

$W_4 \vee C_n$ 的交叉数

苏振华¹, 黄元秋²

(1. 怀化学院数学系, 湖南 怀化 418008)

(2. 湖南师范大学数学系, 湖南 长沙 410081)

摘要: 本文研究了五阶图与圈图的联图交叉数. 利用假设法和比较法等方法, 得到了 $W_4 \vee C_n$ 的交叉数为 $Z(5, n) + n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 4$, 并推广了联图交叉数的结果与方法.

关键词: 交叉数; 联图; 轮图; 画法

MR(2010) 主题分类号: 05C10; 05C38

中图分类号: O157.5

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2015)03-0608-07

1 引言

本文未说明的概念和术语均同文献 [1], 图 $G = (V(G), E(G))$ 是简单连通图. 两个点不相交的图 G 与 H 的联图, 用 $G \vee H$ 表示, 是在 G 与 H 的并图中, 把 G 的每个顶点与 H 的每个顶点连接起来所得到的图.

一个图 G 画在平面上, 若满足如下条件:

- (1) 任何两条相交的边最多交叉一次;
- (2) 边不能自身交叉;
- (3) 有相同端点的两条边不会交叉;
- (4) 没有三条边交叉于同一点.

则称此画法为 G 的一个好画法. 若图 G 的一个好画法用 D 表示, G 中所有边与边的交叉数称为在画法 D 下 G 的交叉数, 用 $cr_D(G)$ 表示. 图 G 的交叉数定义为 $cr(G) = \min_D \{cr_D(G)\}$. 若存在 G 的一个好画法 ϕ 满足 $cr_\phi(G) = cr(G)$, 则称 ϕ 为 G 的一个最优画法.

图的交叉数是图的一个重要参数, 研究图的交叉数不仅具有重要的理论意义, 而且具有较强的现实意义, 如生物工程 DNA 的图示等. 然而, 确定图的交叉数是一个 NP - 完全问题 [2]. 因其难度, 目前只知道一些特殊图类的交叉数, 如完全 2 部图 [3], 循环图 [4] 等. 关于完全二部图 $K_{m,n}$ 的交叉数, Kleitman [3] 得到了

$$cr(K_{m,n}) = Z(m, n) = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor, m \leq 6, m \leq n.$$

关于图 G 与圈图 C_n 联图的交叉数的研究, 2007 年唐玲 [5] 研究了 P_m 与 C_n , C_m 与 C_n 的联图交叉数, 2010 年 Klesc [6] 得到了一个特殊六阶图与圈 C_n 联图的交叉数, 2011 年王晶 [7] 和袁秀华 [8] 分别得到了 $S_m \vee C_n (m = 3, 4)$ 与 $K_{2,3} \vee C_n$ 的交叉数. 最近, Klesc [9] 给出

*收稿日期: 2012-10-23

接收日期: 2012-01-16

基金项目: 湖南省教育厅科研资助项目 (11C0981).

作者简介: 苏振华 (1982-), 男, 湖南常德, 讲师, 主要研究方向: 图的交叉数及图的亏格.

了两个特殊的五阶图与圈 C_n 的联图的交叉数. 本文继续对五阶图与圈图的联图交叉数进行研究. 在已知完全图 $K_{5,n}$ 与联图 $W_4 \vee P_n$ 的交叉数的基础上, 利用假设法和比较法等方法, 得到了 $cr(W_4 \vee C_n)$ 的交叉数为 $Z(5, n) + n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 4, n \geq 3$.

为了方便, 我们对 $W_4 \vee C_n$ 作如下标记: 设 $V(W_4) = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$, $V(C_n) = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, 用 W_4 表示 W_4 的边导出子图, T^i 表示 t_i 与顶点 $y_1, y_2, \dots, y_n$ 所连的边导出子图, $i = 1, 2, 3, 4, 5$. 则有 $W_4 \vee C_n = W_4 \cup (\bigcup_{i=1}^5 T^i) \cup C_n$.

2 相关性质与引理

首先我们解释有关记号. 设 D 是图 G 的一个好画法, 若 A 为 G 的边子集, 则 $cr_D(A)$ 表示在画法 D 下由 A 中的边与边产生交叉的个数. 若 $A = E(G)$, 则 $cr_D(A)$ 与 $cr_D(G)$ 可看作是等同的. 若 A, B 是图 G 的两个边子集, 则 $cr_D(A, B)$ 表示 A 的边集和 B 的边集在画法 D 下的交叉数. 显然, 当 $A = B$ 时, $cr_D(A, A) = cr_D(A)$. 由交叉数的定义及记号的意义, 易得到下面的性质:

性质 2.1 若 D 为图 G 的一个好画法, 且 A, B, C 为 G 的边互不相交的边子集, 则

$$(1) cr_D(A \cup B) = cr_D(A) + cr_D(B) + cr_D(A, B);$$

$$(2) cr_D(A \cup B, C) = cr_D(A, C) + cr_D(B, C).$$

性质 2.2 (1) 若 H 是 G 的子图, 则 $cr(H) \leq cr(G)$;

(2) 设 D 是 G 的一个好画法, 则 $cr(G) \leq cr_D(G)$;

(3) 设 H_1 与 H_2 均为 G 的子图, 且 $H_1 \subseteq H_2$, 则 $cr_D(H_1) \leq cr_D(H_2)$.

引理 2.3 [5] 若 D 为图 $G \vee C_n$ 的一个最优画法, 则 $cr_D(C_n) = 0$.

引理 2.4 [6] 设 D 为 $mK_1 \vee C_n$ 的一个好画法. 若 C_n 自身不交叉, 且 C_n 的边不与其他边相交, 则对任意两个不同的子图 T^i 与 T^j , 均有 $cr_D(T^i, T^j) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$.

引理 2.5 [10] $cr(W_4 \vee nK_1) = Z(5, n) + n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, n \geq 1$.

引理 2.6 [11] $cr(W_4 \vee P_n) = Z(5, n) + n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1, n \geq 2$.

3 主要结果

定理 3.1 $cr(W_4 \vee C_n) = Z(5, n) + n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 4, n \geq 3$.

证 首先构造 $W_4 \vee C_n$ 的一个好画法 (如图 1 所示), 通过计数可以得到 $cr(W_4 \vee C_n) \leq Z(5, n) + n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 4$.

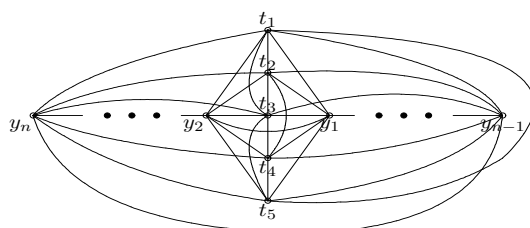


图 1: $W_4 \vee C_n$ 的一个好画法

下面证明对 $W_4 \vee C_n$ 的任意好画法 ϕ , 都有 $cr_\phi(W_4 \vee C_n) \geq Z(5, n) + n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 4$. 假设

存在 $W_4 \vee C_n$ 的一个最优画法 D , 使得

$$cr_D(W_4 \vee C_n) \leq Z(5, n) + n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 3. \quad (3.1)$$

由于 $W_4 \vee C_n = W_4 \cup (\bigcup_{i=1}^5 T^i) \cup C_n$, 且 $W_4 \cup \bigcup_{i=1}^5 T^i$ 同构于 $W_4 \vee nK_1$, 由引理 2.5 及性质 2.2 知 $cr_D(W_4 \vee nK_1) \geq cr(W_4 \vee nK_1) = Z(5, n) + n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. 由引理 2.3 知 $cr_D(C_n) = 0$, 因此结合性质 2.1, 有

$$\begin{aligned} cr_D(W_4 \vee C_n) &= cr_D(W_4 \vee nK_1) + cr_D(C_n, W_4 \cup \bigcup_{i=1}^5 T^i) + cr_D(C_n) \\ &\geq Z(5, n) + n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + cr_D(C_n, W_4 \cup \bigcup_{i=1}^5 T^i). \end{aligned} \quad (3.2)$$

首先若 $cr_D(C_n, W_4 \cup \bigcup_{i=1}^5 T^i) = 0$. 则 C_n 的边不与其他边交叉, 且 C_n 自身不交叉. 因此根据引理 2.4, 有 $cr_D(T^i, T^j) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$. 且连接 W_4 的各边, 则 W_4 至少与 $\bigcup_{i=1}^5 T^i$ 产生 $n + 4\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 个交叉. 因此, 有

$$\begin{aligned} cr_D(W_4 \vee C_n) &\geq cr_D(\bigcup_{i=1}^5 T^i) + \sum_{i=1}^5 cr_D(T^i, W_4) \\ &\geq C_5^2 \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + n + 4\lfloor \frac{n}{2} \rfloor > Z(5, n) + n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 3, \end{aligned}$$

与假设矛盾.

其次, 若 $cr_D(C_n, W_4 \cup \bigcup_{i=1}^5 T^i) = 1$. 因为 W_4 为 3 - 连通图 (则 $cr_D(C_n, W_4) \geq 3$), 所以只可能是 $cr_D(C_n, \bigcup_{i=1}^5 T^i) = 1$. 删除 C_n 中的与 $\bigcup_{i=1}^5 T^i$ 相交叉的那条边, 则得到的图同胚于 $W_4 \vee P_n$, 且此时有 $cr_D(W_4 \vee P_n) \leq Z(5, n) + n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. 显然与引理 2.6 矛盾.

因此根据上述情况及式 (3.1) 与式 (3.2), 只可能有 $2 \leq cr_D(C_n, W_4 \cup \bigcup_{i=1}^5 T^i) \leq 3$. 下面我们分两种情况进行讨论:

情况 1 $cr_D(C_n, W_4 \cup \bigcup_{i=1}^5 T^i) = 2$.

因为 W_4 为 3 - 连通图 ($cr_D(C_n, W_4) \geq 3$), 所以只可能是 $cr_D(C_n, \bigcup_{i=1}^5 T^i) = 2$. 下面分两种子情况讨论:

情况 1.1 存在一点, 不妨设为 t_5 , 满足 $cr_D(C_n, T^5) = 2$. 根据已知条件, $t_i (1 \leq i \leq 5)$ 均位于 C_n 的同一区域, 不妨设为 C_n 的外部区域, 且从 t_i 的区域向左、向右分别将点标记为点 y_k 和 y'_k . $T^i (i \in \{1, 2, 3, 4\})$ 将外部区域分成 n 个子区域, T^5 至少与 T^i 产生

$$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor - (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1) - (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1) = \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor$$

个交叉 (如图 2(a) 所示). 对 $1 \leq i < j \leq 4$, 根据引理 2.4 有 $cr_D(T^i, T^j) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$. 连接 W_4 的各边, 则 W_4 至少与 $\bigcup_{i=1}^5 T^i$ 产生 $n + 4\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 个交叉. 因此结合性质 2.1 有

$$\begin{aligned} cr_D(W_4 \vee C_n) &\geq cr_D(\bigcup_{i=1}^5 T^i) + cr_D(C_n, T^5) + \sum_{i=1}^5 cr_D(T^i, W_4) \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq 4} cr_D(T^i, T^j) + \sum_{1 \leq i < j \leq 4} cr_D(T^i, T^5) + cr_D(C_n, T^5) + \sum_{i=1}^5 cr_D(T^i, W_4) \\ &\geq C_4^2 \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 4 \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor + 2 + n + 4 \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \\ &> Z(5, n) + n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 3, \end{aligned}$$

与假设矛盾.

情况 1.2 存在两点, 不妨设为 t_4, t_5 , 满足 $cr_D(C_n, T^4) = 1, cr_D(C_n, T^5) = 1$. 设 $t_i (1 \leq i \leq 5)$ 均位于 C_n 的外部区域, 且 y_k 和 y_k 向左、向右标记与情形 1.1 相同, 如图 2(b) 所示. 对 T^i 与 T^j 的交叉数的计算分为如下 3 种情形考虑:

- (1) 当 $cr_D(C_n, T^i) = 0, cr_D(C_n, T^j) = 0$ 时, $cr_D(T^i, T^j) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$.
- (2) 当 $cr_D(C_n, T^i) = 0, cr_D(C_n, T^j) = 1$ 时, $cr_D(T^i, T^j) \geq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor$.
- (3) 当 $cr_D(C_n, T^4) = 1, cr_D(C_n, T^5) = 1$ 时, $cr_D(T^4, T^5) \geq \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor$.

同理, 连接 W_4 的各边, 则 W_4 至少与 $\bigcup_{i=1}^5 T^i$ 产生 $n + 4\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 个交叉. 因此有

$$\begin{aligned} cr_D(W_4 \vee C_n) &\geq cr_D(\bigcup_{i=1}^5 T^i) + cr_D(C_n, T^4) + cr_D(C_n, T^5) + \sum_{i=1}^5 cr_D(T^i, W_4) \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq 3} cr_D(T^i, T^j) + \sum_{i=1}^3 cr_D(T^i, T^4) + \sum_{i=1}^3 cr_D(T^i, T^5) \\ &\quad + cr_D(T^4, T^5) + cr_D(C_n, T^4) + cr_D(C_n, T^5) + \sum_{i=1}^5 cr_D(T^i, W_4) \\ &\geq C_3^2 \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + C_4^2 \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor + 2 + n + 4 \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \\ &> Z(5, n) + n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 3, \end{aligned}$$

与假设矛盾.

情况 2 $cr_D(C_n, W_4 \cup \bigcup_{i=1}^5 T^i) = 3$.

因为 W_4 为 3 - 连通图 ($cr_D(C_n, W_4) \geq 3$), 所以只可能是 $cr_D(C_n, \bigcup_{i=1}^5 T^i) = 3$ 或 $cr_D(C_n, W_4) = 3$. 下面分四种子情况讨论:

情况 2.1 存在一点, 不妨设为 t_5 , 满足 $cr_D(C_n, T^5) = 3$. 如图 3(a) 所示. 则对 $1 \leq i < j \leq 4$, $cr_D(T^i, T^j) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$. 当 T^i 将外部区域分成 n 个子区域, T^5 至少与 T^i 产

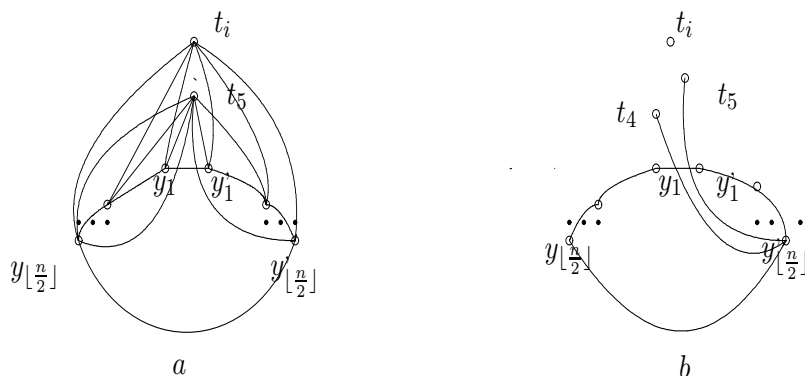


图 2: $cr_D(C_n, \bigcup_{i=1}^5 T^i) = 2$ 时, T^i 与 T^j 的交叉数

生 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor - (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1) - (\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1) - (\lceil \frac{n}{2} \rceil - 2) = \lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-4}{2} \rfloor$ 个交叉. 同理, W_4 至少与 $\bigcup_{i=1}^5 T^i$ 产生 $n + 4\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 个交叉. 因此有

$$\begin{aligned}
 cr_D(W_4 \vee C_n) &\geq cr_D(\bigcup_{i=1}^5 T^i) + cr_D(C_n, T^5) + \sum_{i=1}^5 cr_D(T^i, W_4) \\
 &= \sum_{1 \leq i < j \leq 4} cr_D(T^i, T^j) + \sum_{i=1}^4 cr_D(T^i, T^5) + cr_D(C_n, T^5) + \sum_{i=1}^5 cr_D(T^i, W_4) \\
 &\geq C_4^2 \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 4 \lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-4}{2} \rfloor + 3 + n + 4\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \\
 &> Z(5, n) + n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 3,
 \end{aligned}$$

与假设矛盾.

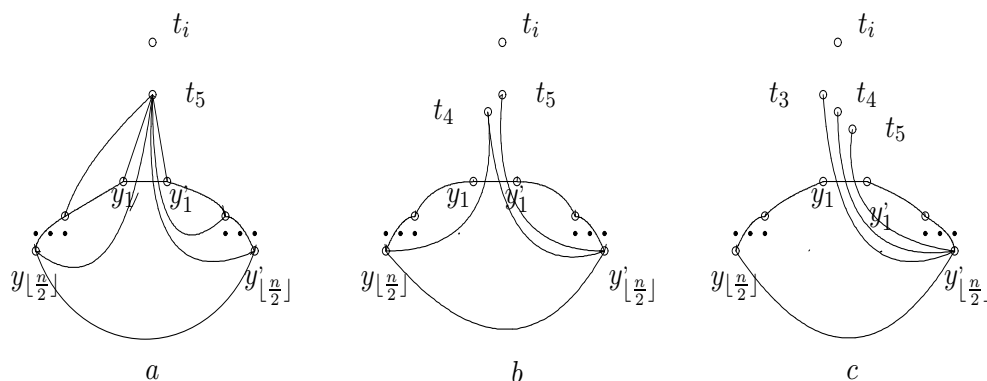


图 3: $cr_D(C_n, \bigcup_{i=1}^5 T^i) = 3$ 时, T^i 与 T^j 的交叉数

情况 2.2 存在两点, 不妨设为 t_4, t_5 , 满足 $cr_D(C_n, T^4) = 1, cr_D(C_n, T^5) = 2$. 如图 3(b) 所示. 对 $1 \leq i < j \leq 3$, 有 $cr_D(T^i, T^j) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$. 当 T^i 将外部区域分成的 n 个子区域, T^4 至少与 T^i 产生 $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor$ 个交叉, T^5 至少与 T^i 产生 $\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor$ 个交叉, $i = 1, 2, 3$.

T^4 至少与 T^5 产生 $\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-4}{2} \rfloor$ 个交叉. 同理, W_4 至少与 $\bigcup_{i=1}^5 T^i$ 产生 $n + 4 \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 个交叉. 因此, 有

$$\begin{aligned} cr_D(W_4 \vee C_n) &\geq cr_D\left(\bigcup_{i=1}^5 T^i\right) + cr_D(C_n, T^4) + cr_D(C_n, T^5) + \sum_{i=1}^5 cr_D(T^i, W_4) \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq 3} cr_D(T^i, T^j) + \sum_{i=1}^3 cr_D(T^i, T^4) + \sum_{i=1}^3 cr_D(T^i, T^5) \\ &\quad + cr_D(C_n, T^4) + cr_D(C_n, T^5) + \sum_{i=1}^5 cr_D(T^i, W_4) \\ &\geq C_3^2 \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 3 \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor + 3 \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor \\ &\quad + \lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-4}{2} \rfloor + 3 + n + 4 \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \\ &> Z(5, n) + n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 3, \end{aligned}$$

与假设矛盾.

情况 2.3 存在三点, 不妨设为 t_3, t_4, t_5 , 满足 $cr_D(C_n, T^3) = 1$, $cr_D(C_n, T^4) = 1$, $cr_D(C_n, T^5) = 1$. 如图 3(c) 所示. 对 T^1 与 T^2 , 有 $cr_D(T^1, T^2) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$; 且 $T^i (i = 1, 2)$ 与 T^3, T^4, T^5 分别产生至少 $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor$ 个交叉; T^3, T^4, T^5 之间两两产生至少 $\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor$ 个交叉. 同理, W_4 至少与 $\bigcup_{i=1}^5 T^i$ 产生 $n + 4 \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 个交叉. 因此有

$$\begin{aligned} cr_D(W_4 \vee C_n) &\geq cr_D\left(\bigcup_{i=1}^5 T^i\right) + cr_D\left(C_n, \bigcup_{i=3}^5 T^i\right) + \sum_{i=1}^5 cr_D(T^i, W_4) \\ &= cr_D(T^1, T^2) + \sum_{3 \leq i \leq 5} cr_D(T^1, T^i) + \sum_{3 \leq i \leq 5} cr_D(T^2, T^i) \\ &\quad + \sum_{3 \leq i < j \leq 5} cr_D(T^i, T^j) + \sum_{3 \leq i \leq 5} cr_D(C_n, T^i) + \sum_{i=1}^5 cr_D(T^i, W_4) \\ &\geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 6 \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor + 3 \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor + 3 + n + 4 \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \\ &> Z(5, n) + n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 3, \end{aligned}$$

与假设矛盾.

情况 2.4 $cr_D(C_n, W_4) = 3$. C_n 将平面分成内外两个区域, 因为 W_4 为 3-连通图, 所以 W_4 的 1 个顶点 (不妨设为 t_5) 位于 C_n 的内部区域, 另外 4 个顶点位于外部区域. 则对 $1 \leq i < j \leq 4$, $cr_D(T^i, T^j) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$. W_4 与 $\bigcup_{i=1}^5 T^i$ 至少产生 n 个交叉. 因此有

$$\begin{aligned} cr_D(W_4 \vee C_n) &\geq cr_D\left(\bigcup_{i=1}^4 T^i\right) + \sum_{i=1}^5 cr_D(T^i, W_4) + cr_D(C_n, W_4) \\ &\geq C_4^2 \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + n + 3 > Z(5, n) + n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 3, \end{aligned}$$

与假设矛盾.

由以上可得, $cr_D(W_4 \vee C_n) \geq Z(5, n) + n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 4$. 且由图 1 可以找到一个好画法 φ , 使得 $cr_\varphi(W_4 \vee C_n) = Z(5, n) + n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 4$. 因此, 必有 $cr(W_4 \vee C_n) = Z(5, n) + n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 4$. 定理得证.

若 Zarankiewicz 猜想对于 $m \geq 6$ 均成立, 则对于 $W_m \vee C_n$, 我们有如下猜想

猜想 3.2 $cr(W_m \vee C_n) = Z(m+1, n) + n + [2(m-4)+1]\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lceil \frac{m}{2} \rceil + 2, m \geq 5, n \geq 3$.

参 考 文 献

- [1] Bondy J A, Murty U S R. Graph theory with applications[M]. New York: Macmillan London and Elsevier, 1976.
- [2] Garey M R, Johnson D S. Crossing number is NP-complete[J]. SIAM J. Algebraic Discrete Methods, 1983, 4(3): 312–316.
- [3] Kleitman D J. The crossing number of $K_{5,n}$ [J]. J. Combinatorics Theory, 1970, 9: 315–323.
- [4] Yang Yuansheng, Lin Xiaohui. The crossing number of $C(n; \{1, 3\})$ [J]. Discrete Math., 2004, 289: 107–118.
- [5] Tang Ling, Wang Jing, Huang Yuanqiu. The crossing number of the join of C_m and P_n [J]. International Journal of Mathematical Combinatorics, 2007, 1: 110–116.
- [6] Klesc M. The crossing numbers of join of the special graph on six vertices with path and cycle [J]. Discrete Mathematics, 2010, 310: 1475–1481.
- [7] 王晶, 黄元秋. $S_m \vee P_n$ 与 $S_m \vee C_n$ 的交叉数 [J]. 数学进展, 2011, 40(5): 631–636.
- [8] 袁秀华. $K_{2,3} \vee C_n$ 的交叉数 [J]. 华东师范大学学报 (自然科学版), 2011, 2011(5): 21–24.
- [9] Klesc M, Schrotter S. The crossing numbers of paths and cycles with two graphs of order five [R]. Lecture Notes in Computer Science, 2012, 7125(2012): 160–167.
- [10] 贺佩玲, 黄元秋. $W_4 \times S_n$ 的交叉数 [J]. 郑州大学学报 (理学版), 2007, 39(4): 14–21.
- [11] 苏振华, 黄元秋. $W_m \vee P_n$ 的交叉数 [J]. 数学研究, 2012, 45(3): 310–314.

THE CROSSING NUMBER OF $W_4 \vee C_n$

SU Zhen-hua¹, HUANG Yuan-qiu²

(1. Department of Mathematics, Huaihua University, Huaihua 418008, China)

(2. Department of Mathematics, Hunan Normal University, Changsha 410081, China)

Abstract: In the paper, we study the crossing numbers of the join graph of order five with cycle. Based on the hypothesis and comparison, we get the results of the crossing number of $W_4 \vee C_n$ is $Z(5, n) + n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 4$, which extends the results and methods of the crossing numbers of the join graph.

Keywords: crossing number; join graph; wheel; drawing.

2010 MR Subject Classification: 05C10; 05C38