{T-2}(\boldsymbol{x}_{t_i}^T\boldsymbol{Q}_{t_i}\boldsymbol{x}_{t_i})^{\frac{\alpha_1}{2}}\prod_{k=i+1}^{T-1}(1+z_{0,t_k})^{\alpha_1}+(\boldsymbol{x}_{t_{T-1}}^T\boldsymbol{Q}_{t_{T-1}}\boldsymbol{x}_{t_{T-1}})^{\frac{\alpha_1}{2}}.\tag{2.4}$$

因此, 在允许卖空的条件下, 对固定的 m,υ,W_0, 厌恶风险投资者会选择下面最优化问题的解来作为多期投资组合的策略:

$$\begin{aligned}&\min\frac{1}{2}\sigma_{(\boldsymbol{x}_{t_i}^T\boldsymbol{\varepsilon}_{t_i})}^{\alpha_1}\qquad \text{s.t. } E_{t_0}(W_{t_T})=m,\\&A_x=\sum_{i=0}^{T-2}[\boldsymbol{x}_{t_i}^T\boldsymbol{b}_{t_i}\prod_{k=i+1}^{T-1}(1+z_{0,t_k})]+\boldsymbol{x}_{t_{T-1}}^T\boldsymbol{b}_{t_{T-1}}=\upsilon.\end{aligned}\tag{2.5}$$

2.2 模型求解与参数估计

该模型的 Lagrange 函数为

$$L(\boldsymbol{x}_{t_i},\lambda_1,\lambda_2)=\frac{1}{2}\sigma^{\alpha_1}_{(\boldsymbol{x}^T_{t_i}\boldsymbol{\varepsilon}_{t_i})}-\lambda_1[E_{t_0}(W_{t_T})-m]-\lambda_2(A_x-\upsilon).$$

由矩阵微商的性质 [5], 有

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{x}_{t_i},\lambda_1,\lambda_2)}{\partial \boldsymbol{x}_{t_i}}=\frac{\alpha_1}{2}[\boldsymbol{Q}_{t_i}\boldsymbol{x}_{t_i}(\boldsymbol{x}^T_{t_i}\boldsymbol{Q}_{t_i}\boldsymbol{x}_{t_i})^{\frac{\alpha_1-2}{2}}B^{\alpha_1}_{i+1}]-\lambda_1E_{t_0}(\boldsymbol{p}_{t_i})B_{i+1}-\lambda_2\boldsymbol{b}_{t_i}B_{i+1},$$

其中 $B_i=\prod\limits_{k=i+1}^{T-1}(1+z_{0,t_k})$, 令 $\frac{\partial L(\boldsymbol{x}_{t_i},\lambda_1,\lambda_2)}{\partial \boldsymbol{x}_{t_i}}=0$, 解得

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_{t_i} &= (\frac{2}{\alpha_1})^{\frac{1}{(\alpha_1-1)}}\frac{\{[\lambda_1E_{t_0}(\boldsymbol{p}_{t_i})+\lambda_2\boldsymbol{b}_{t_i}]^T\boldsymbol{Q}^{-1}_{t_i}[\lambda_1E_{t_0}(\boldsymbol{p}_{t_i})+\lambda_2\boldsymbol{b}_{t_i}]\}^{\frac{2-\alpha_1}{(\alpha_1-1)2}}}{B_{i+1}}\\
&\quad \boldsymbol{Q}^{-1}_{t_i}[\lambda_1E_{t_0}(\boldsymbol{p}_{t_i})+\lambda_2\boldsymbol{b}_{t_i}], \qquad \forall i=0,1,\cdots,T-2,\\
\boldsymbol{x}_{t_{T-1}} &= (\frac{2}{\alpha_1})^{\frac{1}{(\alpha_1-1)}}\{[\lambda_1E_{t_0}(\boldsymbol{p}_{t_{T-1}})+\lambda_2\boldsymbol{b}_{t_{T-1}}]^T\boldsymbol{Q}^{-1}_{t_{T-1}}[\lambda_1E_{t_0}(\boldsymbol{p}_{t_{T-1}})+\lambda_2\boldsymbol{b}_{t_{T-1}}]\}^{\frac{2-\alpha_1}{(\alpha_1-1)2}}\\
&\quad \boldsymbol{Q}^{-1}_{t_{T-1}}[\lambda_1E_{t_0}(\boldsymbol{p}_{t_{T-1}})+\lambda_2\boldsymbol{b}_{t_{T-1}}],
\end{aligned}$$

并且 λ_1, λ_2 由下面的 (2.6) 式

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=0}^{T-2}[\boldsymbol{x}^T_{t_i}\boldsymbol{b}_{t_i}B_{i+1}]+\boldsymbol{x}^T_{t_{T-1}}\boldsymbol{b}_{t_{T-1}}=\upsilon,\\ \sum\limits_{i=0}^{T-2}[\boldsymbol{x}^T_{t_i}E_{t_0}(\boldsymbol{p}_{t_i})B_{i+1}]+\boldsymbol{x}^T_{t_{T-1}}E_{t_0}(\boldsymbol{p}_{t_{T-1}})=m-W_0B_0\end{cases}\tag{2.6}$$

唯一确定. 此外, 把最终资产扰动项 Ψ_x 的方差表示为拉格朗日系数 λ_1, λ_2 的函数.

$$\sigma^{\alpha_1}_{(\boldsymbol{x}^T_{t_i}\boldsymbol{\varepsilon}_{t_i})}=\sum_{i=0}^{T-1}\{(\frac{2}{\alpha_1})^2[(\lambda_1E_{t_0}(\boldsymbol{p}_{t_i})+\lambda_2\boldsymbol{b}_{t_i})^T\boldsymbol{Q}^{-1}_{t_i}(\lambda_1E_{t_0}(\boldsymbol{p}_{t_i})+\lambda_2\boldsymbol{b}_{t_i})]\}^{\frac{\alpha_1}{2(\alpha_1-1)}}.$$

另一方面, 在区间 $[t_k,t_{k+1})$, 当 $t_k=t_0$ 时, 投入到无风险资产的量为 $W_0-\boldsymbol{x}^T_0\boldsymbol{e}$; 对 $\forall k\geq 1$, 投入到无风险资产的量为 $W_{t_k}-\boldsymbol{x}^T_{t_k}\boldsymbol{e}$, 其中 $W_{t_1}=(1+z_{0,0})W_0+\boldsymbol{x}^T_0\boldsymbol{p}_0$, 且对 $\forall j\geq 2$, 得到

$$W_{t_j}=\prod_{k=0}^{j-1}(1+z_{0,t_k})W_0+\sum_{i=0}^{j-2}[\boldsymbol{x}^T_{t_i}\boldsymbol{p}_{t_i}\prod_{k=i+1}^{j-1}(1+z_{0,t_k})]+\boldsymbol{x}^T_{t_{j-1}}\boldsymbol{p}_{t_{j-1}}.$$

特别地, 当扰动向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_t=(\varepsilon_{1,t},\varepsilon_{2,t},\cdots,\varepsilon_{n,t})^T$ 服从高斯分布时 (即 $\alpha_1=2$), 该模型的解有更简单的形式. 把 $\boldsymbol{x}_{t_i}$, $\boldsymbol{x}_{t_{T-1}}$ 带入 (2.6) 式, 解得

$$\begin{cases}\lambda_1=\dfrac{(m-W_0B_0)A-\upsilon D}{AC-D^2},\\ \lambda_2=\dfrac{\upsilon C-(m-W_0B_0)D}{AC-D^2},\end{cases}$$

其中

$$A=\sum_{i=0}^{T-1}\boldsymbol{b}_{t_i}^T\boldsymbol{Q}_{t_i}^{-1}\boldsymbol{b}_{t_i},\quad B_i=\prod_{k=i+1}^{T-1}(1+z_{0,t_k}),$$
$$C=\sum_{i=0}^{T-1}E_{t_0}(\boldsymbol{p}_{t_i})^T\boldsymbol{Q}_{t_i}^{-1}E_{t_0}(\boldsymbol{p}_{t_i}),\quad D=\sum_{i=0}^{T-1}E_{t_0}(\boldsymbol{p}_{t_i})^T\boldsymbol{Q}_{t_i}^{-1}\boldsymbol{b}_{t_i}.$$

从而最优解为

$$x_{t_i}=\frac{[(m-W_0B_0)A-\upsilon D]\boldsymbol{Q}_{t_i}^{-1}E_{t_0}(\boldsymbol{p}_{t_i})}{(AC-D^2)B_{i+1}}+\frac{[\upsilon C-(m-W_0B_0)D]\boldsymbol{Q}_{t_i}^{-1}\boldsymbol{b}_{t_i}}{(AC-D^2)B_{i+1}},\ \forall i=0,1,\cdots,T-2,$$
$$x_{t_{T-1}}=\frac{[(m-W_0B_0)A-\upsilon D]\boldsymbol{Q}_{t_{T-1}}^{-1}E_{t_0}(\boldsymbol{p}_{t_{T-1}})}{AC-D^2}+\frac{[\upsilon C-(m-W_0B_0)D]\boldsymbol{Q}_{t_{T-1}}^{-1}\boldsymbol{b}_{t_{T-1}}}{AC-D^2}. \tag{2.7}$$

在该模型的求解过程中涉及几个参数: 稳定性指数 α_1, 均值向量 $\boldsymbol{\mu}_t$, 扰动项的方差矩阵 $\boldsymbol{Q}_{t_i}$ 以及向量 $\boldsymbol{b}_t=(b_{1,t},b_{2,t},\cdots,b_{n,t})^T$. 设稳定性指数 α_1 为各个资产稳定性指数的平均值, 均值向量 $\boldsymbol{\mu}_t$ 的估计由样本的均值向量 $\widehat{\boldsymbol{\mu}}$ 给出. 设 $\widetilde{z_i}=z_i-\widehat{\mu_i}(i=1,2,\cdots,n)$, 有 $\widetilde{z_i}=\varepsilon_i+b_iY(i=1,2,\cdots,n)$, 则 $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$ 的一元线性回归估计为

$$\widehat{b_i}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}[Y^{(k)}\widetilde{z_i}^{(k)}]}{\sum\limits_{k=1}^{n}(Y^{(k)})^2},i=1,2,\cdots,n, \tag{2.8}$$

其中 $Y^{(k)}$ 和 $\widetilde{z_i}^{(k)}$ 分别表示 Y 和 $\widetilde{z_i}$ 的第 k 个观察值. 再利用 Samorodnitsky 等 [6](1994) 中的性质 1.2.17, 得到方差矩阵 $\boldsymbol{Q}=(\sigma_{ij}^2)$ 的矩估计:

$$\begin{cases}\widehat{\sigma}_{jj}^2=[A(p)\dfrac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N}|\widetilde{\varepsilon_j}^{(k)}|^p]^{\frac{2}{p}},\\ \widehat{\sigma}_{ij}^2=\dfrac{1}{2}\{[A(p)\dfrac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N}|\widetilde{\varepsilon_j}^{(k)}+\widetilde{\varepsilon_i}^{(k)}|^p]^{\frac{2}{p}}-\widehat{\sigma}_{jj}^2-\widehat{\sigma}_{ii}^2\},\end{cases} \tag{2.9}$$

其中 $A(p)=\frac{\Gamma(1-\frac{p}{2})\sqrt{\pi}}{2^p\Gamma(1-\frac{p}{\alpha})\Gamma(\frac{p+1}{2})},\quad p\in(0,\alpha_1)$.

3 在股市中的应用

在本节中, 选取美国股票市场中的 5 支股票进行实证研究, 分别是: AA(美国铝业)、IBM、PG(苹果电脑)、DE(戴尔电脑)、HPQ(惠普电脑), 市场指数选取标准普尔 500 指数 (Standard & Poor’s 500, 简写为 SP5). 对美国投资市场, 常用标准普尔 500 指数 (Standard & Poor’s 500) 来代表市场组合, 标准普尔 500 指数被认为是美国投资市场的主要指数. 与道琼斯指数相比, 标准普尔 500 指数包含的公司更多, 因此风险更为分散, 能够反映更广泛的市场变化. 数据选取从 1990 年 1 月至 2008 年 12 月 5 只股票和 SP5 的月对数收

益率数据, 对每只股票, 共有 228 个数据. 为了方便处理数据, 每个收益率数据均表示百分数, 即数据中的 a 表示收益率为 $a\%$.

采用 Nolan 教授提供的分析稳定分布的 STABLE 程序处理股票数据. Nolan 在 2002 年 12 月给出了对给定大样本数据进行处理的 STABLE 程序, 可以通过该程序拟合每组数据的稳定参数 $\alpha, \beta, \sigma, \delta$, 并且可以求出该组数据的主要的数字特征: 最大值、最小值, 均值、标准差、偏度和峰度. 对 6 组数据进行计算, 结果如表 1:

表 1: 稳定参数的极大似然估计以及最大值、最小值, 均值、标准差、偏度和峰度

股票	α	β	σ	δ	最小值	最大值	均值	标准差	偏度	峰度
SP5	1.730	-0.997	2.576	1.158	-16.998	10.820	0.1794	4.180	-0.686	4.433
AA	1.822	0.808	5.646	-0.228	-49.126	50.781	0.396	9.714	-0.194	8.328
DE	2.000	0.000	5.838	1.107	-29.554	19.817	0.808	8.353	-0.519	3.485
HPQ	1.598	0.142	6.257	0.791	-32.503	35.258	1.220	10.616	0.975	3.793
IBM	1.787	0.550	5.340	0.231	-26.459	35.248	0.678	8.712	0.313	4.428
PG	1.679	-0.151	3.418	1.113	-36.178	24.763	0.909	6.181	-0.761	8.716

从表 1 可以看出, SP5 的特征指数 α 与其余 5 支股票的特征指数并不相同. 稳定分布的稳定性要求所有稳定随机变量的特征指数相同, 否则稳定分布随机变量的线性组合不服从稳定分布. 因此在模型中我们假设 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$. 另外可以看到各支股票的峰度比正态分布的大 (正态分布的峰度为 3), 可以很好的说明各支股票的收益率不服从正态分布, 并且除了戴尔 (DE) 股票, 其余股票的稳定性指数 α 都小于 2, α 越小, 峰部越尖, 尾部越厚, 说明各支股票收益率分布具有尖峰厚尾的特征.

由 (2.8) 式, 求得各支股票对股票的市场敏感性见表 2:

表 2: AA、IBM、PG、DE、HPQ 对股票市场的敏感性

股票	AA	DE	HPQ	IBM	PG
$\hat{b}$	1.4417	0.9222	1.5003	1.1596	0.4690

由表 2 可以看出, 惠普 (HPQ) 股票对市场的敏感性较大, 说明惠普股票受市场影响较大, 其次是美国铝业 (AA)、IBM、戴尔 (DE) 和苹果公司 (PG). 苹果股票对市场的敏感性最小, 说明苹果股票比较稳定.

因为 $p \in (0, \alpha_1)$, $\alpha_1 \in (1, 2]$, 取 $p = 1.5$, 由 (2.9) 式可以求得扰动项的方差矩阵

$$\boldsymbol{Q} = [A(\frac{3}{2})]^{\frac{4}{3}} \begin{pmatrix} 44.0103 & 9.2999 & 6.9944 & 4.9761 & -11.9670 \\ 9.2999 & 44.8861 & -2.8850 & -2.7726 & -2.2309 \\ 6.9944 & -2.8850 & 55.7970 & 4.9761 & -9.0910 \\ 4.9761 & -2.7226 & 9.8940 & 38.8413 & -10.0237 \\ -11.9670 & -2.6309 & -9.0910 & -10.0237 & 37.0432 \end{pmatrix}.$$

在本文的模型中还涉及一个无风险证券, 指的是能按时履约的固定收入证券, 通俗的讲就是没有任何风险的证券, 其利率称为无风险利率. 在证券界常常将期限小于三个月的短期国债作为无风险证券. 这是因为三个月期限很短, 在这期限内, 市场波动对债券的影响非常小, 其收益基本上是不变的, 可以认为是无风险的. 结合我国的实际情况, 目前我国还没有期限为三个月的国库券, 因此无风险利率可以视为短期存款利率.

在现实生活中, 通常将政府债券当作无风险证券, 因为政府债券通常是有固定收入的证券, 并且在正常情况下, 政府所做的支付承诺能够按计划兑现. 即使政府收入不抵支出, 政府也可以通过增发货币来兑现, 不过此时投资者会增加购买力的风险. 因此, 无风险证券只是一种假想证券, 假设存在无风险证券, 主要的目的是为了说明在无风险条件下的证券投资组合价值的决定机制.

考虑从 2007 年 7 月至 2007 年 12 月为期半年的投资组合, 时间长度 $t_{j+1}-t_j=1$ 为常数, 即 $T=6$, 并且在多期投资组合的每一个期间末, 重新调整投资组合. 在这半年内, 假设每个月的无风险利率 $z_{0,t_j}, j=0,1,\cdots,5$ 为常数, 取为该时期内银行存款利息 0.315%, 则 $z_{0,t_j}=0.315\ (j=0,1,\cdots,5)$. 利用 MATLAB 求得方差矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{Q}^{-1}$ 为

$$\boldsymbol{Q}^{-1}=\frac{1}{[A(\frac{3}{2})]^{\frac{4}{3}}}\begin{pmatrix} 0.0263 & -0.0053 & -0.0021 & -0.0016 & 0.0072\\ -0.0053 & 0.0237 & 0.0016 & 0.0024 & 0.0007\\ -0.0023 & 0.0019 & 0.0191 & -0.0010 & 0.0038\\ -0.0013 & 0.0021 & -0.0037 & 0.0282 & 0.0064\\ 0.0072 & 0.0010 & 0.0031 & 0.0070 & 0.0321 \end{pmatrix}.$$

假设扰动项的稳定性指数 $\alpha_1=2$, 利用 MATLAB 算得 $A(\frac{3}{2})=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}\Gamma(\frac{5}{4})}=0.6940$, 则

$$\boldsymbol{Q}^{-1}=\begin{pmatrix} 0.0431 & -0.0086 & -0.0034 & -0.0026 & 0.0118\\ -0.0087 & 0.0387 & 0.0026 & 0.0039 & 0.0012\\ -0.0037 & 0.0030 & 0.0313 & -0.0017 & 0.0062\\ -0.0021 & 0.0035 & -0.0060 & 0.0461 & 0.0105\\ 0.0118 & 0.0017 & 0.0051 & 0.0115 & 0.0524 \end{pmatrix}.$$

从而求得 $A=1.5570$, $C=38.1530$, $D=-3.4662$.

假设风险投资者手头有资金 $W_0=100000$ 美元, 期望资产为 $m=120000$ 美元, 相应地另一个参数设为 $\nu=120000$, 则为了使投资组合的风险达到最小, 投资者在每个时期的投资 $\boldsymbol{x}_{t_i}=(x_{1,t_i},x_{2,t_i},\cdots,x_{5,t_i})^T(i=0,1,\cdots,5)$ 为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_{t_0}&=(5616.5\quad 392.7\quad 4676.9\quad 3665.5\quad 6464.7)^T,\\
\boldsymbol{x}_{t_1}&=(1253.5\quad 473.4\quad 3275.4\quad 5894.9\quad 2680.9)^T,\\
\boldsymbol{x}_{t_2}&=(3312.0\quad 1033.3\quad 1966.2\quad 3289.2\quad 3942.9)^T,\\
\boldsymbol{x}_{t_3}&=(3174.1\quad -167.5\quad 1503.2\quad 1596.3\quad 1525.9)^T,\\
\boldsymbol{x}_{t_4}&=(1323.5\quad -330.4\quad 748.8\quad 782.9\quad 848.7)^T,\\
\boldsymbol{x}_{t_5}&=(653.1\quad 930.1\quad 997.0\quad 813.1\quad 1155.0)^T.
\end{aligned}$$

可以看到, 风险证券之间的相对投资组合投入量 (投资组合权重) 不仅和投资者的主观因素有关, 比如投资者的期望收益, 还和扰动项的选择有关系. 上面投资出现负值的解释为: 戴尔股票在 t_3 和 t_4 不但不增加投资, 而且要把前期的投资拿出一部分, 投资到其他股票中. 因为苹果股票对市场的敏感性较小, 相对比较稳定, 所以在苹果股票上的投资量相对其他股票小.

4 结论

从风险厌恶型投资者的视角, 假设市场组合服从稳定非对称分布、扰动项服从子 - 高斯稳定分布, 求得了一种无风险证券和 n 种风险证券投资组合最终资产的表达式; 然后直接用最终的资产量来度量收益, 研究了一种基于非正态稳定分布条件下离散时间的多期投资组合模型; 选取美国股票市场中的 5 支股票: AA (美国铝业)、IBM、PG (苹果电脑)、DE (戴尔电脑)、HPQ (惠普电脑), 市场指数选取标准普尔 500 指数, 进行了实证研究, 给出 $T = 6$ 时的最优投资组合策略. 发现不同最优投资组合的差异不仅表现在对不同风险证券的投资权重不同, 而且表现在对同一个风险证券在投资组合的不同周期的投资组合权重也是不同的, 并且发现对市场敏感性小的风险证券的投资组合权重相对比较稳定.

参 考 文 献

[1] Markowitz H. Portfolio selection[J]. The Journal of Finance, 1952, 7(1): 77–91.
[2] 徐龙炳. 中国股票市场股票收益稳态特性的实证研究 [J]. 金融研究, 2001, 252(6): 36–43.
[3] Xu Weidong, Wu Chongfeng, Dong Yucheng, Xiao Weilin. Modeling Chineses stock returns with stable distribution[J]. Math. Compu. Model., 2011, 54(1-2): 610–617.
[4] 武东, 汤银才. 稳定分布及其在金融中的应用 [J]. 应用概率统计, 2007, 23(4): 434–445.
[5] 张尧庭, 方开泰. 多元统计分析引论 [M]. 北京: 科学出版社, 1999.
[6] Samorodnitsky G, Taqqu M S. Stable non-Gaussian random processes: stochastic models with infinite variance[M]. New York: Chapman and Hall, 1994.

MULTI-PERIOD PORTFOLIO MODEL AND ITS APPLICATION OF STABLE DISTRIBUTION

XUAN Hai-yan[1], BAO Hai-ming[1], SHI Xin-yong[2], YANG Na-na[1]
(*1.College of Science, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China*)
(*2.Troops 68048, The Chinese People's Liberation Army, Baoji 721013,China*)

Abstract: In this paper, we study the problem of the multi-period portfolio model. By using the method of non-normal stable distributions and parameter estimation, the model of the multi-period portfolio of the market including a risk-free security and some risk securities is established. It plays a role in describing risk securities which there are the non-normal characteristics with skewness and excess kurtosis, and the application of the stock market.

Keywords: stable distribution; portfolio; parameter estimation
2010 MR Subject Classification: 62P20; 91G10