

一类 Riccati 矩阵方程广义自反解的双迭代算法

张凯院, 王 娇

(西北工业大学应用数学系, 陕西 西安 710072)

摘要: 本文研究了一类 Riccati 矩阵方程广义自反解的数值计算问题. 利用牛顿算法将 Riccati 矩阵方程的广义自反解问题转化为线性矩阵方程的广义自反解或者广义自反最小二乘解问题, 再利用修正共轭梯度法计算后一问题, 获得了求 Riccati 矩阵方程的广义自反解的双迭代算法. 拓宽了求解非线性矩阵方程的迭代算法. 数值算例表明双迭代算法是有效的.

关键词: Riccati 矩阵方程; 广义自反解; 牛顿算法; 修正共轭梯度法; 双迭代算法

MR(2010) 主题分类号: 65F10

中图分类号: O241.7

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2015)02-0469-08

1 引言

用 $R^{m \times n}$ 表示 $m \times n$ 实矩阵集合, $A \otimes B$ 表示矩阵 A 与 B 的 Kronecker 积, $\overline{\text{vec}}(A)$ 表示将矩阵 A 按行拉直构成的列向量. 定义同阶矩阵 A 与 B 的内积为 $[A, B] = \text{tr}(A^T B)$, 由此导出矩阵的 Frobenius 范数 $\|A\| = \sqrt{[A, A]}$. 设 $P_i \in R^{n \times n}$ 为对称正交矩阵, 若 $X \in R^{n \times n}$ 满足 $P_1 X P_2 = X$, 则称 X 为关于 P_1, P_2 的广义自反矩阵, 记关于 P_1, P_2 的广义自反矩阵集合为 $\Omega(P_1, P_2)$. 特别地, 当 $P_1 = P_2$ 时, 相应的广义自反矩阵是通常的自反矩阵; 当 $P_1 = P_2$ 为次单位矩阵时, 相应的广义自反矩阵是中心对称矩阵; 当 $P_1 = P_2$ 为单位矩阵时, 相应的广义自反矩阵是一般矩阵.

考虑 Riccati 矩阵方程

$$AXB + CX^T D + \gamma(X) = E_5, \quad (1)$$

其中 $A, B, C, D, E_i, X \in R^{n \times n}$,

$$\gamma(X) = XE_1X + XE_2X^T + X^TE_3X + X^TE_4X^T.$$

当 $E_1 = \cdots = E_4 = O$ 时, 方程 (1) 是线性矩阵方程, 这类方程在 Hamilton 力学系统研究和自动控制理论中有重要应用^[1-2]. 当 $E_1 = E_3 = E_4 = O$ 时, 方程 (1) 是一类特殊的 Riccati 矩阵方程, 这类 Riccati 矩阵方程在带有测量误差的状态协方差配置问题等工程领域有广泛应用^[3].

目前, 中外学者对一些非线性矩阵方程的求解问题进行了许多研究, 并建立了多种不同的算法. 例如, Dehghan 等^[4]在求解广义 Sylvester 矩阵方程组的应用中, 提出了基于牛顿算

*收稿日期: 2012-09-03

接收日期: 2012-11-18

基金项目: 国家自然科学基金 (11071196).

作者简介: 张凯院 (1956-), 男, 陕西西安, 教授, 主要研究方向: 计算数学.

通讯作者: 王娇.

法求二次矩阵方程特殊解的迭代算法; Long 等^[5]建立了求解二次矩阵方程的改进牛顿算法, 并给出了算法的收敛性结论. 迄今为止, 关于方程 (1) 的广义自反解的迭代算法研究成果尚未见到. 本文运用牛顿算法求方程 (1) 的广义自反解, 并采用修正共轭梯度法 (MCG 算法)^[6-9]求导出的线性矩阵方程 (LME) 的广义自反解或者广义自反最小二乘解 (Ls 解), 建立求方程 (1) 的广义自反解的双迭代算法.

2 求方程 (1) 广义自反解的牛顿算法

为了书写简洁, 引进记号:

$$\begin{aligned}\psi(X) &= AXB + CX^T D + \gamma(X) - E_5, \\ \phi_X(Y) &= AYB + CY^T D + (XE_1 + X^T E_3)Y + Y(E_1X + E_2X^T) \\ &\quad + (XE_2 + X^T E_4)Y^T + Y^T(E_3X + E_4X^T),\end{aligned}$$

容易导出

$$\psi(X + Y) = \psi(X) + \phi_X(Y) + \gamma(Y), \quad (2)$$

这里 $\phi_X(Y)$ 是 $\psi(X)$ 在“点” X 沿着“方向” Y 的导数^[5].

引理 1 设 $X \in \Omega(P_1, P_2)$ 是方程 (1) 的近似解, 那么求方程 (1) 的广义自反解等价于求校正值 $Y \in \Omega(P_1, P_2)$ 使得 $\psi(X + Y) = O$, 并可线性化为求 $Y \in \Omega(P_1, P_2)$ 使得

$$\phi_X(Y) = -\psi(X). \quad (3)$$

证 已知方程 (1) 的近似解 $X \in \Omega(P_1, P_2)$ 时, 令 $X^* = X + Y$, 那么求方程 (1) 的解 $X^* \in \Omega(P_1, P_2)$, 等价于求校正值 $Y \in \Omega(P_1, P_2)$ 使得 $\psi(X + Y) = O$. 该式是关于未知矩阵 Y 的二次矩阵方程, 根据牛顿算法的基本原理, 当 Y 的范数较小时, 舍去式 (2) 等号右端关于 Y 的二次项 $\gamma(Y)$, 即用线性部分近似可得

$$\psi(X + Y) \approx \psi(X) + \phi_X(Y).$$

于是求方程 (1) 的解 $X^* \in \Omega(P_1, P_2)$, 可近似的转化为求关于 Y 的线性矩阵方程 $\psi(X) + \phi_X(Y) = O$ 的解 $Y \in \Omega(P_1, P_2)$, 即求 $Y \in \Omega(P_1, P_2)$ 使得 $\phi_X(Y) = -\psi(X)$.

借鉴文献 [4-5] 的算法原理, 通过修改有关矩阵的类型, 建立求方程 (1) 广义自反解的牛顿算法如下.

第 1 步 给定初始矩阵 $X^{(1)} \in \Omega(P_1, P_2)$, 置 $k := 1$;

第 2 步 如果 $\psi(X^{(k)}) = O$, 停止; 否则, 求 $Y^{(k)} \in \Omega(P_1, P_2)$, 使得

$$\phi_{X^{(k)}}(Y^{(k)}) = -\psi(X^{(k)});$$

第 3 步 计算 $X^{(k+1)} = X^{(k)} + Y^{(k)}$, 置 $k := k + 1$, 转第 2 步.

对于牛顿算法有以下的收敛性结论^[5]: 假设 $X^* \in R^{n \times n}$ 是方程 (1) 的单根, 且初始矩阵 $X^{(1)}$ 充分接近于 X^* , 那么由牛顿算法确定的矩阵序列 $\{X^{(k)}\}$ 二次收敛于 X^* .

3 求 LME(3) 广义自反解与广义自反 Ls 解的 MCG 算法

下面建立求 LME(3) 广义自反解与广义自反 Ls 解的 MCG 算法. 考虑 LME(3) 的一般形式 $(A_i, B_i, C_i, D_i, F, Y \in R^{n \times n})$,

$$\sum_{i=1}^3 (A_i Y B_i + C_i Y^T D_i) = F. \quad (4)$$

问题 I LME(4) 有广义自反解时, 求 $Y \in \Omega(P_1, P_2)$, 使满足 LME(4).

问题 II LME(4) 无广义自反解时, 求 $Y \in \Omega(P_1, P_2)$, 使得

$$\left\| \sum_{i=1}^3 (A_i Y B_i + C_i Y^T D_i) - F \right\| = \min. \quad (5)$$

若 LME(4) 有广义自反解, 称问题 I 相容; 否则, 称问题 I 不相容.

3.1 求解问题 I 的 MCG 算法

记 $w(Y) = \sum_{i=1}^3 (A_i Y B_i + C_i Y^T D_i)$, 那么 LME(4) 的正规矩阵方程 (指将 LME(4) 按行拉直的线性代数方程组的正规方程组的矩阵形式) 为

$$\sum_{i=1}^3 (A_i^T w(Y) B_i^T + D_i (w(Y))^T C_i) = \sum_{i=1}^3 (A_i^T F B_i^T + D_i F^T C_i). \quad (6)$$

记 LME(4) 和 LME(6) 在 $Y = Y^{(k)}$ 处的残量依次为

$$R_k = F - w(Y^{(k)}), \quad \tilde{R}_k = \sum_{i=1}^3 (A_i^T R_k B_i^T + D_i R_k^T C_i).$$

借鉴文献 [7-9] 的基本原理, 通过修改有关矩阵的类型或者算法, 建立求解问题 I 的 MCG 算法 (算法 1) 如下.

第 1 步 给定初始矩阵 $Y^{(1)} \in \Omega(P_1, P_2)$, 置 $k := 1$, 计算

$$R_k = F - w(Y^{(k)}), \quad \tilde{R}_k = \sum_{i=1}^3 (A_i^T R_k B_i^T + D_i R_k^T C_i), \quad Z_k = \frac{1}{2}(\tilde{R}_k + P_1 \tilde{R}_k P_2);$$

第 2 步 若 $R_k = O$, 或者 $R_k \neq O$ 而 $Z_k = O$, 停止; 否则, 计算

$$\alpha_k = \frac{\|R_k\|^2}{\|Z_k\|^2}, \quad Y^{(k+1)} = Y^{(k)} + \alpha_k Z_k;$$

第 3 步 计算

$$R_{k+1} = F - w(Y^{(k+1)}), \quad \tilde{R}_{k+1} = \sum_{i=1}^3 (A_i^T R_{k+1} B_i^T + D_i R_{k+1}^T C_i),$$

$$\beta_{k+1} = -\frac{[\tilde{R}_{k+1}, Z_k]}{\|Z_k\|^2}, \quad Z_{k+1} = \frac{1}{2}(\tilde{R}_{k+1} + P_1 \tilde{R}_{k+1} P_2) + \beta_{k+1} Z_k;$$

第 4 步 置 $k := k + 1$, 转第 2 步.

可以验证, 算法 1 中的矩阵满足 $Y^{(k)}, Z_k \in \Omega(P_1, P_2)$. 对于算法 1 有以下收敛性定理 (证明过程类似文献 [7-8]).

定理 1 设问题 I 相容, 则对任意初始矩阵 $Y^{(1)} \in \Omega(P_1, P_2)$, 算法 1 可在有限步迭代计算后得到问题 I 的一个解; 若取初始矩阵满足

$$Y^{(1)} = \sum_{i=1}^3 (A_i^T H B_i^T + D_i H^T C_i) + P_1 \left(\sum_{i=1}^3 (A_i^T H B_i^T + D_i H^T C_i) \right) P_2,$$

其中任意 $H \in R^{n \times n}$, 则算法 1 可在有限步计算后得到问题 I 的唯一极小范数解, 即 LME(4) 的唯一极小范数广义自反解.

定理 2 问题 I 不相容的充要条件是存在正整数 k , 使得由算法 1 得到的 $R_k \neq O$, 而 $Z_k = O$.

3.2 求解问题 II 的 MCG 算法

根据定理 2, 在算法 1 中, 当 $R_k \neq O$ 而 $Z_k = O$ 时, 算法 1 中断. 这表明 LME(4) 没有广义自反解. 因此, 需要求解问题 II, 即求 LME(4) 的广义自反 Ls 解.

引理 2 ^[10] 设 $X \in R^{n \times n}$, 则存在 n^2 阶对称置换矩阵 $T_{n,n}$, 使 $\overline{\text{vec}}(X^T) = T_{n,n} \overline{\text{vec}}(X)$.

下面通过构造等价的 LME, 将求 LME(4) 的广义自反 Ls 解问题, 转化为求等价的 LME 的广义自反解问题. 然后参照算法 1, 建立求 LME(4) 的广义自反 Ls 解的迭代算法. 约定矩阵的乘积运算优先于矩阵的 Kronecker 积运算, 引进记号:

$$\begin{aligned} y &= \overline{\text{vec}}(Y), \quad f = \overline{\text{vec}}(F), \quad \tilde{f} = [f^T, f^T]^T, \\ N &= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^3 (A_i \otimes B_i^T + (C_i \otimes D_i^T) T_{n,n}) \\ \sum_{i=1}^3 (A_i P_1 \otimes B_i^T P_2 + (C_i P_2 \otimes D_i^T P_1) T_{n,n}) \end{bmatrix}, \\ M_i &= A_i^T w(Y) B_i^T + D_i (w(Y))^T C_i, \quad Q_i = A_i^T F B_i^T + D_i F^T C_i, \\ \widetilde{M}_i &= A_i^T w(P_1 Y P_2) B_i^T + D_i (w(P_1 Y P_2))^T C_i \quad (i = 1, 2, 3), \\ g(Y) &= \sum_{i=1}^3 (M_i + P_1 \widetilde{M}_i P_2), \quad Q = \sum_{i=1}^3 (Q_i + P_1 Q_i P_2). \end{aligned}$$

定理 3 求解问题 II 等价于求 LME

$$g(Y) = Q \tag{7}$$

的广义自反解, 且 LME(7) 一定有广义自反解.

证 当 $Y \in \Omega(P_1, P_2)$ 时, $P_1 Y P_2 = Y$. 因此, 求解问题 II 等价于求 $Y \in \Omega(P_1, P_2)$, 使得

$$\left\| \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^3 (A_i Y B_i + C_i Y^T D_i) \\ \sum_{i=1}^3 (A_i (P_1 Y P_2) B_i + C_i (P_1 Y P_2)^T D_i) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F \\ F \end{bmatrix} \right\| = \min. \tag{8}$$

下面证明求解极小值问题 (8) 等价于求解 LME(7). 将矩阵方程组

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^3 (A_i Y B_i + C_i Y^T D_i) = F, \\ \sum_{i=1}^3 (A_i (P_1 Y P_2) B_i + C_i (P_1 Y P_2)^T D_i) = F \end{cases} \quad (9)$$

按行拉直可得线性代数方程组 $Ny = \tilde{f}$, 求其 Ls 解等价于求 LMEs(9) 的 Ls 解, 即求极小值问题 (8) 的解. 方程组 $Ny = \tilde{f}$ 的正规方程组为 $N^T Ny = N^T \tilde{f}$, 将其还原为矩阵方程就是 LME(7). 因为求方程组 $Ny = \tilde{f}$ 的 Ls 解等价于求其正规方程组的解, 所以求解问题 II 等价于求 LME(7) 的广义自反解.

因为正规方程组 $N^T Ny = N^T \tilde{f}$ 有解, 所以 LME(7) 有解. 设 $\tilde{Y}$ 是 LME(7) 的一个解 (未必是广义自反解), 那么 $g(\tilde{Y}) = Q$. 令 $Y^* = \frac{1}{2}(\tilde{Y} + P_1 \tilde{Y} P_2)$, 则 $Y^* \in \Omega(P_1, P_2)$, 且有 $g(Y^*) = Q$, 即 LME(7) 有广义自反解.

参照算法 1 及文献 [6], 建立求 LME(7) 的广义自反解, 即求解问题 II 的 MCG 算法 (算法 2) 如下.

第 1 步 给定初始矩阵 $Y^{(1)} \in \Omega(P_1, P_2)$, 置 $k := 1$, 计算

$$R_k = Q - g(Y^{(k)}), \quad \tilde{R}_k = g(R_k), \quad Z_k = \tilde{R}_k;$$

第 2 步 若 $R_k = O$, 停止; 否则, 计算

$$\alpha_k = \frac{\|R_k\|^2}{\|Z_k\|^2}, \quad Y^{(k+1)} = Y^{(k)} + \alpha_k Z_k;$$

第 3 步 计算

$$\begin{aligned} R_{k+1} &= Q - g(Y^{(k+1)}), \quad \tilde{R}_{k+1} = g(R_{k+1}), \\ \beta_{k+1} &= -\frac{[\tilde{R}_{k+1}, Z_k]}{\|Z_k\|^2}, \quad Z_{k+1} = \tilde{R}_{k+1} + \beta_{k+1} Z_k; \end{aligned}$$

第 4 步 置 $k := k + 1$, 转第 2 步.

可以验证, 算法 2 中的矩阵满足 $Y^{(k)}, Z_k \in \Omega(P_1, P_2)$, 对于算法 2 有以下收敛性定理 (证明过程类似文献 [6]).

定理 4 LME(7) 总是有广义自反解的, 对任意初始矩阵 $Y^{(1)} \in \Omega(P_1, P_2)$, 算法 2 可在有限步计算后得到问题 II 的一个解, 即 LME(4) 的一个广义自反 Ls 解; 若取初始矩阵满足

$$Y^{(1)} = g(H) \quad (\text{任意 } H \in \Omega(P_1, P_2)),$$

则算法 2 可在有限步计算后得到 LME(7) 的唯一极小范数广义自反解, 即 LME(4) 的唯一极小范数广义自反 Ls 解.

4 数值算例

求方程 (1) 的广义自反解, 可采用以下两种计算方案.

方案一

第 1 步 给定初始矩阵 $X^{(1)} \in \Omega(P_1, P_2)$, 置 $k := 1$;

第 2 步 如果 $\psi(X^{(k)}) = O$, 停止; 否则, 采用算法 1 求 $Y^{(k)} \in \Omega(P_1, P_2)$, 使满足 LME(3); 当算法 1 中断 (表明 LME(3) 无广义自反解) 时, 采用算法 2 求 $Y^{(k)} \in \Omega(P_1, P_2)$, 使得

$$\|\phi_{X^{(k)}}(Y^{(k)}) + \psi(X^{(k)})\| = \min; \quad (10)$$

第 3 步 计算 $X^{(k+1)} = X^{(k)} + Y^{(k)}$, 置 $k := k + 1$, 转第 2 步.

方案二

第 1 步 给定初始矩阵 $X^{(1)} \in \Omega(P_1, P_2)$, 置 $k := 1$;

第 2 步 如果 $\psi(X^{(k)}) = O$, 停止; 否则, 采用算法 2 求 $Y^{(k)} \in \Omega(P_1, P_2)$, 使满足式 (10). 当 $\phi_{X^{(k)}}(Y^{(k)}) = -\psi(X^{(k)})$ 有广义自反解时, 它的广义自反 Ls 解就是它的广义自反解;

第 3 步 计算 $X^{(k+1)} = X^{(k)} + Y^{(k)}$, 置 $k := k + 1$, 转第 2 步.

例 1 采用两种计算方案求方程 (1) 的广义自反解. 设对称正交矩阵 P_1 为次单位矩阵, $P_2 = I - 2u^T u$, 其中 $u = (0, 0, 1)$, 系数矩阵和右端项如下:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad E_5 = \begin{bmatrix} -12 & -12 & 4 \\ -12 & -12 & 4 \\ -12 & -12 & -4 \end{bmatrix}, \quad u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$A = D^T, \quad B = C = I, \quad E_1 = E_2 = -u_2 u_2^T, \quad E_3 = -u_1 u_1^T, \quad E_4 = u_1 u_2^T,$$

选取初始矩阵 $X^{(1)} = I + P_1 I P_2 \in \Omega(P_1, P_2)$, $Y^{(1)} = O \in \Omega(P_1, P_2)$, 终止准则 $\varepsilon = 10^{-9}$, 两种方案的计算结果均为

$$X^{(6)} = \begin{bmatrix} 2.0000 & 2.0000 & -0.0000 \\ 2.0000 & 2.0000 & 0 \\ 2.0000 & 2.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}.$$

方案一中, 牛顿算法迭代 6 次, 算法 1 和算法 2 分别迭代 36 次和 35 次; 方案二中, 牛顿算法迭代 6 次, 算法 2 迭代 41 次.

计算结果表明: 方程 (1) 有广义自反解, 由方案一或方案二得到的 $X^{(6)}$ 是它的一个广义自反解; 在方案一中, 采用算法 1 求解 LME(3) 时, 会遇到算法 1 中断的情况, 此时 LME(3) 没有广义自反解 $Y^{(k)}$, 需要采用算法 2 求 LME(3) 的广义自反 Ls 解 $Y^{(k)}$.

例 2 采用两种计算方案求方程 (1) 的广义自反解. 取 $u = (1, 0, \dots, 0)$, 对称正交矩阵 $P_1 = I - 2u^T u$, P_2 为以次单位矩阵为子矩阵的块对角矩阵, 而

$$\tilde{B}_i = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & -7 \end{bmatrix}, \quad \tilde{D}_i = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{X}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix},$$

$$B = [O, \tilde{B}_i, I]_{i=1}^N, \quad D = [I, \tilde{D}_i, O]_{i=1}^N \quad (\text{块三对角矩阵 - 下同}),$$

$$A = D^T, \quad C = B^T, \quad E_1 = E_4 = [I, 2I, I]_{i=1}^N, \quad E_2 = E_3 = [I, \text{ones}(3), I]_{i=1}^N,$$

$$\hat{X} = \text{diag}(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_N) + P_1 \text{diag}(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_N) P_2,$$

$$E_5 = A \hat{X} B + C \hat{X}^T D + \hat{X} E_1 \hat{X} + \hat{X} E_2 \hat{X}^T + \hat{X}^T E_3 \hat{X} + \hat{X}^T E_4 \hat{X}^T.$$

选取牛顿算法的初始矩阵

$$X^{(1)} = I + P_1 I P_2 \in \Omega(P_1, P_2),$$

MCG 算法的初始矩阵 $Y^{(1)} = O \in \Omega(P_1, P_2)$, 终止准则 $\varepsilon = 10^{-9}$, 两种方案的计算结果见表 1, 表中的外迭代指牛顿算法, 内迭代指 MCG 算法, 计算时间单位为 s .

表 1: 例 2 的计算结果

未知矩阵 的阶数		$n = 6$		$n = 30$		
计算结果	外迭代次数	内迭代次数	计算时间	外迭代次数	内迭代次数	计算时间
方案一	7	算法 1: 207	0.0790	5	算法 1: 2378	3.0630
		算法 2: 0			算法 2: 0	
方案二	7	584	0.3750	5	65399	353.6250

计算结果表明: 当 LME(3) 总是有广义自反解 $Y^{(k)}$ 时, 方案一比方案二的效率高.

5 结论

运用牛顿算法求 Riccati 矩阵方程的广义自反解, 并采用 MCG 算法求导出的 LME 的广义自反解或者广义自反最小二乘解, 建立了求 Riccati 矩阵方程的广义自反解的双迭代算法, 数值算例表明双迭代算法是有效的. 修改算法中初始矩阵的类型, 算法 1 中涉及的矩阵 Z_1 与 Z_{k+1} 的计算公式, 以及算法 2 中涉及的 LME(7) 的构造方式, 还可建立求 Riccati 矩阵方程的其它特殊解的迭代算法.

参 考 文 献

- [1] Braden H W. The equations $A^T X + X^T A = B$ [J]. SIAM. J. Matrix Anal. & Appl., 1998, 20(2): 295–302.
- [2] 袁永新, 戴华. 矩阵方程 $A^T X B + B^T X^T A = D$ 的极小范数最小二乘解 [J]. 高等学校计算数学学报, 2005, 27(3): 232–238.
- [3] Fujioka H, Hara S. State covariance assignment problem with measurement noise: a unified approach based on a symmetric matrix equation [J]. Linear Algebra Appl., 1994, 203/204: 579–605.
- [4] Dehghan Mehdi, Hajarian Masoud. Analysis of an iterative algorithm to solve the generalized coupled sylvester matrix equations [J]. Appl. Math. Modell, 2011, 35: 3285–3300.
- [5] Long J H, Hu X Y, Zhang L. Improved Newton's method with exact line searches to solve quadratic matrix equation [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2008, 222: 645–654.
- [6] 袁飞, 张凯院. 矩阵方程 $AXB + CX^T D = F$ 的自反最小二乘解的迭代算法 [J]. 数值计算与计算机应用, 2009, 30(3): 195–201.
- [7] 解培月, 张凯院. 特殊双变量矩阵方程组异类约束解的 MCG 算法 [J]. 数学杂志, 2012, 32(4): 649–657.
- [8] 武见, 张凯院. 多变量矩阵方程异类约束解的修正共轭梯度法 [J]. 工程数学学报, 2012, 29(1): 112–116.
- [9] 张凯院, 徐仲. 数值代数 (第 2 版修订本) [M]. 北京: 科学出版社, 2010.
- [10] 张贤达. 矩阵分析与应用 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2006.

A DOUBLE ITERATIVE ALGORITHM FOR THE GENERALIZED REFLEXIVE SOLUTION OF THE RICCATI MATRIX EQUATION

ZHANG Kai-yuan, WANG Jiao

(*Dept. of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China*)

Abstract: In this paper, a new iterative method is studied to find the generalized reflexive solution of the Riccati matrix equation. When Newton's method is applied to find the generalized reflexive solution of the Riccati matrix equation, a problem to find the generalized reflexive solutions or the generalized reflexive least-square solutions of a linear matrix equation will be derived. And then the modified conjugate gradient method is applied to solve the derived linear matrix equation. So a double iterative method is established to find the generalized reflexive solution of the Riccati matrix equation. The iterative algorithm for solving linear matrix equation is promoted. Numerical examples show that the double iterative method is effective.

Keywords: Riccati matrix equation; generalized reflexive solution; Newton's method; modified conjugate gradient method; double iterative method

2010 MR Subject Classification: 65F10