

单时滞类 Lorenz 系统的 Hopf 分岔分析

李德奎, 连玉平

(定西师范高等专科学校数学系, 甘肃 定西 743000)

摘要: 本文研究单时滞类 Lorenz 系统的稳定性问题. 利用规范型理论, 分析该系统在其零平衡点处的稳定性和发生 Hopf 分岔的条件, 并通过数值仿真验证所得结论的正确性. 本文的结论可以看做是对文献 [5] 研究成果的推广.

关键词: 单时滞; 类 Lorenz 系统; 稳定性; Hopf 分岔

MR(2010) 主题分类号: 34C23; 34C28 中图分类号: O175

文献标识码: A 文章编号: 0255-7797(2015)03-0635-08

1 引言

自 1963 年美国气象学家 Lorenz 提出第一个经典的 Lorenz 混沌系统以来, 大量的混沌系统相继被提出, 例如 Chen 系统^[1], Lü 系统^[2], Liu 系统^[3], Qi 系统^[4] 等. 近年来, 分岔问题的研究与应用已成为研究动力系统的一个重要课题, 其中 Hopf 分岔是一类非常重要的分岔, 在生物学、化学等众多科学领域中被广泛研究和应用. 所谓 Hopf 分岔就是指参数变化时, 系统在平衡点附近出现小振幅的周期解. 文献 [5] 中提出了一个新的类 Lorenz 系统, 并研究了它的分岔规律, 该系统的动力学方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x), \\ \dot{y} = bx - xz, \\ \dot{z} = -cz + dx^2, \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 x, y, z 为状态变量, a, b, c, d 为系统参数. 该系统含有六项, 其中仅有两个非线性项, 与其它的混沌或超混沌系统相比, 该系统的结构形式更加简单, 所以电路实现更加容易, 因此, 该系统在保密通信等领域具有潜在的应用价值.

当系统 (1.1) 的参数 $a = 10, b = 40, c = 2.5, d = 4$ 时, 系统处于混沌状态, 具有如图 1 所示的蝴蝶型吸引子, 其吸引子和 Lorenz 混沌系统的吸引子相似.

在通信系统中信号的传输会发生拥挤阻塞等现象; 在种群生态系统中, 捕食者在具有捕食能力之前大都需要一定的成熟时间. 因此, 时滞现象在通信和生态系统中是普遍存在的, 并得到了广大学者的研究, 取得了一些研究成果^[6-8].

基于以上考虑, 本文在类 Lorenz 系统 (1.1) 中, 将一个线性项变为时滞线性项, 得到一个泛函微分动力系统, 称为单时滞类 Lorenz 系统. 研究单时滞类 Lorenz 系统仅存在零平衡点

*收稿日期: 2013-04-03 接收日期: 2014-04-01

基金项目: 教育部科技研究重点项目资助 (212180); 甘肃省国际科技合作计划项目资助 (1104WCGA195); 2013 年定西师范高等专科学校青年项目资助 (1329).

作者简介: 李德奎 (1979-), 男, 甘肃通渭, 讲师, 研究方向: 混沌及复杂网络的同步与控制.

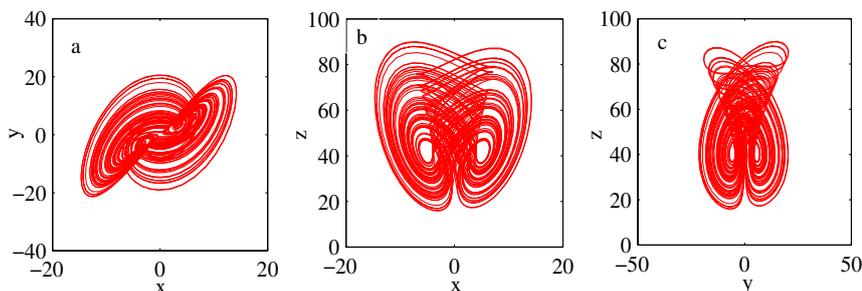


图 1: 系统 (1.1) 的混沌吸引子

的条件, 通过分析系统在零平衡点的线性化系统对应的特征方程根的分布情况, 得出系统在零平衡点的稳定性和发生 Hopf 分岔的条件. 最后给出一些数值模拟验证所得结论的正确性.

2 单时滞类 Lorenz 系统

单时滞类 Lorenz 系统的动力学方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x), \\ \dot{y} = bx(x - \tau) - xz, \\ \dot{z} = -cz + dx^2, \end{cases} \quad (2.1)$$

其中 x, y, z 为系统的状态变量; a, b, c, d 为系统参数; $\tau (> 0)$ 为时滞量.

系统 (2.1) 具有三个平衡点, 它们分别为

$$(0, 0, 0), \left(\frac{\sqrt{bcd}}{d}, \frac{\sqrt{bcd}}{d}, b\right), \left(-\frac{\sqrt{bcd}}{d}, -\frac{\sqrt{bcd}}{d}, b\right).$$

当系统 (2.1) 的参数 $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$ 时, 系统 (2.1) 有唯一的平衡点 $O(0, 0, 0)$. 下面考虑系统 (2.1) 当参数 $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$ 时, 平衡点 $O(0, 0, 0)$ 的稳定性问题.

3 平衡点的稳定性和 Hopf 分岔的存在性

在平衡点 $O(0, 0, 0)$ 处线性化系统 (2.1) 可得线性系统

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x), \\ \dot{y} = bx(x - \tau), \\ \dot{z} = -cz. \end{cases} \quad (3.1)$$

线性系统 (3.1) 对应的特征方程为

$$\begin{vmatrix} -a - \lambda & a & 0 \\ be^{-\lambda\tau} & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -c - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (3.2)$$

方程 (3.2) 可化为

$$\lambda^3 + p_1\lambda^2 + p_2\lambda + (q_1\lambda + q_2)e^{-\lambda\tau} = 0, \quad (3.3)$$

其中 $p_1 = a + c$, $p_2 = ac$, $q_1 = -ab$, $q_2 = -abc$.

引理 1 若 $\tau = 0$, 则系统 (2.1) 的平衡点 $O(0, 0, 0)$ 是局部渐近稳定的.

证 当 $\tau = 0$ 时, 方程 (3.3) 转化为

$$\lambda^3 + p_1\lambda^2 + (p_2 + q_1)\lambda + q_2 = 0. \quad (3.4)$$

因为参数 $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$, $d > 0$, 所以易知 $p_1 > 0$, $q_2 > 0$ 且有

$$p_1(p_2 + q_1) - q_2 = a^2c - a^2b + ac^2 > 0.$$

根据 Routh-Hurwitz 定理可知, 方程 (3.4) 的所有特征根都具有负实部. 所以当 $\tau = 0$ 时, 系统 (2.1) 的平衡点 $O(0, 0, 0)$ 是渐近稳定的.

当 $\tau > 0$ 时, 设 $\lambda = i\omega$ (ω 是大于零的待定常数) 是方程 (3.3) 的一个纯虚根, 则虚部 ω 满足

$$-i\omega^3 - p_1\omega^2 + i\omega p_2 + (i\omega q_1 + q_2)(\cos \omega\tau - i \sin \omega\tau) = 0. \quad (3.5)$$

根据复数相等可得

$$\begin{cases} q_2 \cos \omega\tau + q_1\omega \sin \omega\tau - p_1\omega^2 = 0, \\ q_1\omega \cos \omega\tau - q_2 \sin \omega\tau + p_2\omega - \omega^3 = 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

方程 (3.6) 可等价转化为

$$\omega^6 + (p_1^2 - 2p_2)\omega^4 + (p_2^2 - q_1^2)\omega^2 - q_2^2 = 0. \quad (3.7)$$

对于方程 (3.7) 有下列结论.

引理 2 方程 (3.7) 至少有一个正实根.

证 令 $u = \omega^2$, 则方程 (3.7) 可化为

$$u^3 + (p_1^2 - 2p_2)u^2 + (p_2^2 - q_1^2)u - q_2^2 = 0. \quad (3.8)$$

设

$$f(u) = u^3 + (p_1^2 - 2p_2)u^2 + (p_2^2 - q_1^2)u - q_2^2, \quad (3.9)$$

函数 (3.9) 可转化为

$$f(u) = \frac{1 + (p_1^2 - 2p_2)\frac{1}{u} + (p_2^2 - q_1^2)\frac{1}{u^2} - q_2^2\frac{1}{u^3}}{\frac{1}{u^3}}. \quad (3.10)$$

由 (3.9) 和 (3.10) 式易知

$$f(0) = -q_2^2 < 0, \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} f(u) = +\infty.$$

因此根据函数零点存在定理, 至少存在一个实数 $u_0 \in (0, +\infty)$, 使得 $f(u_0) = 0$. 所以方程 (3.8) 至少有一个正实根. 因为 $u = \omega^2$, 从而, 方程 (3.7) 至少有一个正实根.

设 ω_0 为方程 (3.7) 的一个正实根, 则方程 (3.3) 有一纯虚根 $i\omega_0$. 又由方程 (3.6) 可得

$$\cos \omega\tau = \frac{q_1\omega^4 + p_1q_2\omega^2 - p_2q_1\omega^2}{q_1^2\omega^2 + q_2^2}. \quad (3.11)$$

将 $\omega = \omega_0$ 代入方程 (3.11), 则时滞 τ 的值为

$$\tau_k = \frac{1}{\omega_0} \arccos\left(\frac{q_1\omega_0^4 + p_1q_2\omega_0^2 - p_2q_1\omega_0^2}{q_1^2\omega_0^2 + q_2^2}\right) + \frac{2k\pi}{\omega_0} \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.12)$$

因此 (ω_0, τ_k) 是方程 (3.3) 的解, 即当时滞 $\tau = \tau_k$ 时, $\lambda = \pm i\omega_0$ 是方程 (3.3) 的一对共轭的纯虚根.

设 $\tau_0 = \min\{\tau_k\}$, 则时滞 $\tau = \tau_0$ 是使得方程 (3.3) 出现纯虚根 $\lambda = \pm i\omega_0$ 时 τ 的最小值. 因此有下面的引理 3.

引理 3 如果 $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0, \tau = \tau_0$, 那么方程 (3.3) 有一对纯虚根 $\lambda = \pm i\omega_0$.

设方程 (3.3) 的特征根 $\lambda(\tau) = \alpha(\tau) + i\omega(\tau)$, 满足 $\alpha(\tau_k) = 0$ 和 $\omega(\tau_k) = \omega_0$. 下面给出横截性条件.

引理 4 如果 $f'(\omega_0^2) = 3\omega_0^4 + 2(p_1^2 - 2p)\omega_0^2 + p_2^2 - q_2^2 > 0$, 则 $\frac{d\operatorname{Re}\lambda(\tau)}{d\tau}|_{\tau=\tau_k} > 0$.

证 对方程 (3.3) 的两边关于 τ 求导, 可得

$$[3\lambda^2 + 2p_1\lambda + p_2 + q_1e^{-\lambda\tau} - \tau(q_1\lambda + q_2)e^{-\lambda\tau}]\frac{d\lambda}{d\tau} = \lambda(q_1\lambda + q_2)e^{-\lambda\tau}. \quad (3.13)$$

根据方程 (3.3) 可得

$$(q_1\lambda + q_2)e^{-\lambda\tau} = \lambda(\lambda^2 + p_1\lambda + p_2). \quad (3.14)$$

将 (3.14) 式代入 (3.13) 式可得

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} = -\frac{3\lambda^2 + 2p_1\lambda + p_2}{\lambda^2(\lambda^2 + p_1\lambda + p_2)} + \frac{q_1}{\lambda(q_1\lambda + q_2)} - \frac{\tau}{\lambda}. \quad (3.15)$$

因为 $\lambda(\tau_k) = i\omega_0$, 所以有

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left[\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1}\right]_{\tau=\tau_k} &= -\operatorname{Re}\left[\frac{3\lambda^2 + 2p_1\lambda + p_2}{\lambda^2(\lambda^2 + p_1\lambda + p_2)}\right]_{\tau=\tau_k} + \operatorname{Re}\left[\frac{q_1}{\lambda(q_1\lambda + q_2)}\right]_{\tau=\tau_k} \\ &= \operatorname{Re}\left[\frac{-3\omega_0^2 + 2ip_1\omega_0 + p_2}{\omega_0^2(-\omega_0^2 + ip_1\omega_0 + p_2)}\right] + \operatorname{Re}\left(\frac{q_1}{-q_1\omega_0^2 + iq_2\omega_0}\right) \\ &= \frac{(p_2 - 3\omega_0^2)(p_2 - \omega_0^2) + 2p_1^2\omega_0^2}{\omega_0^2[(p_2 - \omega_0^2)^2 + p_1^2\omega_0^2]} - \frac{q_1^2}{q_1^2\omega_0^2 + q_2^2}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

当 $\tau = \tau_k$ 时, 方程 (3.3) 有纯虚根 $i\omega_0$, 代入方程 (3.3) 得

$$-i\omega_0^3 - p_1\omega_0^2 + ip_2\omega_0 + (iq_1\omega_0 + q_2)e^{-i\omega_0\tau} = 0. \quad (3.17)$$

因为 $e^{-i\omega_0\tau} = \cos \omega_0\tau - i\sin \omega_0\tau$, 所以 $|e^{-i\omega_0\tau}| = 1$, 因此由 (3.17) 式可得

$$|-p_1\omega_0^2 + i(p_2\omega_0 - \omega_0^3)| = |q_2 + iq_1\omega_0|,$$

即

$$\omega_0^2[(p_2 - \omega_0^2)^2 + p_1^2\omega_0^2] = (q_1\omega_0)^2 + q_2^2. \quad (3.18)$$

根据 (3.16) 和 (3.18) 式可得

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left[\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1}\Big|_{\tau=\tau_k}\right] &= \frac{3\omega_0^4 + 2(p_1^2 - 2p_2)\omega_0^2 + p_2^2 - q_2^2}{q_1^2\omega_0^2 + q_2^2} \\ &= \frac{f'(\omega_0^2)}{q_1^2\omega_0^2 + q_2^2} > 0. \end{aligned}$$

因为 $\operatorname{sign}[\operatorname{Re}(\frac{d\lambda}{d\tau}|_{\tau=\tau_k})] = \operatorname{sign}\{\operatorname{Re}[(\frac{d\lambda}{d\tau})^{-1}|_{\tau=\tau_k}]\}$, 所以定理得证.

于是, 根据引理 4 和 Hopf 分岔理论可得到下列结论.

定理 如果 $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$ 且 $f'(\omega_0^2) > 0$, 那么

- (1) 当 $\tau \in [0, \tau_0]$ 时, 系统 (2.1) 的平衡点 $O(0, 0, 0)$ 是渐近稳定的;
- (2) 当 $\tau > \tau_0$ 时, 系统 (2.1) 的平衡点 $O(0, 0, 0)$ 是不稳定的;
- (3) 当 $\tau = \tau_k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) 时, 系统 (2.1) 在平衡点 $O(0, 0, 0)$ 处发生 Hopf 分岔, 产生极限环.

4 数值仿真

因为系统 (2.1) 的参数 $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$, 所以不妨取 $a = 10, b = -8, c = 2.5, d = 40$, 这时系统 (2.1) 可化为

$$\begin{cases} \dot{x} = 10y - 10x, \\ \dot{y} = -8x(x - \tau) - xz, \\ \dot{z} = -2.5z - 4x^2. \end{cases} \quad (4.1)$$

利用 Matlab 软件计算得方程 (3.7) 的正实根 $\omega_0 = 6.6588, f'(\omega_0^2) = 9.5452 \times 10^3 > 0$, 方程 (3.12) 中 $\tau_0 = 0.1477$. 因此, 定理可具体化为下面的推论.

推论 若 $a = 10, b = -8, c = 2.5, d = 4$, 则

- (1) 当 $\tau \in [0, 0.1477]$ 时, 系统 (4.1) 的平衡点 $O(0, 0, 0)$ 是渐近稳定的;
- (2) 当 $\tau > 0.1477$ 时, 系统 (4.1) 的平衡点 $O(0, 0, 0)$ 是不稳定的;
- (3) 当 $\tau = 0.1477 + 0.3004k\pi$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) 时, 系统 (4.1) 的平衡点 $O(0, 0, 0)$ 处发生 Hopf 分岔, 产生极限环.

下面利用 Matlab 软件, 绘出时滞 τ 取不同值时, 系统 (4.1) 的状态变量随时间 t 的轨线图 and 相图, 说明所得结论的正确性.

从图 2 可以看出, 当时滞 $\tau = 0.1404$ 时, 系统 (4.1) 的状态变量 x, y, z 的值随时间 t 的增大而趋于平衡点 $O(0, 0, 0)$, 所以系统 (4.1) 的平衡点 $O(0, 0, 0)$ 是渐近稳定的.

从图 3 可以看出, 当时滞 $\tau = 0.1477$ 时, 系统 (4.1) 的状态变量 x, y, z 的值随时间 t 的增大保持等周期震荡, 说明系统 (4.1) 在平衡点 $O(0, 0, 0)$ 处发生 Hopf 分岔.

从图 4 可以看出, 系统 (4.1) 的状态变量 x, y, z 的值随时间 t 的增大而逐渐远离平衡点, 说明当时滞 $\tau = 0.1490$ 时, 系统 (4.1) 的平衡点 $O(0, 0, 0)$ 是不稳定的.

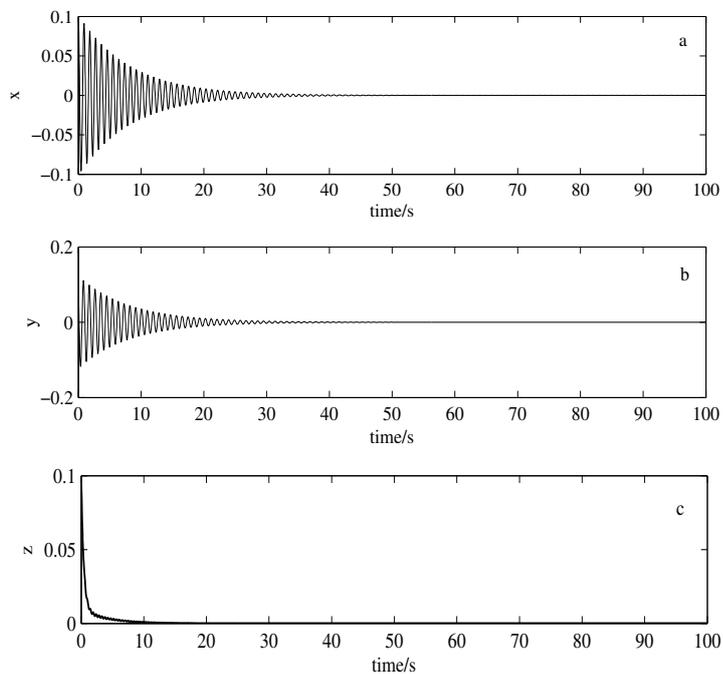


图 2: 时滞 $\tau = 0.1404$ 时, 系统 (4.1) 的状态变量 x, y, z 随时间 t 的轨线图

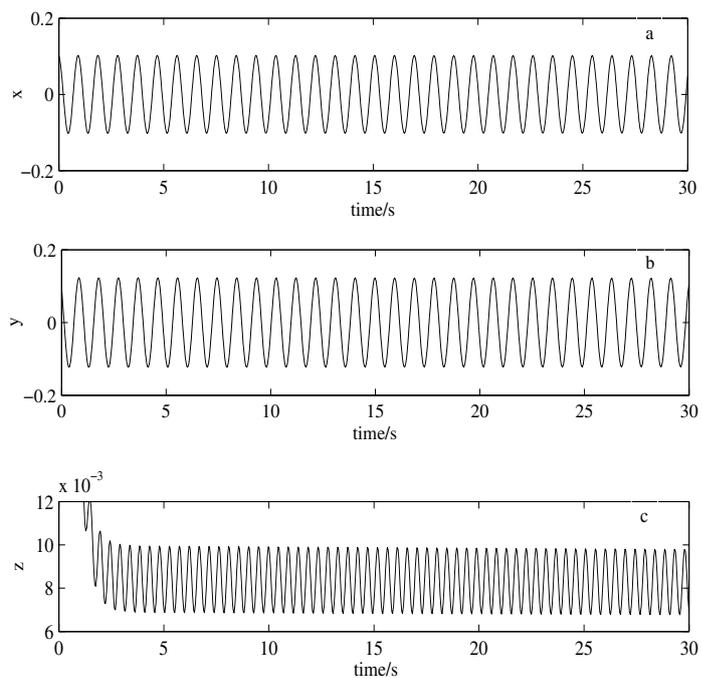


图 3: 时滞 $\tau = 0.1477$ 时, 系统 (4.1) 的状态变量 x, y, z 随时间 t 的轨线图

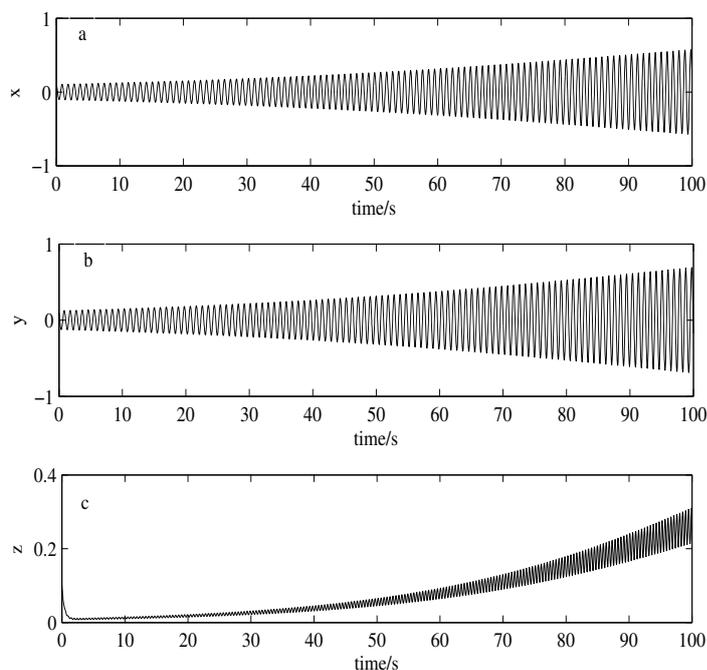


图 4: 时滞 $\tau = 0.1490$ 时, 系统 (4.1) 的状态变量 x, y, z 随时间 t 的轨线图

图 5 表示时滞 $\tau = 0.1400$ 时, 系统 (4.1) 在平衡点 $O(0, 0, 0)$ 是稳定的, 时滞 $\tau = 0.1477$ 时, 系统 (4.1) 在平衡点 $O(0, 0, 0)$ 处发生 Hopf 分岔, 在相平面上出现极限环, 时滞 $\tau = 0.1490$ 时, 系统 (4.1) 在平衡点 $O(0, 0, 0)$ 处是不稳定的.

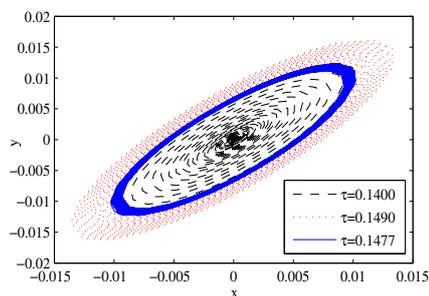


图 5: 时滞分别为 $\tau = 0.1400$, $\tau = 0.1477$ 和 $\tau = 0.1490$ 时, 系统 (4.1) 在 xoy 平面内的相图

5 结论

本文研究了单时滞类 Lorenz 系统在平衡点的稳定性和 Hopf 分岔的存在性问题, 通过分析系统在零平衡点处的线性化系统所对应的特征方程根的分布, 得出系统在零平衡点处稳定性条件和存在 Hopf 分岔的条件. 一些数值仿真验证所得结论的正确性. 本文研究的问题和结果可以看作是对文献 [5] 的研究成果的进一步拓展.

参 考 文 献

- [1] Guanrong C, Ueta T. Yet another chaotic attractor[J]. *Int. J. Bifur. Chaos*, 1999,9: 1465–1466.
- [2] Jinhu L, Guanrong C, Suochun Z. The compound structure of a new chaotic attractor[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, Volume 2002, 14(5): 669–672.
- [3] Chongxin L, Tao L, Ling L, Kai L. A new chaotic attractor[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2004, 22: 1031–1038.
- [4] Guoyuan Q, Guanrong C, Shengzhi D, Zengqiang C, Zhuzhi Y. Analysis of a new chaotic system[J]. *Physica A*, 2005, 352: 295–308.
- [5] Mello L F, Messias M, Braga D C. Bifurcation analysis of a new Lorenz-like chaotic system[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2008, 37: 1244–1255.
- [6] Yujie L, Daoxiang Z. Positive periodic solution of 5-species Lotka-volterra mixed system with variable time delays[J]. *J. Math.*, 2011, 31: 433–439.
- [7] Guodong Z, Yi S, Boshan C. Positive periodic solutions in a non-selective harvesting predator-prey model with multiple delays[J]. *J. Math. Anal. Appl.*, 2012, 395(1): 298–306.
- [8] Guodong Z, Lulu Z, Boshan C. Hopf bifurcation in a delayed differential-algebraic biological economic system[J]. *Nonlinear Analysis*, 2011, 12(3): 1708–1719.

HOPF BIFURCATION ANALYSIS OF THE LORENZ-LIKE SYSTEM WITH THE SINGLE TIME-DELAY

LI De-kui , LIAN Yu-ping

(*Department of Mathematics, Dingxi Normal College, Dingxi 743000, China*)

Abstract: The stability problem of the Lorenz-like system with the single time-delay is studied in this paper. We analyze the stability and Hopf bifurcation condition of the system at its zero balance by using the theory of the canonical form, and the correctness of the obtained conclusion is verified by numerical simulation, which extends the research achievements in literature [5].

Keywords: a single time-delay; Lorenz-like system; stability; Hopf bifurcation

2010 MR Subject Classification: 34C23; 34C28