Vol. 35 (2015)
No. 3

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

周期参数扰动的 T 混沌系统周期轨道分析

王 震, 惠小健, 孙 卫, 李永新
(西京学院应用统计与理学系, 陕西 西安 710123)

摘 要: 本文研究了一类周期参数扰动的 T 混沌系统的周期轨道问题. 利用次谐波 Melnikov 方法, 获得了具有广义 Hamilton 结构的周期参数扰动的慢变系统的振荡周期轨道和旋转周期轨道.

关键词: Hamilton 系统; 次谐波 Melnikov 方法; 周期轨道; 周期参数扰动
MR(2010) **主题分类号**: 34H10; 37D45 **中图分类号**: O175.14; O193
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2015)03-0672-11

1 引言

半个世纪以来, 经过无数科学工作者的艰苦研究和探索, 人们对混沌运动的特点、规律及其在各个学科领域的表现已经有了深刻的理解. 1963 年, Lorenz 在一个三维自治系统首次发现了混沌吸引子 [1]; 1999 年, Chen 和 Ueta 也发现了一种和 Lorenz 系统族相似但不同的混沌吸引子 [2]; 根据文献 [3] 对混沌系统的代数结构划分, Lorenz 系统满足 $a_{12}a_{21} > 0$, Chen 系统满足 $a_{12}a_{21} < 0$, 自然的问题是是否存在过渡系统满 $a_{12}a_{21} = 0$; 2002 年 Lü 和 Chen 发现了过渡系统 Lü 系统 [4]; 2008 年 Yang 和 Chen [5] 给出了混沌系统代数结构的分类条件, 发现 Lorenz 系统满足 $a_{11}a_{22} > 0$, Chen 系统, Lü 系统满足 $a_{11}a_{22} < 0$, 一个自然的问题是是否有过渡混沌系统满足 $a_{11}a_{22} = 0$. 事实上, 满足 $a_{11}a_{22} = 0$ 的混沌系统在 2005 年, 2008 年, 2010 年等分别被 Gh. Tigan, Yang 和作者构造 [5−8]. 人们构造混沌系统, 其主要目的是为了研究混沌的形成机理, 探究混沌系统间的内在联系, 以期更为深入的探索混沌的奥秘. 然而目前混沌基础理论研究方面多集中在混沌吸引子的发现, 通向混沌的道路, 混沌的动力学行为等 [9−12], 但从微分方程定性理论层面来看, 对系统的周期解的探究, 轨道结构研究并不多见. 又由于混沌运动具有初值敏感性, 混沌控制成了混沌应用的关键环节. 到目前为止, 国内外的科学工作者基于不同的策略提出了大量的混沌控制方法 [13−15]. 为了研究振子状态及周期解, 国内外研究者提出基于摄动思想的控制方法 [16−17], 通过扰动使系统达到某一状态. 文献 [18–20] 运用 Melnikov 方法对 Duffing 振子, 上田振子, 布鲁塞尔振子, Lorenz 系统, 扩散 Lorenz 系统进行了分析, 并通过参数扰动进行了控制. 又由于混沌系统在工程领域的重要性, 因此有目的的构造简单混沌系统来产生或强化混沌现象, 并对混沌系统进行结构分析, 周期轨道探测等已经成为一个关键性的课题. 本文在文献 [7, 21] 的基础上继续对此类 T 混沌系统

$$\frac{dx}{dt} = a(y-x), \frac{dy}{dt} = cx - axz, \frac{dz}{dt} = -bz + xy \tag{1.1}$$

*收稿日期: 2013-10-29 接收日期: 2014-02-28
基金项目: 陕西省教育厅科研计划项目资助 (12JK1077; 12JK1073); 西京学院科研基金资助 (XJ130245; XJ130244).
作者简介: 王震 (1981–), 男, 陕西合阳, 讲师, 主要研究方向: 常微分方程与动力系统.

(a, b, c 为实数, $a \neq 0$) 进行了参数扰动控制, 并通过广义 Hamilton 系统扰动理论, 运用 Melnikov 方法对周期轨道进行了分析, 解析地给出系统周期轨道, 并进行了数值仿真验证.

2 周期参数扰动系统

令 $x=\tilde{x}$, $y=\frac{1}{\sqrt{a}}\tilde{y}$, $z=\frac{1}{a}(c-\tilde{z})$, 则系统 (1.1) 可变为

$$\frac{d\tilde{x}}{dt}=-a\tilde{x}+\sqrt{a}\tilde{y},\frac{d\tilde{y}}{dt}=\sqrt{a}\tilde{x}\tilde{z},\frac{d\tilde{z}}{dt}=b(c-\tilde{z})-\sqrt{a}\tilde{x}\tilde{y}. \tag{2.1}$$

为了便于控制系统 (2.1), 运用周期参数扰动控制方法, 将参数 c 变为 $c_0+c_1\sin\omega t$, 则有

$$\frac{d\tilde{x}}{dt}=-a\tilde{x}+\sqrt{a}\tilde{y},\frac{d\tilde{y}}{dt}=\sqrt{a}\tilde{x}\tilde{z},\frac{d\tilde{z}}{dt}=b(c_0+c_1\sin\omega t-\tilde{z})-\sqrt{a}\tilde{x}\tilde{y}. \tag{2.2}$$

显然当 $c_1=0$ 时, 系统 (2.2) 即为系统 (2.1). 为了便于分析系统 (2.1), 令 $\tilde{x}=\frac{\hat{x}}{\varepsilon}$, $\tilde{y}=\frac{\hat{y}}{\varepsilon^2}$, $\tilde{z}=\frac{\hat{z}}{\varepsilon^2}$, $t=\varepsilon\tau$, $\omega=\frac{\omega_1}{\varepsilon}$, $\varepsilon=\frac{1}{\sqrt{bc_0}}$, 有

$$\frac{d\hat{x}}{d\tau}=\sqrt{a}\hat{y}-\varepsilon a\hat{x},\frac{d\hat{y}}{d\tau}=\sqrt{a}\hat{x}\hat{z},\frac{d\hat{z}}{d\tau}=-\sqrt{a}\hat{x}\hat{y}+\varepsilon(1+\frac{c_1}{c_0}\sin\omega_1\tau-b\hat{z}). \tag{2.3}$$

记 $\hat{x}=x$, $\hat{y}=y$, $\hat{z}=z$, $\tau=t$, 且导数用符号 "$\cdot$", 则系统 (2.3) 可变为

$$\dot{x}=\sqrt{a}y-\varepsilon ax,\dot{y}=\sqrt{a}xz,\dot{z}=-\sqrt{a}xy+\varepsilon(1+\frac{c_1}{c_0}\sin\omega_1 t-bz). \tag{2.4}$$

显然当 $\varepsilon=0$, 系统 (2.4) 为广义 Hamilton 系统

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -\sqrt{a}z & \sqrt{a}y\\ \sqrt{a}z & 0 & 0\\ -\sqrt{a}y & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ 0\\ 1\end{pmatrix}=J\cdot\nabla H, \tag{2.5}$$

其中 Hamilton 函数为 $H(x,y,z)=\frac{1}{2}x^2+z=A$, Casimir 函数为

$$C(x,y,z)=a(y^2+z^2)=aB^2,$$

且在平衡点 $(0,0,B)$ 处存在 "8 形" 同宿轨道, 在同宿轨道 "内外" 分别被振荡周期轨道和旋转周期轨道充满, 在三维空间中, 这些周期轨道在柱面 $y^2+z^2=B^2$ 和 $\frac{1}{2}x^2+z=A$ 上.

为了应用广义 Hamilton 系统中次谐波 Melnikov 向量函数理论 [22], 取

$$\begin{cases}x=x,\\ y=-(B+\rho)\sin\theta,\\ z=-(B+\rho)\cos\theta\end{cases}$$

且 $B>0$, $\left|\frac{\rho}{B}\right|\ll 1$, 则系统 (2.4) 可变化为慢变系统 [23]

$$\begin{cases}\dot{\theta}=\sqrt{a}x+\varepsilon(\frac{1}{B+\rho}(\sin\theta+\frac{c_1}{c_0}\sin\omega_1 t\sin\theta)+b\cos\theta\sin\theta),\\ \dot{x}=-\sqrt{a}(B+\rho)\sin\theta-\varepsilon ax,\\ \dot{\rho}=-\varepsilon(\cos\theta+\frac{c_1}{c_0}\sin\omega_1 t\cos\theta+b(B+\rho)\cos^2\theta).\end{cases} \tag{2.6}$$

当 $\varepsilon=0$ 时, 系统 (2.6) 退化为 $\theta-x$ 平面上的单摆系统, 其 Hamiltonian 函数

$$\tilde{H}(\theta,x,\rho)=\sqrt{a}(\frac{1}{2}x^2-(B+\rho)\cos\theta)=\sqrt{a}A.$$

容易得知, 当 $-(B+\rho)<A<(B+\rho)$, 有振荡周期轨道 $\{\Gamma_o^\kappa\}$

$$\left\{\begin{array}{l}\theta_o(t,\kappa)=2\arcsin\left(\kappa\mathrm{sn}\left(\sqrt{a(B+\rho)}t,\kappa\right)\right),\\ x_o(t,\kappa)=2\kappa\sqrt{B+\rho}\mathrm{cn}\left(\sqrt{a(B+\rho)}t,\kappa\right),\end{array}\right. \tag{2.7}$$

其中 $\kappa^2=\frac{A+(B+\rho)}{2(B+\rho)}$, 周期 $T_o(\kappa)=\frac{4K(\kappa)}{\sqrt{a(B+\rho)}}$, $\mathrm{sn}(u,\kappa)$ 和 $\mathrm{cn}(u,\kappa)$ 表示含模数 κ 的 Jacobian 椭圆函数, $K(\kappa)$ 表示第一类完全椭圆积分. 当 $A>(B+\rho)$, 存在旋转周期轨道 $\{\Gamma_\pm\}$

$$\left\{\begin{array}{l}\theta_{r\pm}(t,\kappa_1)=\pm2\arcsin\left(\mathrm{sn}\left(\frac{\sqrt{a(B+\rho)}}{\kappa_1}t,\kappa_1\right)\right),\\ x_{r\pm}(t,\kappa_1)=\pm\frac{2\sqrt{(B+\rho)}}{\kappa_1}\mathrm{dn}\left(\frac{\sqrt{a(B+\rho)}}{\kappa_1}t,\kappa_1\right),\end{array}\right. \tag{2.8}$$

其中 $\kappa_1^2=\frac{2(B+\rho)}{A+(B+\rho)}$, 周期 $T_r(\kappa_1)=\frac{2\kappa_1K(\kappa_1)}{\sqrt{a(B+\rho)}}$, $\mathrm{dn}(u,\kappa)$ 表示含模数 κ 的 Jacobian 椭圆函数.

3 周期轨道 Melnikov 分析

为了对慢变系统 (2.6) 的周期轨道进行分析, 定义满足 $mT=nT_p$ 的未扰周期轨道的次谐波 Melnikov 向量函数两分量为

$$M_1^p=\int_0^{mT}\left\{\begin{array}{l}-a\sqrt{a}x_p^2+\sqrt{a}\sin^2\theta_p+b\sqrt{a}(B+\rho)\cos\theta_p\sin^2\theta_p\\ +\sqrt{a}\frac{c_1}{c_0}\sin\omega_1t_0\sin^2\theta_p\cos\omega_1t\end{array}\right\}dt, \tag{3.1}$$

$$M_3^p=\int_0^{mT}[\cos\theta_p+b(B+\rho)\cos^2\theta_p+\frac{c_1}{c_0}\sin\omega_1t_0\cos\theta_p\cos\omega_1t]dt, \tag{3.2}$$

其中 $p=o$ 为振荡周期轨道, $p=r$ 为旋转周期轨道.

3.1 振荡周期轨道分析

振荡周期轨道 $\{\Gamma_o^\kappa\}$ 的周期 $T_o(\kappa)=\frac{4K(\kappa)}{\sqrt{a(B+\rho)}}=\frac{m}{n}\frac{2\pi}{\omega_1}=\frac{m}{n}T$, 取 $p=o,n=1$, 运用 (3.1), (3.2) 式有

$$M_1^o=-a\sqrt{a}U_1+\sqrt{a}U_2+b\sqrt{a}(B+\rho)U_3+\sqrt{a}\frac{c_1}{c_0}\sin\omega_1t_0U_4, \tag{3.3}$$

其中

$$\begin{aligned}U_1&=\int_0^{mT}x_o^2dt\\&=\int_0^{mT}\left[4\kappa^2(B+\rho)\mathrm{cn}^2\left(\sqrt{a(B+\rho)}t,\kappa\right)\right]dt\\&=16\sqrt{\frac{B+\rho}{a}}\left[E(\kappa)-(1-\kappa^2)K(\kappa)\right].\end{aligned}$$

$E(\kappa)$ 表示第二类完全椭圆积分

$$
\begin{aligned}
U_2 &= \int_0^{mT} \sin^2\theta_o dt \\
&= \int_0^{mT} \left\{4\kappa^2 \mathrm{sn}^2\left(\sqrt{a(B+\rho)}t,\kappa\right)\left[1-\kappa^2\mathrm{sn}^2\left(\sqrt{a(B+\rho)}t,\kappa\right)\right]\right\}dt \\
&= \frac{16}{3\sqrt{a(B+\rho)}}\left[(1-\kappa^2)K(\kappa)-(1-2\kappa^2)E(\kappa)\right], \\
U_3 &= \int_0^{mT} \sin^2\theta_o\cos\theta_o dt \\
&= \int_0^{mT} \left\{4\kappa^2 \mathrm{sn}^2\left(\sqrt{a(B+\rho)}t,\kappa\right)\left[1-\kappa^2\mathrm{sn}^2\left(\sqrt{a(B+\rho)}t,\kappa\right)\right]\frac{2\kappa^2(B+\rho)\mathrm{cn}^2\left(\sqrt{a(B+\rho)}t,\kappa\right)-A}{B+\rho}\right\}dt \\
&= \frac{16}{15\sqrt{a}(\sqrt{B+\rho})^3}\left[\begin{array}{l}\left[5(\kappa^2-1)A-2(\kappa^4-3\kappa^2+2)(B+\rho)\right]K(\kappa)\\ +\left[5(2\kappa^2-1)A-4(\kappa^4-\kappa^2+1)(B+\rho)\right]E(\kappa)\end{array}\right], \\
U_4 &= \int_0^{mT} \sin^2\theta_o\cos\omega_1 t dt \\
&= \int_0^{mT} \left\{4\kappa^2 \mathrm{sn}^2\left(\sqrt{a(B+\rho)}t,\kappa\right)\left[1-\kappa^2\mathrm{sn}^2\left(\sqrt{a(B+\rho)}t,\kappa\right)\right]\cos\omega_1 t\right\}dt \\
&\overset{u=\sqrt{a(B+\rho)}t}{=} \frac{4\kappa^2}{\sqrt{a(B+\rho)}}\int_0^{4mK(\kappa)}\left\{\left[\mathrm{sn}^2(u,\kappa)-\kappa^2\mathrm{sn}^4(u,\kappa)\right]\cos\left(\frac{m\pi}{2nK(\kappa)}u\right)\right\}du.
\end{aligned}
$$

可以看到, 当 $\frac{m}{2}=j$ 时, 则当 $m=2, j=1$, 有

$$
U_4^2=-\frac{8\pi^2}{3K(\kappa)\sqrt{a(B+\rho)}}\left[\left(\frac{\pi}{K(\kappa)}\right)^2+13-2\kappa^2\right]\mathrm{csch}\frac{\pi K'(\kappa)}{K(\kappa)},
$$

当 $m=4, j=2$, 有

$$
U_4^4=-\frac{16\pi^2}{3K(\kappa)\sqrt{a(B+\rho)}}\left[2\left(\frac{\pi}{K(\kappa)}\right)^2+11-\kappa^2\right]\mathrm{csch}\frac{2\pi K'(\kappa)}{K(\kappa)},
$$

所以当

$$
\left|\frac{-aU_1+U_2+b(B+\rho)U_3}{\frac{c_1}{c_0}U_4}\right|<1 \tag{3.4}
$$

成立时, $M_1^o=0$ 有解. 同样, 可以计算

$$
M_3^o=U_5+b(B+\rho)U_6+\frac{c_1}{c_0}\sin(\omega_1 t_0)U_7, \tag{3.5}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
U_5 &= \int_0^{mT}\cos\theta_o dt=\int_0^{mT}\frac{2\kappa^2(B+\rho)\mathrm{cn}^2\left(\sqrt{a(B+\rho)}t,\kappa\right)-A}{B+\rho}dt \\
&= \frac{4}{\sqrt{a}(\sqrt{B+\rho})^3}\left[\left[2(\kappa^2-1)(B+\rho)-A\right]K(\kappa)+2(B+\rho)E(\kappa)\right],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
U_6 &= \int_0^{mT} \cos^2\theta_o dt = \int_0^{mT} \frac{\left[2\kappa^2(B+\rho)\mathrm{cn}^2\left(\sqrt{a(B+\rho)}t,\kappa\right)-A\right]^2}{(B+\rho)^2}dt \\
&= \frac{4}{3\sqrt{a}(\sqrt{B+\rho})^5}\left[\begin{array}{l}\left[4(1-\kappa^2)(2-3\kappa^2)(B+\rho)^2+12A(1-\kappa^2)(B+\rho)+3A^2\right]K(\kappa)\\ -\left[8(1-2\kappa^2)(B+\rho)^2+12A(B+\rho)\right]E(\kappa)\end{array}\right], \\
U_7 &= \int_0^{mT} \cos\theta_o \cos\omega_1 t dt = \int_0^{mT} \frac{2\kappa^2(B+\rho)\mathrm{cn}^2\left(\sqrt{a(B+\rho)}t,\kappa\right)-A}{B+\rho}\cos\omega_1 t dt \\
&= \frac{2\kappa^2}{\sqrt{a(B+\rho)}}\int_0^{4K(\kappa)} \frac{E(\kappa)-\kappa'^2K(\kappa)}{\kappa^2K(\kappa)}\cos\left(\frac{m\pi}{2K(\kappa)}u\right)du \\
&\quad +\frac{2\kappa^2}{\sqrt{a(B+\rho)}}\int_0^{4K(\kappa)} \frac{\pi}{\kappa^2K^2(\kappa)}\sum_{j=1}^{\infty}\left[j\cdot\mathrm{csch}\left(j\cdot\frac{\pi K'(\kappa)}{K(\kappa)}\right)\cdot\cos\left(j\cdot\frac{\pi}{K(\kappa)}u\right)\right]\cos\left(\frac{m\pi}{2K(\kappa)}u\right)du,
\end{aligned}
$$

其中 $\kappa'=\sqrt{1-\kappa^2}$, 且取 $\frac{m}{2}=j$, 则当 $m=2, j=1$, 有

$$
U_7^2=\frac{4\pi}{K(\kappa)\sqrt{a(B+\rho)}}\mathrm{csch}\frac{\pi K'(\kappa)}{K(\kappa)},
$$

当 $m=4, j=2$, 有

$$
U_7^4=\frac{8\pi}{K(\kappa)\sqrt{a(B+\rho)}}\mathrm{csch}\frac{2\pi K'(\kappa)}{K(\kappa)},
$$

所以当

$$
\left|\frac{U_5+b(B+\rho)U_6}{\frac{c_1}{c_0}U_7}\right|<1 \tag{3.6}
$$

成立时, $M_3^o=0$ 有解. 由以上运算, 可得

定理 3.1 如果系统 (2.2) 的各参数同时满足 (3.4), (3.6) 式, 则相应的子谐波 Melnikov 函数为零, 其振荡周期轨道的周期为 $\frac{2m\pi}{\omega_1}$.

3.2 旋转周期轨道分析

旋转周期轨道 $\{\Gamma_\pm\}$ 的周期 $T_r(\kappa_1)=\frac{2\kappa_1K(\kappa_1)}{\sqrt{a(B+\rho)}}=\frac{m}{n}\frac{2\pi}{\omega_1}=\frac{m}{n}T$, 取 $p=r$, $n=1$, 运用 (3.1), (3.2) 式有

$$
M_1^r=-a\sqrt{a}G_1+\sqrt{a}G_2+b\sqrt{a}(B+\rho)G_3+\sqrt{a}\frac{c_1}{c_0}\sin\omega_1 t_0 G_4, \tag{3.7}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
G_1 &= \int_0^{mT} x_r^2 dt = \int_0^{mT}\left[\frac{4(B+\rho)}{\kappa_1^2}\mathrm{dn}^2\left(\frac{\sqrt{a(B+\rho)}}{\kappa_1}t,\kappa_1\right)\right]dt = \frac{8}{\kappa_1}\sqrt{\frac{B+\rho}{a}}E(\kappa_1), \\
G_2 &= \int_0^{mT}\sin^2\theta_r dt = \int_0^{mT}\left\{4\mathrm{sn}^2\left(\frac{\sqrt{a(B+\rho)}}{\kappa_1}t,\kappa_1\right)\left[1-\mathrm{sn}^2\left(\frac{\sqrt{a(B+\rho)}}{\kappa_1}t,\kappa_1\right)\right]\right\}dt \\
&= \frac{16}{3\kappa_1^3\sqrt{a(B+\rho)}}\left[2(\kappa_1^2-1)K(\kappa_1)-(\kappa_1^2-2)E(\kappa_1)\right],
\end{aligned}
$$

$$G_3=\int_0^{mT}\sin^2\theta_r\cos\theta_r dt$$
$$=\int_0^{mT}\left\{4\mathrm{sn}^2\left(\frac{\sqrt{a(B+\rho)}}{\kappa_1}t,\kappa_1\right)\left[1-\mathrm{sn}^2\left(\frac{\sqrt{a(B+\rho)}}{\kappa_1}t,\kappa_1\right)\right]\frac{\frac{2}{\kappa_1^2}(B+\rho)\mathrm{dn}^2\left(\frac{\sqrt{a(B+\rho)}}{\kappa_1}t,\kappa_1\right)-A}{B+\rho}\right\}dt$$
$$=\frac{8}{15\kappa_1^5\sqrt{a}(\sqrt{B+\rho})^3}\left[\begin{array}{l}\left[10\kappa_1^2(1-\kappa_1^2)A-2(\kappa_1^4-3\kappa_1^2+2)(B+\rho)\right]K(\kappa_1)\\+\left[4(\kappa_1^4-\kappa_1^2+1)(B+\rho)-5\kappa_1^2(2-\kappa_1^2)A\right]E(\kappa_1)\end{array}\right],$$
$$G_4=\int_0^{mT}\sin^2\theta_r\cos\omega_1 tdt$$
$$=\int_0^{mT}\left\{4\mathrm{sn}^2\left(\frac{\sqrt{a(B+\rho)}}{\kappa_1}t,\kappa_1\right)\left[1-\mathrm{sn}^2\left(\frac{\sqrt{a(B+\rho)}}{\kappa_1}t,\kappa_1\right)\right]\cos\omega_1 t\right\}dt,$$

取 $m=j$, 则当 $m=3, j=3$, 有

$$G_4^3=\frac{4\pi^2}{3\kappa_1^3K(\kappa_1)\sqrt{a(B+\rho)}}\left[9\left(\frac{\pi}{K(\kappa_1)}\right)^2+22-11\kappa_1^2\right]\mathrm{csch}\frac{3\pi K'(\kappa_1)}{K(\kappa_1)},$$

当 $m=4, j=4$, 有

$$G_4^4=\frac{8\pi^2}{3\kappa_1^3K(\kappa_1)\sqrt{a(B+\rho)}}\left[8\left(\frac{\pi}{K(\kappa_1)}\right)^2+14-7\kappa_1^2\right]\mathrm{csch}\frac{4\pi K'(\kappa_1)}{K(\kappa_1)},$$

所以当

$$\left|\frac{-aG_1+G_2+b(B+\rho)G_3}{\frac{c_1}{c_0}G_4}\right|<1 \tag{3.8}$$

成立时, $M_1^r=0$ 有解. 同样, 可以计算

$$M_3^r=G_5+b(B+\rho)G_6+\frac{c_1}{c_0}\sin(\omega_1 t_0)G_7, \tag{3.9}$$

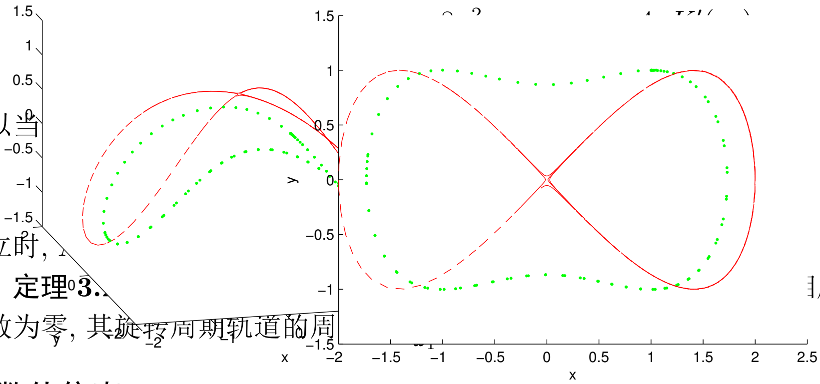
其中

$$G_5=\int_0^{mT}\cos\theta_r dt=\int_0^{mT}\frac{\frac{2}{\kappa_1^2}(B+\rho)\mathrm{dn}^2\left(\frac{\sqrt{a(B+\rho)}}{\kappa_1}t,\kappa_1\right)-A}{B+\rho}dt$$
$$=\frac{2}{\kappa_1\sqrt{a}(\sqrt{B+\rho})^3}\left[2(B+\rho)E(\kappa_1)-A\kappa_1^2K(\kappa_1)\right],$$
$$G_6=\int_0^{mT}\cos^2\theta_r dt=\int_0^{mT}\frac{\left[\frac{2}{\kappa_1^2}(B+\rho)\mathrm{dn}^2\left(\frac{\sqrt{a(B+\rho)}}{\kappa_1}t,\kappa_1\right)-A\right]^2}{(B+\rho)^2}dt$$
$$=\frac{2}{3\kappa_1^3\sqrt{a}(\sqrt{B+\rho})^5}\left[\begin{array}{l}\left[4(\kappa_1^2-1)(B+\rho)^2+3A^2\kappa_1^4\right]K(\kappa_1)\\+\left[8(2-\kappa_1^2)(B+\rho)^2+12\kappa_1^2(B+\rho)\right]E(\kappa_1)\end{array}\right],$$
$$G_7=\int_0^{mT}\cos\theta_r\cos\omega_1 tdt=\int_0^{mT}\frac{\frac{2}{\kappa_1^2}(B+\rho)\mathrm{dn}^2\left(\frac{\sqrt{a(B+\rho)}}{\kappa_1}t,\kappa_1\right)-A}{B+\rho}\cos\omega_1 tdt,$$

取 $m=j$, 则当 $m=3, j=3$ 时, 有

$$G_7^3=\frac{4\pi^2}{\kappa_1 K(\kappa_1)\sqrt{a(B+\rho)}}\operatorname{csch}\frac{3\pi K'(\kappa_1)}{K(\kappa_1)},$$

当 $m=4, j=4$ 时, 有



所以当

(3.10)

成立时,

定理 3. 应的子谐波 Melnikov

函数为零, 其旋转周期轨道的周

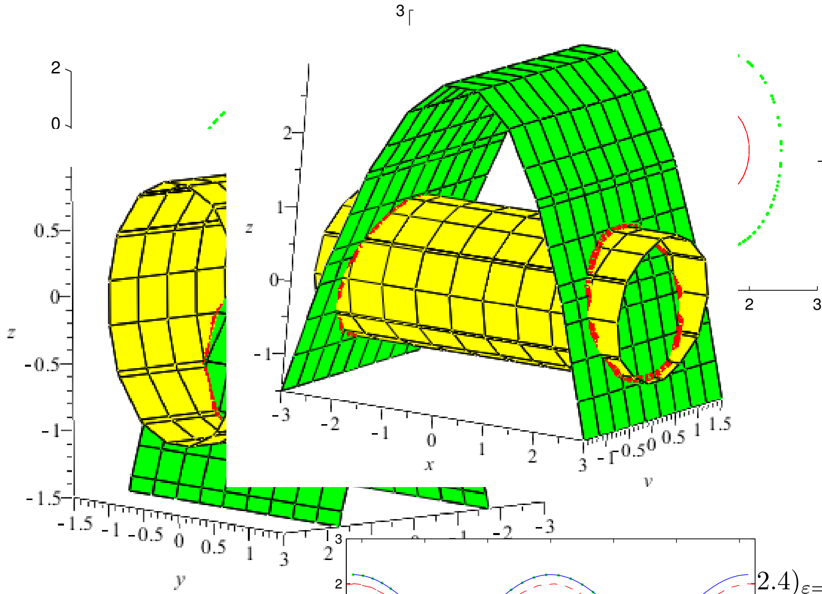
4 数值仿真

为了论证上述理论, 我们给出数值仿真. 取 $a=2$ 和 $a=1.05$, 图 1 给出未扰系统 $(2.4)_{\varepsilon=0}$ 在三维空间及在相应平面上的投影 "8 形" 同宿轨道内外的振荡周期轨道和旋转周期轨道. 取 $B=1$, 图 2 分别给出了 $A=1$ 和 $A=3$ 时抛物柱面 $\frac{1}{2}x^2+z=A$ 与圆柱面 $y^2+z^2=1$ 的交线, 即振荡周期轨道和旋转周期轨道.

图 1a: 未扰系统 $(2.4)_{\varepsilon=0}$ 三维空间中的振荡周期轨道和同宿轨道 (dot line: 振荡周期轨道, – dash line: 同宿轨道)

图 1b: 未扰系统 $(2.4)_{\varepsilon=0}$ 三维空间中的振荡周期轨道和同宿轨道 (dot line: 振荡周期轨道, – dash line: 同宿轨道）在 $x-y$ 平面上的投影

当系统 (2.4) 变为慢变系统 (2.6) 时, 相应的空间柱面上的同宿轨道退化为平面 $\theta-x$ 平面内的异宿轨道, 在保持上述参数的不变的情形下, 图 3 给出了未扰系统 $(2.6)_{\varepsilon=0}$ 在退化 $\theta-x$ 平面内的异宿轨道, 及振荡周期轨道 (解析式 (2.7) 和数值方法) 和旋转周期轨道 (解析式 (2.8) 和数值方法). 图 4 作出了系统 (2.6) 的三维空间振荡周期轨道和旋转周期轨道及在 $\theta-x$ 平面内的投影, 从投影图形可以看到, 当 ε 在零的附近取值, 系统 (2.6) 在定理 3.1 和定理 3.2 所给参数条件下, 在三维空间异宿轨道的内外存在振荡周期轨道和旋转周期轨道.



$(2.4)_{\varepsilon=0}$ 三维空间中的旋转周期

周期轨道和同宿轨道 (dot

dot line: 振荡周期轨道, –

轨道) 在 $x-y$ 平面上的投影

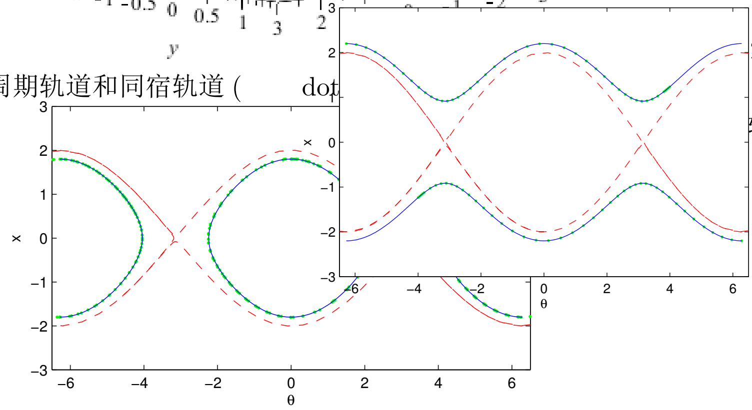


图 2a: 未扰系统 $(2.4)_{\varepsilon=0}$ 的振荡周期轨道 (抛物柱面 $\frac{1}{2}x^2+z=0$ 与圆柱面 $y^2+z^2=1$ 的交线)

图 2b: 未扰系统 $(2.4)_{\varepsilon=0}$ 的旋转周期轨道 (抛物柱面 $\frac{1}{2}x^2+z=3$ 与圆柱面 $y^2+z^2=1$ 的交线)

图 3a: 未扰系统 $(2.6)_{\varepsilon=0}$ 在退化 $\theta-x$ 平面内的异宿轨道及振荡周期轨道 (—— dash line: 异宿轨道 dot line: 振荡周期轨道 (解析方法) — solid line: 振荡周期轨道 (数值方法))

图 3b: 未扰系统 $(2.6)_{\varepsilon=0}$ 在退化 $\theta-x$ 平面内的异宿轨道及旋转周期轨道 (—— dash line: 异宿轨道 dot line: 旋转周期轨道 (解析方法) — solid line: 旋转周期轨道 (数值方法))

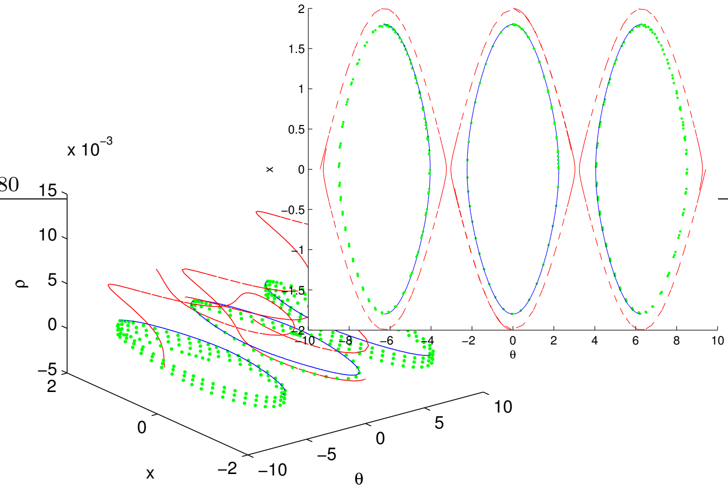


图 4a: 系统 (… 空间振荡周期轨道 (——
— dash … dot line: 振荡周期轨道
轨道 (… : 振荡周期轨道 (数值方
… 平面内的投影

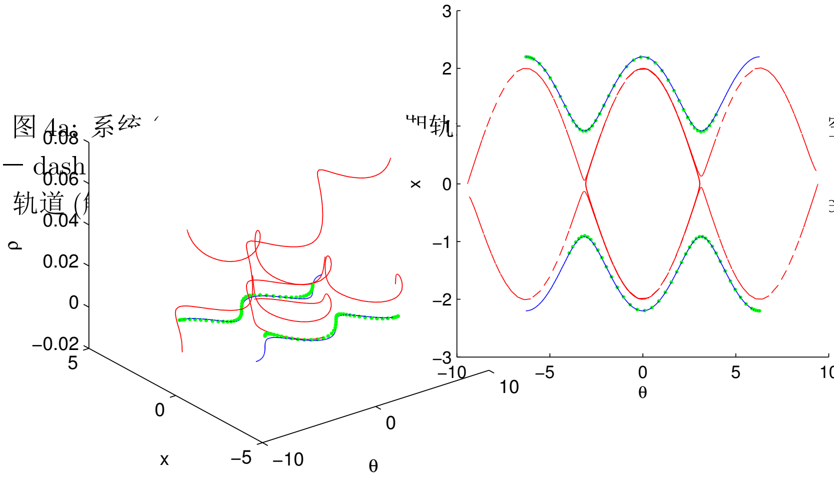


图 4c: 系统 (2.6) 三维空间旋转周期轨道 (—— dash line: 异宿轨道 dot line: 旋转周期轨道 (解析方法) — solid line: 旋转周期轨道 (数值方法))

图 4d: 系统 (2.6) 三维空间旋转周期轨道 (—— dash line: 异宿轨道 dot line: 旋转周期轨道 (解析方法) — solid line: 旋转周期轨道 (数值方法)) 在 $\theta - x$ 平面内的投影

5 结论

本文通过符号与数值运算, 运用次谐波 Melnikov 函数分析和计算了周期参数扰动的 T 混沌系统的振荡周期轨道和旋转周期轨道, 并通过数值仿真进行了实验, 验证了理论分析的正确性. 根据数值仿真, 可以看到周期参数扰动策略不仅可以探究系统的周期轨道解析式, 同时可以对原混沌系统进行控制. 当然还可以继续分析该系统的全局结构, 如分叉等动力学行为, 限于篇幅, 此处讨论从略.

参 考 文 献

[1] Lorenz E N. Deterministic nonperiodic flow[J]. J. Atmospheric Sci., 1963, 20(2): 130–141.

[2] Chen G R, Ueta T. Yet another chaotic attractor[J]. International J. Bifurcation and Chaos, 1999, 9(7): 1465–1466.

[3] Celikovsky S, Vanecek A. Bilinear systems and chaos[J]. Kybernetika, 1994, 30(4): 403–424.

[4] Lü J H, Chen G R. A new chaotic attractor coined[J]. International J. Bifurcation and Chaos, 2002, 12(3): 659–661.

[5] Yang Q G, Chen G R. A chaotic system with one saddle and two stable node-foci[J]. International J. Bifurcation and chaos, 2008, 18(5): 1393–1414.

[6] Tigan Gh. Analysis of a dynamical system derived from the Lorenz system[J]. Sci. Bulletin of The Politehnica University of Timisoara, 2005, 50(64): 61–72.

[7] Wang Z. Existence of attractor and control of a 3D differential system[J]. Nonlinear Dynamics, 2010, 60(3): 369–373.

[8] 王震, 李永新, 惠小健, 吕雷. 一类 3D 混沌系统的异宿轨道和 backstepping 控制 [J]. 物理学报, 2011, 60(1): 010513.

[9] Sprott J C. Some simple chaotic flows[J]. Physical Review E, 1994, 50(2): 647–650.

[10] Wang Z, Sun W, Wei Z C. Dynamical analysis and chaos control of a driven system with one cubic nonlinearity: numerical and experimental investigations[J]. Advanced Materials Research, 2012, 486: 204–210.

[11] Yang Q G, Wei Z C, Chen G R. An unusual 3D autonomous quadratic chaotic system with two stable node-foci[J]. International J. Bifurcation and Chaos, 2010, 20(4): 1061–1083.

[12] Wei Z C. Dynamical behaviors of a chaotic system with no equilibria[J]. Physics Letters A, 2011, 376(2): 102–108.

[13] 王震. 非线性机电换能器混沌系统的无源化控制 [J]. 控制理论与应用, 2011, 28(7): 1036–1040.

[14] Chen G R, Yu X H. Chaos control: theory and applications[M]. Berlin: Springer, 2003.

[15] Wang Z, Wu Y T, Li Y X, Zou Y J. Adaptive backstepping control of a nonlinear electromechanical system with unknown parameters[C]. NewYork: IEEE, 2009: 441–444.

[16] Mirus K A, Sprott J C. Controlling chaos in low- and high-dimensional systems with periodic parametric perturbations[J]. Physical Review E, 1999, 59(5): 5313–5324.

[17] Mirus K A, Sprott J C. Controlling chaos in a high dimensional systems with periodic parametric perturbations[J]. Physics Letters A, 1999, 254(5): 275–278.

[18] 方燕燕, 徐振源, 蔡朝洪. 混沌系统反馈控制的 Melnikov 分析 [J]. 无锡轻工大学学报, 2001, 20(6): 624–629.

[19] Wei Z C, Yang Q G. Controlling the diffusionless Lorenz equations with periodic parametric perturbation[J]. Comp. Math. Appl., 2009, 58(10): 1979–1987.

[20] Wu Z M, Xie J Y, Fang Y Y, Xu Z Y. Controlling chaos with periodic parametric perturbations in Lorenz system[J]. Chaos Solitons and Fractals, 2007, 32(1): 104–112.

[21] 惠小健, 王震, 孙卫. 周期参数扰动的 T 混沌系统同宿轨道分析 [J]. 物理学报, 2013, 62(13): 130507.

[22] 李继彬, 赵晓华, 刘正荣. 广义哈密顿系统理论及其应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2007.

[23] Wiggins S, Holmes P. Homiclinic orbits in slowly varying oscillators[J]. SIAM J. Math. Anal., 1987, 18(3): 612–629.

PERIODIC ORBITS ANALYSIS OF T CHAOTIC SYSTEM WITH PERIODIC PARAMETRIC PERTURBATION

WANG Zhen, XI Xiao-jian, SUN Wei, LI Yong-xin

(*Department of Applied Statistics and Science, Xijing University, Xi'an 710123, China*)

Abstract: A problem of detecting periodic orbits for the T chaotic system with periodic parametric perturbation is studied in this paper. By using subharmonic Melnikov method, the oscillating periodic orbits and rotating periodic orbits of a slowly varying oscillator with generalized Hamilton structure by periodic parametric perturbation are obtained.

Keywords: Hamilton system; subharmonic Melnikov methods; periodic orbits; periodic parametric perturbation

2010 MR Subject Classification: 34H10; 37D45