

Γ - 半群异于通常半群的独特性质

李 庆¹, 喻秉钧²

(1. 重庆师范大学数学学院, 重庆 400047)
(2. 四川师范大学文理学院, 四川 成都 610059)

摘 要: 本文研究了 Γ - 半群的一些性质. 利用研究通常半群的方法, 并结合 Γ - 半群的特殊性, 获得了关于 Γ - 半群性质, 推广了通常半群的结论, 特别探讨了 Γ - 半群的夹心集.

关键词: 半群; Γ - 半群; 夹心集

MR(2010) 主题分类号: 20M99

中图分类号: O152.7

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2015)03-0714-13

1 引言

半群由印度数学家 Sen 和 Saha 于 1986 年引入^[1]. 经过多年研究, Γ - 半群理论得到相当完善. Γ - 半群是一般半群的真推广并且有着很多和半群相平行的概念. 对应于正则半群、单半群、纯正半群、逆半群, Γ - 半群有正则 Γ - 半群、单 Γ - 半群、纯正 Γ - 半群、逆 Γ - 半群. Γ - 半群中也有正则元、逆元的概念. 半群中的重要工具 Green 关系也在 Γ - 半群中找到了类似物, 1987 年 Dutta 年定义了 Γ - 半群中的格林关系^[2].

在一系列基础概念提出后, 学者们把半群中的很多性质推广到了 Γ - 半群中. Dutta 和 Saha 研究了 Γ - 半群 Green 关系的性质和 $\mathcal{D}$ 类的结构; Seth 证明了一个 Γ - 半群是完全 0 单的充要条件是它同构于一个群上的含 0 正则 Rees 矩阵 Γ - 半群, 从而解决了完全 0 单 Γ - 半群的结构; 在对 Γ - 半群的结构研究方面, 盛德成、赵宪钟还给出了带 Γ - 半群的一般结构; 杨国为得到了完全单 Γ - 半群和有完全单 Γ - 核的半群的结构定理; 在对 Γ - 半群的同余研究方面, Sen 给出了正则 Γ - 半群及纯正 Γ - 半群的最大幂等元分离同余的刻画; 杨国为, 朱平研究了完全 0 单 Γ - 半群的同余及同余格, 并把正则半群上对同余的刻画推广到了 Γ - 正则半群上. 此外, 赵宪钟提出了 Γ - 纯正半群的概念, 证明了纯正 Γ - 半群类和 Γ - 纯正半群类是互不包含且交非空的, 他还对几类特殊的 Γ - 半群的相关半群作了研究^[3-13].

总之, Γ - 半群仍是学者们的一个重点研究对象, 近年来仍然有不少关于 Γ - 半群的文章^[14-16], 其理论仍在不断的发展和完善中. 作为半群概念的真推广, 它既有着和半群相似的性质, 又有着异于半群的性质. 本文就是在此基础之上继续探究 Γ - 半群的一些基本性质. 我们还将半群的夹心集概念推广到 Γ - 半群上, 并着重讨论了 Γ - 半群的夹心集的性质和结构. Γ - 半群的夹心集既有和一般半群夹心集相似的一面, 又有和一般半群夹心集不同的一面. 对某个给定的 η , 夹心集 $S_\eta(a, b)$ 是相关半群 S_η 的子半群且是矩形带, 但是夹心集 $S(a, b)$ 却不是 Γ - 矩形带. 在讨论 Γ - 半群的夹心集时, 结论虽与一般半群有些相似, 但却需要克服由于 Γ - 半群的特殊性带来的一系列困难.

*收稿日期: 2012-09-14

接收日期: 2012-10-23

基金项目: 重庆师范大学青年基金项目资助 (2011XLQ28).

作者简介: 李庆 (1971-), 四川南溪, 讲师, 博士, 主要研究方向: 代数方向.

本文首先讨论 Γ - 半群的基本性质, 如广义结合律和相关半群. 由于 Γ - 半群是一般半群的真推广, 一方面, 它具有一般半群的相似甚至相同的性质, 如 Green 关系及相应的 Green 引理, (它们的具体表现形式与半群中也有所不同). 另一方面, Γ - 半群也具有和一般半群不同的性质, 如 Γ - 半群的含幂等元 $\mathcal{H}$ - 类可以包含多个幂等元.

2 定义, 广义结合律, 正则性和 Green - 等价关系

定义 2.1 ^[1] 设 S, Γ 是两个非空集, 称 S 为 Γ - 半群, 若存在映射 $S \times \Gamma \times S \rightarrow S$, $(a, \alpha, b) \mapsto a\alpha b$ 满足 $\forall a, b, c \in S, \alpha, \beta \in \Gamma$, 有 $(a\alpha b)\beta c = a\alpha(b\beta c)$.

例 2.2 ^[1] (1) 设 S 是通常半群, $\Gamma = \{\alpha\}$ 为一元集. 定义 $S \times \Gamma \times S \rightarrow S$ 为 $(x, \alpha, y) \mapsto x\alpha y = xy$, 显然, 这定义了一个 Γ 半群, 它实际就是半群 S .

(2) 设 S 是半群, Γ 是 S 的非空子集合, 定义 $S \times \Gamma \times S \rightarrow S$ 为 $(x, \alpha, y) \mapsto x\alpha y$, 右边是 S 上的三个元素的通常乘积, 显然, 这使 S 成为一个 Γ 半群, 它的运算性质由 S 的二元运算和 Γ 的取法共同确定.

(3) 对正整数 m, n , 记 S 为环 R 上所有 $m \times n$ 矩阵之集, Γ 为 R 上所有 $n \times m$ 矩阵之集. 定义 $S \times \Gamma \times S \rightarrow S$, $(A, B, C) \mapsto ABC$, 右边是通常三个矩阵的乘积, 显然 S 成为一个 Γ 半群.

(4) 设 A, B 是非空集, S 是从 A 到 B 的映射之集, Γ 是从 B 到 A 的映射之集, 定义 $S \times \Gamma \times S \rightarrow S$, $(x, \alpha, y) \mapsto x\alpha y$ 是通常映射合成, 则 S 是 Γ 半群.

以上四个例子说明, Γ 半群类是半群类的真推广, 正如许多学者研究过的, 它具有许多与半群相似甚至相同的性质, 我们将用例子说明, Γ - 半群也具有半群不具备的许多性质. 我们在研究 Γ 半群时, 将力图应同时注意讨论这两个方面.

和一般半群一样, Γ 半群只需满足一个公理, 也称其为结合律. 这个结合律的实质是: 由给定的三元运算 $(a, \alpha, b) \mapsto a\alpha b$ 所能诱导的两个五元运算

$$(a, \alpha, b, \beta, c) \mapsto (a\alpha b)\beta c \text{ 和 } (a, \alpha, b, \beta, c) \mapsto a\alpha(b\beta c)$$

是同一个运算. 自然会问, 对任意自然数 n , 由这个三元运算所能诱导的所有 $2n+1$ - 元运算是否都是同一个运算? 例如, 如果取 $n=3$, 由给定的三元运算可以得到五个七元运算, 它们对序列 $(a, \alpha, b, \beta, c, \gamma, d)$, 共有五个不同表示的值

$$((a\alpha b)\beta c)\gamma d, (a\alpha(b\beta c))\gamma d, (a\alpha b)\beta(c\gamma d), a((\alpha b\beta c)\gamma d), a\alpha((b\beta c)\gamma d).$$

一般地, 任意给定 $a_i \in S, i=1, \dots, n$ 和 $\alpha_j \in \Gamma, j=1, \dots, n-1$, 由上述三元运算能诱导的 $2n+1$ - 元运算是很多的, 和通常半群一样, 只有所有这些运算都是相同的, 我们不加括号地写乘积 $a_1\alpha_1a_2\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}a_n$ 才有意义, 它表示所有这些 $2n+1$ - 元运算在序列

$$(a_1, \alpha_1, a_2, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, a_n)$$

上共同的值. 这就是所谓“广义结合律”. 以下给出的证明参考了文献 [17] §1.4 的类似讨论.

引理 2.3 对任意 $a_i \in S, \alpha_j \in \Gamma, k, m \in \mathbf{N}$ (正整数集合), 归纳定义 $\Pi_{k\alpha}^m a_{k+j}$ 如下

$$\begin{aligned} \Pi_{k\alpha}^1 a_{k+j} &= a_k, \\ \Pi_{k\alpha}^m a_{k+j} &= (\Pi_{k\alpha}^{m-1} a_{k+j})\alpha_{k+m-2}a_{k+m-1} \\ &= (\cdots((a_k\alpha_k a_{k+1})\alpha_{k+1}a_{k+2})\cdots a_{k+m-2})\alpha_{k+m-2}a_{k+m-1}, \end{aligned}$$

则对任意正整数 n, m , 有

$$(\Pi_{1\alpha}^n a_{1+j})\alpha_n(\Pi_{(n+1)\alpha}^m a_{n+1+j}) = \Pi_{1\alpha}^{n+m} a_{1+j}.$$

证 我们对 m 用归纳法证明. 当 $m = 1$ 时, 由记号的定义直接得结论成立. 假设当 $m = r$ 时成立, 即 $(\Pi_{1\alpha}^n a_{1+i})\alpha_n(\Pi_{(n+1)\alpha}^r a_{n+1+j}) = \Pi_{1\alpha}^{n+r} a_{1+k}$. 当 $m = r + 1$ 时有

$$\begin{aligned} & (\Pi_{1\alpha}^n a_{1+i})\alpha_n(\Pi_{(n+1)\alpha}^{r+1} a_{n+1+j}) \\ &= (\Pi_{1\alpha}^n a_{1+i})\alpha_n((\Pi_{(n+1)\alpha}^r a_{n+1+j})\alpha_{n+r} a_{n+r+1}) \quad (\text{由记号 } \Pi_{(n+1)\alpha}^{r+1} a_{n+1+j} \text{ 的定义}) \\ &= ((\Pi_{1\alpha}^n a_{1+i})\alpha_n(\Pi_{(n+1)\alpha}^r a_{n+1+j}))\alpha_{n+r} a_{n+r+1} \quad (\text{由结合律}) \\ &= (\Pi_{1\alpha}^{n+r} a_{1+k})\alpha_{n+r} a_{n+r+1} \quad (\text{由归纳假设}) \\ &= \Pi_{1\alpha}^{n+r+1} a_{1+j} \quad (\text{由定义}). \end{aligned}$$

定理 2.4 Γ 半群满足广义结合律.

证 我们对正整数 n 用归纳法证明: 对任意序列

$$(a_1, \alpha_1, a_2, \cdots, \alpha_{n-1}, a_n), a_i \in S, \alpha_j \in \Gamma,$$

在由 Γ 半群 S 的乘法诱导的任意 $2n + 1$ 元运算下得到的积都等于引理 1.1.1 中所取定的那个 $2n + 1$ 元运算下的值. $n = 1$ 时此即为结合律公理, 结论成立. 假设 $n > 1$ 而结论对小于 n 的任意正整数都成立. 由于由给定的三元运算诱导的无论何种 $2n + 1$ 元运算, 其最后一步必有形 $u\alpha_k v$, $1 \leq k \leq n - 1$, 其中 u 是 $(a_1, \alpha_1, a_2, \cdots, \alpha_{k-1}, a_k)$ 在 $2k - 1$ 元运算下的积, v 是 $(a_{k+1}, \alpha_{k+1}, \cdots, a_n)$ 在 $2(n - k) + 1$ 元运算下的积. 因为 $k, n - k < n$, 按归纳假设, 我们有 $u = \Pi_{1\alpha}^k a_{1+i}$, $v = \Pi_{(k+1)\alpha}^{n-k} a_{k+j+1}$. 由引理 1.1.1 得到

$$u\alpha_k v = (\Pi_{1\alpha}^k a_{1+i})\alpha_k(\Pi_{(k+1)\alpha}^{n-k} a_{k+j+1}) = \Pi_{1\alpha}^n a_{1+t}.$$

该式右边的积是惟一确定的. 这就证明了定理的结论.

有了广义结合律, 我们就可以不添加任何括号地写乘积 $a_1\alpha_1 a_2\alpha_2 \cdots \alpha_{n-1} a_n$, 也可以在这个乘积中对任意形为 $a_i\alpha_i a_{i+1} \cdots \alpha_{i+j-1} a_{i+j}$ 的积加括号而不影响原来的乘积. 进而由元素乘积自然诱导的集合的乘积或元素与集合的乘积, 如 $STSTS \cdots \Gamma S$ 或 $a\Gamma S\Gamma a$ 等等也是有意义的了. 特别地, 我们有下述关于 Γ -半群的正则性的概念.

定义 2.5 ^[1] 设 S 是 Γ -半群, $a \in S$ 称为是正则元, 记为 $a \in \text{Reg } S$, 若 $a \in a\Gamma S\Gamma a$. 称 Γ -半群 S 是正则的, 若 S 的任意元均是正则元.

我们知道, 研究正则半群最有效的工具是 Green 等价关系. 我们把对 Γ -半群相应概念的定义和结论列于下, 这些概念及其性质在文献 [1, 2] 等中已引入, 有些没有证明, 为完整起见, 对某些结论我们给出相应的证明.

Γ -半群 S 的子集合 L 称为是 S 的一个左理想, 如果 $STL \subseteq L$. 易知, S 的任意多个左理想的非空交必然也是左理想. 因此, S 的任一非空子集 A 必有包含它的最小左理想, 称为 A 生成的左理想, 记为 $(A)_l$. 特别地, 对 S 的任一元 a , $(a)_l$ 称为由 a 生成的主左理想; 对偶地, 我们有右理想, 生成右理想 $(A)_r$ 和主右理想 $(a)_r$ 的概念; 既是左理想又是右理想的非空集称为理想. 同样, 我们有生成理想 $(A)_b$ 和主理想 $(a)_b$ 的概念. 容易知道, 对任意 $a \in S$,

$$(a)_l = S\Gamma a \cup \{a\}, \quad (a)_r = a\Gamma S \cup \{a\}, \quad (a)_b = S\Gamma a \cup a\Gamma S \cup S\Gamma a\Gamma S \cup \{a\}.$$

Γ -半群 S 的五个 Green 等价关系 $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{J}$ 定义如下:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \{(x, y) \in S \times S \mid (x)_\ell = (y)_\ell\}, & \mathcal{R} &= \{(x, y) \in S \times S \mid (x)_r = (y)_r\}, \\ \mathcal{J} &= \{(x, y) \in S \times S \mid (x)_b = (y)_b\}, & \mathcal{H} &= \mathcal{L} \cap \mathcal{R}.\end{aligned}$$

和半群一样, Γ -半群 S 的 Green- $\mathcal{D}$ -关系也定义为 S 的等价关系格中 $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$ 的最小上界. 不难证明, 这两个关系可交换, 故也有 $\mathcal{D} = \mathcal{L} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$.

关于半群的另一 $\mathcal{D}$ -类中诸 $\mathcal{L}$ - $\mathcal{R}$ -类之间相互联系的著名的 Green 引理对 Γ -半群也是成立的, 叙述如下.

引理 2.6 ^[2] (Green 引理) 若 $a \mathcal{R} b$ 且 $a = b\alpha u$, $b = a\beta v$, 那么映射

$$\rho_{\beta v} : x \mapsto x\beta v \quad (x \in L_a), \quad \rho_{\alpha u} : y \mapsto y\alpha u \quad (y \in L_b)$$

分别是含 a 的 $\mathcal{L}$ -类 L_a 到含 b 的 $\mathcal{L}$ -类 L_b 和反过来的互逆的双射, 它们保持 $\mathcal{R}$ -类不变; 对偶地, 若 $a \mathcal{L} b$ 且 $a = u\alpha b$, $b = v\beta a$, 那么映射

$$\lambda_{v\beta} : x \mapsto v\beta x \quad (x \in R_a), \quad \lambda_{u\alpha} : y \mapsto u\alpha y \quad (y \in R_b)$$

分别是含 a 的 $\mathcal{R}$ -类 R_a 到含 b 的 $\mathcal{R}$ -类 R_b 和反过来的互逆的双射, 它们还保持 $\mathcal{L}$ -类不变.

特别地, 同一 $\mathcal{D}$ -类中任二 $\mathcal{H}$ -类等势.

关于正则性, 有

引理 2.7 对 Γ -半群 S , 我们有以下结论:

(1) S 的任一 $\mathcal{D}$ -类 D 中若有一个正则元, 则它的所有元素都正则, 称之为正则 $\mathcal{D}$ -类; D 正则的充要条件是它 (的每个 $\mathcal{L}$ -, $\mathcal{R}$ -类都) 包含某个满足 $e\alpha e = e$ ($\alpha \in \Gamma$) 的元素 e , 称为 S 的 α -幂等元; S 的所有 α -幂等元组成的集合记为 E_α 或 $E_\alpha(S)$.

(2) $\mathcal{L}$ -类 L 中的 α -幂等元是 L 的右 α 单位元; 对偶的结论对 $\mathcal{R}$ -类成立.

(3) $a \in \text{Reg } S$ 的充要条件是 $\exists \alpha, \beta \in \Gamma, a' \in S$ 使得 $a\alpha a'\beta a = a$, $a'\beta a\alpha a' = a'$; 此时还有 $a\alpha a' \in E_\beta \cap R_a \cap L_{a'}$ 且 $a'\beta a \in E_\alpha \cap L_a \cap R_{a'}$. 这样的元素 a' 称为 a 的 (α, β) -逆; a 的所有 (α, β) 逆组成的集合记为 $V_\alpha^\beta(a)$.

(4) 对任意 $a \in S$, 记 a 所在的 $\mathcal{D}$ -类为 D_a . 对任意 $\alpha, \beta \in \Gamma$, 我们有 $V_\alpha^\beta(a) \subseteq D_a$. 进而对 D_a 中的任一 $\mathcal{H}$ -类 H , 有 $|H \cap V_\alpha^\beta(a)| \leq 1$, 等号成立的充要条件是 $R_a \cap L_H \cap E_\beta \neq \emptyset$ 且 $L_a \cap R_H \cap E_\alpha \neq \emptyset$.

(5) 对任意 $a, b \in S$ 和 $\alpha \in \Gamma$, $a \mathcal{R} a\alpha b \mathcal{L} b$ 的充要条件是 $E_\alpha \cap L_a \cap R_b \neq \emptyset$.

以上这些是 Γ -半群与通常半群相似甚至相同的性质. 使我们感兴趣的是, Γ -半群还具有异于普通半群的若干性质. 例如, 我们知道, 任何群有且只能有一个幂等元, 即群的单位元, 因而, 通常半群中每个 $\mathcal{H}$ -类最多只能包含一个幂等元. 由上述引理不难证明, 对于给定的 $\alpha \in \Gamma$, Γ -半群 S 的每个 $\mathcal{H}$ -类 H 最多只能包含一个 α -幂等元. 但以下例子说明, H 完全可以包含多个幂等元.

例 2.8 设 G 为群, $\Gamma \subseteq G$. G 按例 1.1 中 (2) 的方式定义为 Γ -半群. 不难验证, G 是它自身的一个 $\mathcal{H}$ -类, 且 $\forall g \in \Gamma, g^{-1}$ 都是 G 的幂等元. 特别地当 $\Gamma = G$ 时, G 即是群, 且它的每个元素都是幂等元.

一般地, 有

引理 2.9 设 H 是 Γ -半群 S 的一个 $\mathcal{H}$ -类. 则有

(1) 对任意 $\alpha \in \Gamma$, 或者 $H\alpha H \cap H = \emptyset$, 或者 $H\alpha H = H$, 且此时视 α 为 H 上的二元运算, 则 H 是一个群, 记为 H_α , 其单位元是一个 α -幂等元.

(2) H 是群的充要条件是 H 包含幂等元.

(3) 记 $\Gamma_H = \{\alpha \in \Gamma \mid H\alpha H \cap H = H\}$, 对任意 $\alpha, \beta \in \Gamma_H$, $H_\alpha \cong H_\beta$.

证 本引理的 (1) 在文献 [5] 中已有证明, 而 (2) 是 (1) 的推论. 此处我们只证明 (3).

设 H_α 的单位元是 e_α , H_β 的单位元是 e_β . 令 $\varphi: H_\alpha = H \rightarrow H_\beta = H$ 为 $a\varphi = a\alpha e_\beta \forall a \in H_\alpha$; 令 $\psi: H_\beta \rightarrow H_\alpha$ 为 $b\psi = b\beta e_\alpha$. 因为对任意 $a \in H_\alpha = H$ 和 $b \in H_\beta = S$, 有

$$\begin{aligned} a\varphi\psi &= (a\alpha e_\beta)\beta e_\alpha && \text{(由定义)} \\ &= a\alpha(e_\beta\beta e_\alpha) = a\alpha e_\alpha && (e_\beta \text{ 是群 } H_\beta = H \text{ 的单位元}) \\ &= a && (e_\alpha \text{ 是群 } H_\alpha = H \text{ 的单位元}), \\ b\psi\varphi &= (b\beta e_\alpha)\alpha e_\beta && \text{(由定义)} \\ &= b\beta(e_\alpha\alpha e_\beta) = b\beta e_\beta && (e_\alpha \text{ 是群 } H_\alpha = H \text{ 的单位元}) \\ &= b && (e_\beta \text{ 是群 } H_\beta \text{ 的单位元}). \end{aligned}$$

因而 φ 是双射. 进而对任意 $a_1, a_2 \in H_\alpha$, 有

$$(a_1\alpha a_2)\varphi = (a_1\alpha a_2)\alpha e_\beta = a_1\alpha(e_\beta\beta a_2)\alpha e_\beta = (a_1\alpha e_\beta)\beta(a_2\alpha e_\beta) = (a_1\varphi)\beta(a_2\varphi).$$

故得 $H_\alpha \simeq H_\beta$.

Γ -半群 S 既然是由两个集合 S 和 Γ 共同决定的, 因而它的子代数也应当具有和半群的子代数不同的形式. 为此我们引入下述

定义 2.10 设 S 为 Γ -半群, $S_1 \subseteq S$, $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$. 称 S_1 为 S 的 Γ_1 -子半群, 若有 $S_1\Gamma_1 S_1 \subseteq S_1$.

值得注意的是, Γ -半群 S 的含幂等元的 $\mathcal{H}$ -类不一定是 S 的 Γ -子半群, 如下例所示.

例 2.11 设 $S = \Gamma = \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, 即实数域 $\mathbf{R}$ 上所有 n 阶方阵的集合, S 在通常三个矩阵的乘法之下显然是一个 Γ -半群. 记 H 是 $\mathbf{R}$ 上所有满秩 n 阶方阵之集. 易验 H 是 S 的一个 $\mathcal{H}$ -类, n 阶单位矩阵是其中的幂等元. 不难验证, $\Gamma_H = H$, 因而 H 是 S 的 Γ_H -子半群. 但它不是 S 的 Γ -子半群, 因为 HSH 中包含非满秩矩阵 (事实上 $HSH = S$).

例 2.12 [3] 设 $A = \{a, b, c\}$, $B = \{e, f\}$, M 是所有 $A \rightarrow B$ 的映射的集合. 记 M 中的元为 a, b, c 的像所组成的三元组, 如: $a \rightarrow e, b \rightarrow f, c \rightarrow e$ 记为 (e, f, e) . 类似地记 $B \rightarrow A$ 的映射. 设 $M = \{(e, e, e), (e, e, f), (e, f, e), (e, f, f), (f, f, f), (f, e, f), (f, e, e), (f, f, e)\}$, $\Gamma = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (c, c)\}$ 可以验证 S 是正则 Γ -半群. 且 (e, e, f) 是 (a, c) 幂等元.

定义 2.13 [8] 正则 Γ -半群 S 称为是逆 Γ -半群, 若满足: $\forall a \in S, \forall \alpha, \beta \in \Gamma$, 且 $V_\alpha^\beta(a) \neq \emptyset$ 时, $|V_\alpha^\beta(a)| = 1$. 正则 Γ -半群 S 称为纯正的, 若 $e \in E_\alpha(S), f \in E_\beta(S)$, 则 $e\alpha f \in E_\beta(S), f\alpha e \in E_\beta(S), e\beta f \in E_\alpha(S), f\beta e \in E_\alpha(S)$.

和一般半群类似, 我们有下述结论:

引理 2.14 [8] (1) S 是 Γ -半群, 则 S 是逆 Γ -半群的充要条件是 S 正则且 $\forall e, f \in E_\alpha(S), \alpha \in \Gamma$, 有 $e\alpha f = f\alpha e$.

(2) S 是纯正 Γ 半群的充要条件是 $\alpha, \beta \in \Gamma, \forall e \in E_\alpha(S)$, 当 $V_\alpha^\beta(e) \neq \emptyset, V_\beta^\alpha(e) \neq \emptyset$ 时, $V_\alpha^\beta(e), V_\beta^\alpha(e)$ 中任意一元均为 β 幂等元.

(3) 逆 Γ -半群是纯正 Γ 半群, 反之则不一定成立. 例如设 Q^* 表示所有非 0 有理数的集合, Γ 表示所有正整数的集合. $\forall a, b \in Q^*, \alpha \in \Gamma$, 定义 $a\alpha b = |a| \alpha b$, 可以证明 Q^* 是纯正 Γ -半群. 但它不是逆 Γ -半群.

(4) S 是纯正 Γ -半群, $a \in S, a' \in V_\gamma^\delta(a)$, 则对 S 中的任一 α -幂等元 e 有 $a\gamma e\alpha a', a\alpha e\gamma a'$ 是 δ -幂等元; $a'\delta e\alpha a, a'\alpha e\delta a$ 是 γ -幂等元.

3 同态, 同余

定义 3.1 在文献 [5] 中, Seth 对 Γ -半群之间的同态同构是这样定义的: 设 S 是 Γ -半群, S_1 是 Γ_1 -半群, 所谓从 S 到 S_1 的同态指的是这样的映射对 (f_1, f_2) , 其中 $f_1: S \rightarrow S_1, f_2: \Gamma \rightarrow \Gamma_1$, 满足 $\forall a, b \in S, \alpha \in \Gamma$ 有 $(a\alpha b)f_1 = (af_1)(\alpha f_2)(bf_1)$. 进而, 若 f_1, f_2 是单 (满, 双) 射, 则称 (f_1, f_2) 是 (S, Γ) 到 (S_1, Γ_1) 的单同态 (满同态, 同构).

我们发现, 这样定义的同态同构对 Γ -半群的特殊性有所忽略. 例如 A. Seth 本人在该文献中为建立完全 0-单 Γ -半群的 Rees 结构定理 – “ Γ -半群 S 完全 0-单的充要条件是 S 同构于一个有零元的群上的正则 Rees 矩阵半群” (这是该文的中心结论) 而证明其定理 3.4 和 3.5 时, 并未能证明其定义的 Γ 集间的映射 ψ 是双射. 事实上, 他也不可能证明该 ψ 是双射. 见下例.

例 3.2 设 S 为通常矩形带添加 0 作为零元所得的完全 0-单半群, 其二元运算记为 $\cdot$; 设 S' 是与其同构的半群, 其运算记作 $\circ$. 令 $\Gamma = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ 而 $\Gamma_1 = \{\xi, \eta\}$. 对任意 $\zeta \in \Gamma, \zeta' \in \Gamma_1$ 和 $a, b \in S, a', b' \in S_1$, 定义 $a\zeta b = a \cdot b, a'\zeta'b' = a' \circ b'$, 显然 (S, Γ) 是 Γ -半群, 本质上就是矩形带 $(S, \cdot)$ 自身; 同理, (S', Γ_1) 是 Γ_1 -半群, 本质上就是矩形带 $(S', \circ)$. 因而 (S, Γ) 应当是与 (S', Γ_1) 同构的. 但是由于不可能存在从 Γ 到 Γ_1 上的双射, 按 Seth 的定义它们不可能同构.

不难知道, 上述例子中同构的 S 和 S' 也可以是任意同构的半群. 为了弥补这种不协调, 需要修正 Γ -半群同态同构的定义. 为此对 Γ -半群 S 的运算集 Γ 引进关系 θ_Γ 如下:

$$(\forall \alpha, \beta \in \Gamma) \alpha \theta_\Gamma \beta \Leftrightarrow (\forall a, b \in S) a\alpha b = a\beta b.$$

显然 θ_Γ 是 Γ 上一个等价关系. 记 $\Gamma/\theta = \bar{\Gamma} = \{\bar{\alpha} | \alpha \in \Gamma\}$. 易知, S 的运算自然诱导出三元运算 $S \times \bar{\Gamma} \times S \rightarrow S, (a, \bar{\alpha}, b) = a\bar{\alpha}b = a\alpha b$, 在此运算下, S 成为一个 $\bar{\Gamma}$ -半群, 而映射对 $(1_S, \theta_\Gamma^\sharp)$ 尽管在 Γ 与 $\bar{\Gamma}$ 之间不是双射, 但本质上却反映了两者之间是同构的. 因此我们把 $\bar{\Gamma}$ 半群 S 称为 S 的本质同构像. 容易明白, 若 $\theta_\Gamma = \Gamma \times \Gamma$, 则 S 本质同构于一个普通半群.

引理 3.3 设 S 为 Γ -半群, 若有 $\alpha \in \Gamma$ 使得当视 α 为 S 上的二元运算时, S 是一个矩形带, 那么, S 本质同构于一个矩形带.

证 对任意 $a, b \in S$ 和任意 $\beta \in \Gamma$, 由于二元运算 α 使 S 成为矩形带, 有

$$a\beta b\beta a = (a\alpha b\alpha a)\beta b\beta (a\alpha b\alpha a) = a\alpha (b\alpha a\beta b\alpha a\beta b\alpha a)\alpha a = a.$$

进而

$$a\alpha b = (a\beta b\beta a)\alpha (b\beta a\beta b) = [a\beta (b\beta a\alpha b)\beta a]\beta b = a\beta b.$$

这就得到 $\theta_\Gamma = \Gamma \times \Gamma$, 故 S 本质同构于矩形带.

定义 3.4 在 Γ 上定义二元关系 $\theta_\Gamma: \forall a, b \in S, \alpha, \beta \in \Gamma, \alpha \theta_\Gamma \beta \iff a\alpha b = a\beta b$. 称 (S, Γ) 到 (S_1, Γ_1) 的同态 (f_1, f_2) 是同构, 若 f_1 是双射且 Γ/θ_Γ 与 $\Gamma_1/\theta_{\Gamma_1}$ 之间存在双射.

定理 3.5 设 S 为正则 Γ -半群, T 是 Γ -半群, 映射对 $\phi = (f_1, f_2)$ 是 S 到 T 的同态, 其中 $f_1: S \rightarrow T, f_2: \Gamma \rightarrow \Gamma_1$ 且 f_2 为恒等映射, 则 $S\phi$ 正则, 且如果 e 是 T 的 α 幂等元, 则存在 S 的 α 幂等元 f , 使得 $e = ff_1$.

证 $\forall t \in S\phi \subseteq T$, 存在 $s \in S$ 使得 $t = sf_1$. 设 $s' \in V_\nu^\mu(S), \mu, \nu \in \Gamma$,

$$\begin{aligned}(sf_1)(\nu f_2)(s'f_1)(\mu f_2)(sf_1) &= (s\nu s'\mu s)f_1 = sf_1, \\(s'f_1)(\mu f_2)(sf_1)(\nu f_2)(s'f_1) &= (s'\mu s\nu s')f_1 = s'f_1.\end{aligned}$$

所以 $s'f_1$ 是 $sf_2 = t$ 的逆, T 正则, 设 $a \in S, af_1 = e, b \in V_\beta^\gamma(a\alpha a), \alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$.

(1) $(a\alpha a)\beta b\gamma(a\alpha a) = a\alpha a, b\gamma(a\alpha a)\beta b = b$. 又 $f = a\beta b\gamma a$,

$$f\alpha f = (a\beta b\gamma a)\alpha(a\beta b\gamma a) = a\beta b\gamma(a\alpha a)\beta b\gamma a = a\beta b\gamma a = f.$$

所以 f 是 α 幂等元.

(2)

$$\begin{aligned}ff_1 &= (a\beta b\gamma a)f_1 = af_1\beta f_2bf_1\gamma f_2af_1 = (af_1)\alpha(af_1)\beta f_2bf_1\gamma f_2(af_1)\alpha(af_1) \\&= af_1\alpha f_2af_1\beta f_2bf_1\gamma f_2af_1\alpha f_2af_1 = (a\alpha a\beta b\gamma a\alpha a)f_1,\end{aligned}$$

又因为 $(a\alpha a)\beta b\gamma(a\alpha a) = a\alpha a$, 所以 $ff_1 = (a\alpha a)f_1 = af_1\alpha f_2af_1 = e\alpha e = e$.

引理 3.6 设 S 是逆 Γ -半群, T 为 Γ -半群, (f_1, f_2) 是 (S, Γ) 到 (T, Γ) 的满同态, 且 f_2 是恒等映射, 则 T 是逆 Γ -半群.

定义 3.7 ^[10] Γ -半群 M 上的等价关系 ρ 称为左同余, 若: $\forall a, b, c \in S, \alpha \in \Gamma, (a, b) \in \rho$ 有 $(c\alpha a, c\alpha b) \in \rho$. ρ 称为右同余, 若 $\forall a, b, c \in S, \alpha \in \Gamma, (a, b) \in \rho$ 有 $(a\alpha c, b\alpha c) \in \rho$. 若 ρ 既是左同余, 又是右同余, 则称 ρ 为 S 上的同余.

定理 3.8 设 ρ 是逆 Γ -半群 S 上的同余, 若 $\forall a, b \in S, \alpha, \beta \in \Gamma, a' \in V_\alpha^\beta(a), b' \in V_\alpha^\beta(b), (a, b) \in \rho$, 有 $(a', b') \in \rho$.

证 对 $S/\rho, \forall \alpha \in \Gamma$, 定义 $(a\rho)\alpha(b\rho) = (a\alpha b)\rho$, 则有 S/ρ 也是一个 Γ -半群.

由引理 3.6 (令 $f_1: S \rightarrow S/\rho, [a \rightarrow a\rho], f_2: \Gamma \rightarrow \Gamma[a \rightarrow a]$) 知道 S/ρ 是逆 Γ -半群. $\forall a, b \in S, a' \in V_\alpha^\beta(a), b' \in V_\alpha^\beta(b)$,

$$\begin{aligned}(a'\rho)(\beta f_2)(a\rho)(\alpha f_2)(a'\rho) &= (a'\rho)\beta(a\rho)\alpha(a'\rho) = (a'\beta a\alpha a')\rho = a'\rho, \\(a\rho)(\alpha f_2)(a'\rho)(\beta f_2)(a\rho) &= (a\rho)\alpha(a'\rho)\beta(a\rho) = (a\alpha a'\beta a)\rho = a\rho,\end{aligned}$$

所以 $a'\rho \in V_\alpha^\beta(a\rho)$. 又因为 S/ρ 是逆 Γ -半群, 故 $|V_\alpha^\beta(a\rho)| = 1$ 从而, $a'\rho$ 是 $a\rho$ 的 (α, β) 逆. 记为 $(a\rho)^{-1} = a'\rho$, 若 $(a, b) \in \rho \implies a'\rho = (a\rho)^{-1} = (b\rho)^{-1} = b'\rho \implies (a', b') \in \rho$.

注 由引理 3.3 我们知道若有 $\alpha \in \Gamma$ 使得当视 α 为 S 上的二元运算时, S 是一个矩形带, 则 $\forall \beta \in \Gamma, S$ 是矩形带. 这实际上就是下面提到的 Γ -矩形带.

4 相关半群

Sen 在文献 [1] 中证明了若 Γ - 半群 S 有一个相关半群是群, 则其它的相关半群也是群. 杨国为在文献 [18] 中又证明了若 Γ - 半群 S 有一个相关半群是 (完全) 单半群, 则其它的相关半群也是 (完全) 单半群. 这说明 Γ - 半群的整体结合律在一定程度上影响着 Γ - 半群的相关半群之间的关系, Γ - 半群的性质与它的相关半群之间也有着密切的联系.

定义 4.1 设 S 是 Γ - 半群, $\forall \alpha \in \Gamma$ 定义乘法 $\circ$ 为 $a \circ b = a\alpha b$, 则 $(S, \circ)$ 是半群, 记为 S_α . 称 S_α 为 S 的相关半群.

引理 4.2 设 S 是 Γ - 半群, 若 $\exists \alpha \in \Gamma$, 使得相关半群 S_α 是群, 则 $\forall \beta \in \Gamma, S_\beta$ 是群且 $S_\alpha \simeq S_\beta$.

证 引理的前一部分在文献 [1] 中已经证明了. 下面我们只证明后一部分.

设 S_α 的单位元是 e_α, S_β 的单位元是 e_β . 令 $\varphi: S_\alpha \rightarrow S_\beta (a \rightarrow a\alpha e_\beta)$, 令 $\psi: S_\beta \rightarrow S_\alpha (b \rightarrow b\beta e_\alpha)$, 因为

$$\begin{aligned} a\varphi\psi &= (a\alpha e_\beta)\beta e_\alpha = a\alpha(e_\beta\beta e_\alpha) = a\alpha e_\alpha = a, \\ b\psi\varphi &= (b\beta e_\alpha)\alpha e_\beta = b\beta(e_\alpha\alpha e_\beta) = b\beta e_\beta = b, \end{aligned}$$

又因为

$$(a_1\alpha a_2)\varphi = (a_1\alpha a_2)\alpha e_\beta = a_1\alpha(e_\beta\beta a_2)\alpha e_\beta = (a_1\alpha e_\beta)\beta(a_2\alpha e_\beta) = (a_1\varphi)\beta(a_2\varphi),$$

从而有 $S_\alpha \simeq S_\beta$.

定义 4.3 设 S 是 Γ - 半群, 若 $\forall \alpha \in \Gamma, S_\alpha$ 是群 (矩形带. 半格), 则称 S 是 Γ - 群 (矩形带. 半格).

注 设 S 是 Γ - 半群, 若 $\exists \alpha \in \Gamma$, 使得相关半群 S_α 是矩形带, 则 $\forall \beta \in \Gamma$, 由于 $\forall a, b \in S, a\beta b\beta a = (a\alpha b\alpha a)\beta b\beta(a\alpha b\alpha a) = a\alpha(b\alpha a\beta b\beta a\alpha b)\alpha a = a$. 所以 S_β 是矩形带且 $a\alpha b = a\beta b$. 由此也知道不存在真正的不是矩形带的 Γ - 矩形带, 但却存在不是群的 Γ - 群.

例 4.4 设 $S = \Gamma$ 是自然数集, $\forall a, b \in S, \alpha \in \Gamma$ 规定: $a\alpha b$ 为取 a, α, b 的最小公倍数. $\forall a \in S_1, a = a1a1a$, 所以 S_1 正则, 但 $S_n (n \geq 2)$ 却不正则, 因为 $1 \in S_n$ 不正则. 此例说明若 $\exists \alpha \in \Gamma$, 使得相关半群 S_α 是正则的, 但并非 $\forall \beta \in \Gamma, S_\beta$ 是正则的.

例 4.5 $S = \{0, 1\}, \Gamma = \{\alpha, \beta\}$ 定义运算为: $0\alpha 0 = 0, 0\alpha 1 = 0, 1\alpha 0 = 0, 1\alpha 1 = 1, 0\beta 0 = 0, 0\beta 1 = 0, 1\beta 0 = 0, 1\beta 1 = 0$. S 是 Γ - 半群. 因为 $0\alpha 0 = 0, 1\alpha 1 = 1$, 所以 $0, 1 \in E(S)$. 又因为 $0\alpha 1 = 0 = 1\alpha 0$. 故 S_α 是半格. 但 $0\beta 0 \neq 0$, 故 S_β 不是半格. 此例说明若 $\exists \alpha \in \Gamma$, 使得相关半群 S_α 是半格, 但并非 $\forall \beta \in \Gamma, S_\beta$ 是半格.

注 此二例说明并非一个相关半群具有什么性质就一定有其它相关半群也具有什么性质.

5 Γ - 半群夹心集的定义, 性质

半群和 Γ - 半群在性质上的区别在其它方面也有体现. 我们知道, 夹心集是印度数学家 Nambooripad 在创立正则双序集理论时引入的一个基本概念, 在研究正则半群的性质和结构中有广泛的应用. 国内学者刘国新. 盛德成在“正则 Γ - 半群上的纯正同余”一文中把一般半群夹心集的概念推广到正则 Γ - 半群的幂等元上, 我们在下文中将这个概念推广到 Γ - 半群的任意元素上, 并给出了 Γ - 半群中夹心集的基本性质和结构, 这为以后进一步研究 Γ - 半群

提供了一个有用的工具. 我们不但得到了与一般半群中夹心集相同的许多性质, 如夹心集与 Green 等价类的关系, 夹心集在刻画乘积正则性和逆元素上的作用以及对每个 $\eta \in \Gamma$, η -夹心集 $S_\eta(a, b)$ 也是矩形带等, 且用例子证明了夹心集 $S(a, b)$ 一般不再是矩形带.

定义 5.1 设 S 是 Γ -半群, $\forall \eta \in \Gamma$, 若 $E_\eta(S) \neq \emptyset, \forall a, b \in S$, 称下述集合为 (a, b) 的 η -夹心集:

$$S_\eta(a, b) = \{h \in E_\eta(S) | L_h \leq L_a, R_h \leq R_b, a\eta h\eta b = a\eta b\}.$$

更进一步, 定义 (a, b) 的夹心集为

$$S(a, b) = \{h | (\exists \eta \in \Gamma) h \in E_\eta(S), L_h \leq L_a, R_h \leq R_b, a\eta h\eta b = a\eta b\} = \bigcup_{\eta \in \Gamma} S_\eta(a, b).$$

定理 5.2 设 S 是 Γ -半群, $\forall \eta \in \Gamma, \forall a, b \in S, S_\eta(a, b) \neq \emptyset \iff a\eta b \in \text{Reg}S$.

证 $\implies$ 若 $h\eta h = h \in S_\eta(a, b)$ 则 $L_h \leq L_a, R_h \leq R_b, a\eta h\eta b = a\eta b$, 因为 $L_h \leq L_a, R_h \leq R_b, (h = h\eta h, h = a, \text{ 则 } h = h\eta a, h = b, h = b\eta h)$, 所以 $\exists u, v \in S, \alpha, \beta \in \Gamma$, 使得 $h = u\alpha a = b\beta v$. 因为

$$a\eta b = a\eta h\eta b = a\eta h\eta h\eta b = a\eta b\beta v\eta u\alpha a\eta b = (a\eta b)\beta(v\eta u)\alpha(a\eta b) \in (a\eta b)\Gamma S\Gamma(a\eta b).$$

由正则元的定义知道 $a\eta b$ 正则, 即 $a\eta b \in \text{Reg}S$.

$\Leftarrow$ 若 $a\eta b \in \text{Reg}S$, 设 $v \in V_\alpha^\beta(a\eta b)$. 记 $h = b\alpha v\beta a$, 则 $h\eta h = b\alpha v\beta a\eta b\alpha v\beta a = b\alpha v\beta a = h$, 所以 $h \in E_\eta(S)$, 又因为 $h = b\alpha v\beta a$, 所以 $L_h \leq L_a, R_h \leq R_b$, 且 $a\eta h\eta b = (a\eta b)\alpha v\beta(a\eta b) = a\eta b$. 故 $h \in S_\eta(a, b)$, 从而 $S_\eta(a, b) \neq \emptyset$.

定理 5.3 设 S 是 Γ -半群, $\forall \eta \in \Gamma, \forall a, b, a', b' \in S$, 若 $a\mathcal{L}a', b\mathcal{R}b'$. 则

$$S_\eta(a, b) = S_\eta(a', b').$$

证 $\forall h \in S_\eta(a, b)$, 则 $L_h \leq L_a = L_{a'}, R_h \leq R_b = R_{b'}, a\eta h\eta b = a\eta b$. 因为 $a\mathcal{L}a'$, 故 $a = a'$ 或 $\exists u \in S, \alpha \in \Gamma$, 使得 $a' = u\alpha a$, 又因为 $b\mathcal{R}b'$, 故 $b = b'$ 或 $\exists v \in S, \beta \in \Gamma$, 使得 $b' = b\beta v$,

(1) 当 $a' = a, b' = b$ 时, $a'\eta h\eta b' = a\eta h\eta b = a\eta b = a'\eta b'$.

(2) 当 $a' = a, b' = b\beta v$ 时, $a'\eta h\eta b' = a\eta h\eta b\beta v = a\eta b\beta v = a'\eta b'$.

(3) 当 $a' = u\alpha a, b' = b$ 时, $a'\eta h\eta b' = u\alpha a\eta h\eta b = u\alpha a\eta b = a'\eta b'$.

(4) 当 $a' = u\alpha a, b' = b\beta v$ 时, $a'\eta h\eta b' = u\alpha a\eta h\eta b\beta v = u\alpha a\eta b\beta v = a'\eta b'$, 从而 $h \in S_\eta(a', b')$, 即有 $S_\eta(a, b) \subseteq S_\eta(a', b')$.

同理可证 $S_\eta(a, b) \supseteq S_\eta(a', b')$, 得 $S_\eta(a, b) = S_\eta(a', b')$.

6 Γ -半群夹心集的构造

定理 6.1 设 S 是 Γ -半群, $\forall \alpha, \beta, \eta \in \Gamma, \forall a, b \in S$, 则

$$S_\eta(a, b) = \bigcup_{\alpha, \beta \in \Gamma} \{h = b\alpha v\beta a | v \in V_\alpha^\beta(a\eta b)\} = \bigcup_{\alpha, \beta \in \Gamma} b\alpha V_\alpha^\beta(a\eta b)\beta a.$$

从而 $S(a, b) = \bigcup_{\eta \in \Gamma} \bigcup_{\alpha, \beta \in \Gamma} b\alpha V_\alpha^\beta(a\eta b)\beta a$.

证 在证明定理 5.2 时可以知道 $S_\eta(a, b) \supseteq \bigcup_{\alpha, \beta \in \Gamma} b\alpha V_\alpha^\beta(a\eta b)\beta a$.

下面证明反包含关系: $\forall h \in S_\eta(a, b)$, 有 $L_h \leq L_a, R_h \leq R_b, a\eta h\eta b = a\eta b, h\eta h = h$ (当 $h = a$ 时, $h = h\eta h = h\eta a$; 当 $h = b$ 时, $h = h\eta h = b\eta h$). $\exists u, v \in S, \alpha, \beta \in \Gamma$, 使得 $h = u\beta a = b\alpha v, a\eta b = a\eta h\eta b = a\eta h\eta h\eta b = a\eta b\alpha v\eta u\beta a\eta b$. 令

$$\begin{aligned} x &= v\eta u\beta a\eta b\alpha v\eta u, \quad b\alpha x\beta a = b\alpha v\eta u\beta a\eta b\alpha v\eta u\beta a = h\eta h\eta h\eta h = h, \\ x\beta a\eta b\alpha x &= v\eta u\beta a\eta b\alpha v\eta u\beta a\eta b\alpha v\eta u\beta a\eta b\alpha v\eta u \\ &= v\eta u\beta(a\eta b\alpha v\eta u\beta a\eta b)\alpha v\eta u\beta a\eta b\alpha v\eta u \\ &= v\eta u\beta a\eta b\alpha v\eta u\beta a\eta b\alpha v\eta u = v\eta u\beta(a\eta b\alpha v\eta u\beta a\eta b)\alpha v\eta u \\ &= v\eta u\beta a\eta b\alpha v\eta u = x, \\ a\eta b\alpha x\beta a\eta b &= a\eta b\alpha v\eta u\beta a\eta b\alpha v\eta u\beta a\eta b \\ &= (a\eta b\alpha v\eta u\beta a\eta b)\alpha v\eta u\beta a\eta b \\ &= a\eta b\alpha v\eta u\beta a\eta b = a\eta b. \end{aligned}$$

所以 $x \in V_\alpha^\beta(a\eta b)$. 故 $\forall h \in S_\eta(a, b)$, 有 $h = b\alpha x\beta a \in \bigcup_{\alpha, \beta \in \Gamma} b\alpha V_\alpha^\beta(a\eta b)\beta a$. 所以反包含关系成立. 故

$$S_\eta(a, b) = \bigcup_{\alpha, \beta \in \Gamma} \{h = b\alpha v\beta a | v \in V_\alpha^\beta(a\eta b)\} = \bigcup_{\alpha, \beta \in \Gamma} b\alpha V_\alpha^\beta(a\eta b)\beta a.$$

从而

$$S(a, b) = \bigcup_{\eta \in \Gamma} \bigcup_{\alpha, \beta \in \Gamma} b\alpha V_\alpha^\beta(a\eta b)\beta a.$$

引理 6.2^[19] 设 S 是正则 Γ - 半群, $a, b \in S, a' \in V_\alpha^\beta(a), b' \in V_\gamma^\delta(b), g \in S_\eta(a'\beta a, b'\gamma b')$, 则 $b'\delta g\alpha a' \in V_\gamma^\beta(a\eta b)$.

定理 6.3 S 是 Γ - 半群, $\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta \in \Gamma, \forall a, b \in \text{Reg} S$, 若 $V_\gamma^\delta(b) \neq \emptyset, V_\alpha^\beta(a) \neq \emptyset$ 时, 有

$$V_\gamma^\beta(a\eta b) \neq \emptyset,$$

则

$$\bigcup_{\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Gamma} V_\gamma^\delta(b)\delta S_\eta(a, b)\alpha V_\alpha^\beta(a) \subseteq V_\gamma^\beta(a\eta b).$$

证 $b' \in V_\gamma^\delta(b), a' \in V_\alpha^\beta(a), h \in S_\eta(a, b)$, 令 $c = b'\delta h\alpha a', h = b\gamma u\beta a$, 其中 $u \in V_\gamma^\beta(a\eta b)$, 则

$$\begin{aligned} c &= b'\delta b\gamma u\beta a\alpha a', \\ c\beta a\eta b\gamma c &= b'\delta b\gamma u\beta a\alpha a'\beta a\eta b\gamma b'\delta b\gamma u\beta a\alpha a' \\ &= b'\delta b\gamma u\beta a\eta b\gamma u\beta a\alpha a' = b'\delta b\gamma u\beta a\alpha a' = c, \\ a\eta b\gamma c\beta a\eta b &= a\eta b\gamma b'\delta b\gamma u\beta a\alpha a'\beta a\eta b = a\eta b\gamma u\beta a\eta b = a\eta b. \end{aligned}$$

所以 $c \in V_\gamma^\beta(a\eta b)$, 从而 $\bigcup_{\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Gamma} V_\gamma^\delta(b)\delta S_\eta(a, b)\alpha V_\alpha^\beta(a) \subseteq V_\gamma^\beta(a\eta b)$.

推论 6.4 设 S 是 Γ -半群, $\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta \in \Gamma, \forall a, b \in \text{Reg}S$, 若 $V_\gamma^\delta(b) \neq \emptyset, V_\alpha^\beta(a) \neq \emptyset$ 时, 有 $V_\gamma^\beta(a\eta b) \neq \emptyset$, 则当 $b \in V_\alpha^\beta(a)$ 且 $\alpha = \eta = \delta$ 时, 有

$$\bigcup_{\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Gamma} V_\gamma^\delta(b) \delta S_\eta(a, b) \alpha V_\alpha^\beta(a) = V_\gamma^\beta(a\eta b),$$

即

$$\bigcup_{\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Gamma} V_\gamma^\eta(b) \eta S_\eta(a, b) \eta V_\eta^\beta(a) = V_\gamma^\beta(a\eta b).$$

证 令 $x \in V_\gamma^\beta(a\eta b)$, 有 $x\beta a\eta b\gamma x = x, a\eta b\gamma x\beta a\eta b = a\eta b$. 又设 $y \in V_\gamma^\beta(a\eta b)$, 则

$$x = x\beta a\eta b\gamma x = x\beta(a\eta b\gamma y\beta a\eta b)\gamma x = (x\beta a)\eta(b\gamma y\beta a)\eta(b\gamma x),$$

因为 $x = x\beta a\eta b\gamma x$, 所以 $x\beta a = x\beta a\eta b\gamma x\beta a = (x\beta a)\eta b\gamma(x\beta a)$. 又因为

$$b\gamma(x\beta a)\eta b = (b\beta a\alpha b)\gamma(x\beta a)\eta b = b\beta(a\alpha b\gamma x\beta a\eta b) = b\beta a\eta b = b\beta a\alpha b = b,$$

所以 $x\beta a \in V_\gamma^\eta(b)$. 又由

$$\begin{aligned} (b\gamma x)\beta a\eta(b\gamma x) &= b\gamma(x\beta a\eta b\gamma x) = b\gamma x, a\eta(b\gamma x)\beta a = a\eta b\gamma x\beta(a\alpha b\beta a) \\ &= (a\eta b\gamma x\beta a\alpha b)\beta a = a\eta b\beta a = a. \end{aligned}$$

所以 $b\gamma x \in V_\eta^\beta(a)$. 由定理 6.1 可以知道 $b\gamma y\beta a \in S_\eta(a, b)$, 所以由 $\alpha = \eta = \delta$ 知道

$$x \in \bigcup_{\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Gamma} V_\gamma^\delta(b) \delta S_\eta(a, b) \alpha V_\alpha^\beta(a).$$

故而

$$\bigcup_{\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Gamma} V_\gamma^\delta(b) \delta S_\eta(a, b) \alpha V_\alpha^\beta(a) \supseteq V_\gamma^\beta(a\eta b),$$

又由上面定理可知

$$\bigcup_{\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Gamma} V_\gamma^\delta(b) \delta S_\eta(a, b) \alpha V_\alpha^\beta(a) = V_\gamma^\beta(a\eta b).$$

即

$$\bigcup_{\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Gamma} V_\gamma^\eta(b) \eta S_\eta(a, b) \eta V_\eta^\beta(a) = V_\gamma^\beta(a\eta b).$$

定理 6.5 设 S 是 Γ -半群, $\eta \in \Gamma, \forall a, b \in S$, 若 $S_\eta(a, b) \neq \emptyset$, 则 $S_\eta(a, b)$ 关于相关半群 S_η 的乘法 $a \circ b = a\eta b$ 成为相关半群 S_η 的子半群且是矩形带.

证 设 $\forall g, h \in S_\eta(a, b)$, 则 $g, h \in E_\eta(S)$ 且 $L_g \leq L_a, R_g \leq R_b, L_h \leq L_a, R_h \leq R_b, a\eta g\eta b = a\eta b = a\eta h\eta b$, 由定理 6.1 知

$$\exists x \in V_\alpha^\beta(a\eta b), \exists y \in V_{\alpha'}^{\beta'}(a\eta b),$$

使得 $g = b\alpha x\beta a, h = b\alpha'y\beta'a$,

$$\begin{aligned} g \circ h \circ g &= g\eta h\eta g = b\alpha x\beta a\eta b\alpha'y\beta'a\eta b\alpha x\beta a \\ &= b\alpha x\beta(a\eta b\alpha'y\beta'a\eta b)\alpha x\beta a \\ &= b\alpha x\beta a\eta b\alpha x\beta a = g\eta g = g. \end{aligned}$$

因为 $g \circ h \circ g = g$, 所以 $g \circ h \circ g \circ h = g \circ h$. 故 $g \circ h \in E(S_\eta)$. 令

$$z = x\beta a\eta b\alpha'y = x\beta a \circ b\alpha'y, g \circ h = b\alpha x\beta a\eta b\alpha'y\beta'a = b\alpha z\beta'a.$$

又因为

$$\begin{aligned} z\beta'a\eta b\alpha z &= x\beta'a\eta b\alpha'y\beta'a\eta b\alpha x\beta a\eta b\alpha'y \\ &= x\beta'(a\eta b\alpha'y\beta'a\eta b)\alpha x\beta a\eta b\alpha'y \\ &= x\beta'a\eta b\alpha x\beta a\eta b\alpha'y = x\beta'a\eta b\alpha'y = z, \\ a\eta b\alpha z\beta'a\eta b &= a\eta b\alpha x\beta a\eta b\alpha'y\beta'a\eta b = a\eta b\alpha'y\beta'a\eta b = a\eta b, \end{aligned}$$

所以 $z \in V_\alpha^{\beta'}(a\eta b)$. 故而由

$$g \circ h = b\alpha z\beta'a \in \bigcup_{\alpha, \beta \in \Gamma} b\alpha V_\alpha^\beta(a\eta b)\beta a = S_\eta(a, b)$$

知 $(S_\eta(a, b), \circ)$ 是 S_η 的一个子半群且是矩形带. 特别地, $\eta \in \Gamma, e \in E_\alpha(S), f \in E_\beta(S)$, 则 $(S_\eta(e, f), \circ)$ 是相关半群 S_η 的一个子半群且 $(S_\eta(e, f), \circ)$ 是矩形带.

例 6.6 $S = \{0, 1\}, \Gamma = \{\alpha, \beta\}$ 定义运算为

α	0	1	β	0	1
0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0

和

β	0	1
0	0	0
1	0	0

.

显然 $0, 1 \in E_\alpha(S), 0 \in E_\beta(S)$, 我们可以得到 $S_\alpha(1, 1) = \{1\}, S_\beta(1, 1) = \{0\}, S = S(a, b)$, 从而可以知道夹心集 $S(a, b)$ 不是 Γ -矩形带.

参 考 文 献

- [1] Sen M K, Saha N K. On Γ -semigroup (1)[J]. Bull. Cal. Math. Soc., 1986, 78: 180–186.
- [2] Dutta T K, Chatterjee T K. Green's equivalences on Γ -semigroup[J]. Bull. Cal. Math. Soc., 1987, 80: 30–35.
- [3] Saha N K. On Γ -semigroup (2)[J]. Bull. Cal. Math. Soc., 1987, 79: 331–335.
- [4] Seth A. Γ -group congruences on regular Γ -semigroups[J]. Internat. J. Math. Sci., 1992, 15(1): 103–106.
- [5] Seth A. Rees's Theorem for Γ -semigroup[J]. Bull. Cal. Math. Soc., 1989, 81: 217–226.
- [6] 盛德成, 赵宪钟. Γ -群并及其判定[J]. Pure Appl. Math., 1995, 11(1): 9–12.
- [7] Yang Guowei. Structural theorem for completely simple Γ -semigroups and Γ -semigroups with a completely simple Γ -kernel[J]. J. Math. Research Exposition, 2002, 22(1): 1–6.
- [8] Sen M K, Saha N K. Orthodox Γ -semigroup[J]. Internat. J. Math. Sci., 1990, 13(3): 527–534.

- [9] Sen M K, Saha N K. The maximum idempotent-separating congruence on an orthodox Γ -semigroup[J]. J. Pure Math., 1990, 7 : 39–48.
- [10] Sen M K, Seth A. The maximum idempotent-separating congruence in a regular Γ -semigroup[J]. Bull. Cal. Math. Soc., 1990, 82: 131–137.
- [11] Yang Guowei, Chu Ping. Congruences and the lattice of congruences on a completely 0-simple Γ -semigroup[J]. Soochow. J. Math., 1994, 20(3): 335–350.
- [12] Saha N K. On Γ -semigroup (3)[J]. Bull. Cal. Math. Soc., 1988, 80: 1–12.
- [13] 赵宪钟. Γ - 纯正半群 [J]. Pure Appl. Math., 1994, 10(1): 116–120.
- [14] Sujit Kumar Sardar, Bijan Davvaz, Samit Kumar Majumder, Manasi Mandal. Characteristic ideals and fuzzy characteristic ideals of Γ -semigroups[J]. Mathematica Aeterna, 2012, 2: 189–201.
- [15] Samit Kumar Majumder. On some properties of vague ideals in Γ -semigroups[J]. International Journal of Computational Cognition, 2011, 9: 105–110.
- [16] Chattopadhyay S, Kar S. On structure space of Γ -semigroups[J]. Acta Univ. Palacki. Olomuc., Fac. Rer. Nat., 2008, 47: 37–46.
- [17] Nathan Jacobson. Basic algebra (1)[M]. New York: W. H. Freeman, 1989.
- [18] 杨国为, 朱平. 关于完全单 Γ - 半群 [J]. 数学研究与评论, 1996, 16(1): 90–92.
- [19] 刘国新, 盛德成. 正则 Γ - 半群上的纯正同余 [J]. Pure Applied Math., 1998, 14(1): 80–84.

THE PROPERTIES OF γ -SEMIGROUP DIFFERENT FROM SEMIGROUP

LI Qing¹, YU Bing-jun²

(1. College of Mathematics Science, Chongqing Normal university, Chongqing 400047, China)

(2. College of Arts and Science, Sichuan Normal University, Chengdu 610059, China)

Abstract: In this paper, some properties of the Γ -semigroup are studied. We obtain some results about Γ -semigroup by using methods analogous with semigroup. At the same time, We also take into account the special nature of Γ -semigroup. These results are the generalization of properties in semigroup. In particular, we study the sandwich of Γ -semigroup.

Keywords: semigroup; Γ -semigroup; sandwich

2010 MR Subject Classification: 20M99