

树上路径过程的随机路径条件概率的强极限定理

韩大钊, 石志岩, 杨卫国
(江苏大学理学院, 江苏 镇江 212013)

摘要: 本文研究了树上路径过程随机转移概率和状态序偶出现频率的强极限定理. 通过利用若干重要不等式, 获得了树上路径过程的随机路径条件概率用不等式表示的几何平均强极限定理以及树上路径过程关于状态序偶出现频率的用不等式表示的强极限定理, 所得结果推广了树上马氏链及非齐次马氏链中的结果.

关键词: 路径过程; 随机路径条件概率; 几何平均

MR(2010) 主题分类号: 60F15

中图分类号: O211.4

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2015)02-0462-07

1 引言

设 T 是一个无限树, $\sigma, t (\sigma \neq t)$ 是 T 中任两个顶点, 则存在唯一的以 σ 到 t 的路径, $\sigma = z_1, z_2, \dots, z_m = t$, 其中 $z_1, z_2, \dots, z_m$ 互不相同且 z_i, z_{i+1} 为相邻两顶点, $m-1$ 称为 σ 到 t 的距离. 为给 T 中的顶点编号, 我们选定一个顶点作为根顶点 (简称根), 并记之为 o . 如果一个顶点 t 位于根 o 到顶点 σ 的唯一路径上, 则记 $\sigma \leq t$. 若 σ, t 为 T 上不同的两个顶点, 记 $\sigma \wedge t$ 为同时满足 $\sigma \wedge t \leq t$ 和 $\sigma \wedge t \leq \sigma$ 且离根 o 最远的顶点.

本文中 T 表示任意局部有限无穷树. 若 t 为 T 中的任一顶点, 记 $|t|$ 为顶点 t 到根 o 的距离. 若 $|t| = n$, 则 t 位于树的第 n 层. 记 $T^{(n)}$ 表示从根 o 到第 n 层所有顶点的子图, L_n 表示第 n 层所有顶点的集合, L_m^n 表示含有 T 的从 m 层到 n 层所有顶点的集合. 对于任一顶点 t , 从根 o 到顶点 t 的路径上存在唯一一个离顶点 t 最近的顶点称为 t 的父代, 记为 1_t , 且称 t 为 1_t 的子代. 1_t 的父代记为 2_t , $(n-1)_t$ 的父代记为 n_t , 也称 n_t 为 t 的第 n 代父代. 令 $X^A = \{X_t, t \in A\}$, x^A 为 X^A 的实现, 且记 $|A|$ 为 A 中顶点的个数.

定义 1 设 T 为局部有限无穷树, 且 $S = \{1, 2, \dots, m\}$. 令

$$P_t = (P_t(x_t|x_{1_t}, x_{2_t}, \dots, x_o)), \quad P_t(x_t|x_{1_t}, x_{2_t}, \dots, x_o) \geq 0,$$

其中 $t \in T \setminus \{o\}$, $x_t, x_{1_t}, x_{2_t}, \dots, x_o \in S$. 如果 $\sum_{x_t \in S} P_t(x_t|x_{1_t}, x_{2_t}, \dots, x_o) = 1$, 则称 P_t 为树 T 上路径条件概率矩阵族.

定义 2 设有限状态空间 $S = \{1, 2, \dots, m\}$, $\{X_t, t \in T\}$ 为定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的 S 值变量族. 设

$$p = (p(x), x \in S), \quad (1)$$

*收稿日期: 2012-09-28

接收日期: 2013-07-02

基金项目: 国家自然科学基金 (11226210; 11071104); 江苏大学高级人才启动基金 (11JDG116).

作者简介: 韩大钊 (1985-), 男, 山东济宁, 硕士, 主要研究方向: 概率论极限理论.

通讯作者: 石志岩.

$$P_t = (P_t(x_t|x_{1_t}, x_{2_t}, \cdots, x_o)), x_t, x_{1_t}, x_{2_t}, \cdots, x_o \in S, \quad t \in T \setminus \{o\} \quad (2)$$

分别为 S 上的概率分布和路径条件概率矩阵族. 如果对于任何顶点 $t (t \neq o)$,

$$\begin{aligned} &P(X_t = x_t | X_{1_t} = x_{1_t}, X_{2_t} = x_{2_t}, \cdots, X_o = x_o \text{ 和 } X_\sigma \text{ 满足 } t \wedge \sigma \leq 1_t) \\ &= P(X_t = x_t | X_{1_t} = x_{1_t}, X_{2_t} = x_{2_t}, \cdots, X_o = x_o) \\ &= P_t(x_t | x_{1_t}, x_{2_t}, \cdots, x_o), \quad \forall x_t, x_{1_t}, x_{2_t}, \cdots, x_o \in S, \end{aligned} \quad (3)$$

且

$$P(X_o = x) = p(x), \quad \forall x \in S, \quad (4)$$

则称 $\{X_t, t \in T\}$ 为具有初始分布 (1) 和路径条件概率矩阵族 (2) 的树指标 S 值路径过程.

注 1 如果树 T 上的每个顶点仅与其父代有关, 而与其他顶点无关, 则上述树上路径过程就是树指标非齐次马氏链. 对于树指标非齐次马氏链的详细定义, 读者可参考文献 [14]. 特别地, 如果树指标非齐次马氏链的每个顶点只有一个子代, 此时树指标马氏链即为非齐次马氏链.

设 $P_t(x_t|x_{1_t}, x_{2_t}, \cdots, x_o) = P_t(X_t = x_t | X_{1_t} = x_{1_t}, X_{2_t} = x_{2_t}, \cdots, X_o = x_o)$, 则称 $P_t(X_t | X_{1_t}, X_{2_t}, \cdots, X_o)$ 为树上路径过程的随机路径条件概率. Benjamini 和 Peres^[1] 给出了树指标马氏链的定义并研究了其常返性和射线常返性. Berger 和叶中行^[2] 研究了齐次树图上平稳随机场熵率的存在性. 叶中行和 Berger^[3,4] 利用 Pemantle 在文献 [5] 中的结果及组合方法, 在依概率收敛意义下研究了齐次树图上 PPG 不变和遍历随机场的 Shannon-McMillan 定理. 杨卫国和刘文^[6] 研究了齐次树图上马氏链场 (这实际上是树指标马氏链和 PPG 不变随机场的特殊情形) 状态发生频率的强大数定律. 杨卫国^[7,8] 研究了齐次树上齐次和非齐次马氏链的状态发生频率的强大数定律. 近年来, 刘文^[9,10,11] 应用了条件矩母函数的方法, 研究了随机转移概率的若干极限性质和调和平均. 石志岩和杨卫国^[12] 研究了树上路径过程随机条件概率的极限性质. 王华山和杨卫国、石志岩^[16] 研究了树指标非齐次马氏链随机转移概率的几何平均强极限定理.

设 $\{X_t, t \in T\}$ 为在 S 中取值的树指标随机过程, $x^{T^{(n)}}$ 为 $X^{T^{(n)}}$ 的实现. 记

$$P(x^{T^{(n)}}) = P(X^{T^{(n)}} = x^{T^{(n)}}).$$

当树 T 为树指标路径过程时, 易知

$$P(x^{T^{(n)}}) = P(X^{T^{(n)}} = x^{T^{(n)}}) = P(X_o = x_o) \prod_{t \in T^{(n)} \setminus \{o\}} P_t(x_t | x_{1_t}, x_{2_t}, \cdots, x_o). \quad (5)$$

令

$$f_n(\omega) = -\frac{1}{|T^{(n)}|} \ln P(X^{T^{(n)}}),$$

称 $f_n(\omega)$ 为 $X^{T^{(n)}}$ 的熵密度. 如果 $\{X_t, t \in T\}$ 如定义 2 定义的树上路径过程, 由式 (5) 可得

$$f_n(\omega) = -\frac{1}{|T^{(n)}|} [\ln P(X_o) + \sum_{t \in T^{(n)} \setminus \{o\}} \ln P_t(X_t | X_{1_t}, X_{2_t}, \cdots, X_o)]. \quad (6)$$

$f_n(\omega)$ 在某种意义上 (L_1 收敛, 依概率收敛, 几乎处处收敛) 收敛于常数, 称为 Shannon-McMillan 定理, 或信源的渐近均分割性 (AEP) 以及熵定理, 它是信息论的基本定理, 也是各

种编码定理的基础. 对于渐近均分割性 (AEP) 或 Shannon-McMillan 定理的研究: Barron^[17] 和 Orey^[18] 给出了连续值遍历过程的几乎处处收敛的渐近均分割性. Algoet 和 Cover^[19] 应用“三明治”方法给出了一般渐近均分割性的证明.

本文主要研究了树上路径过程的几何平均强极限定理和树上路径过程关于状态出现频率的强极限定理. 首先得到了树上路径过程的随机路径条件概率用不等式表示的几何平均强极限定理, 给出了树上路径过程熵密度的一个上确界. 其次研究了树上路径过程关于状态序偶出现频率的用不等式表示的强极限定理, 同时推广了一些已有的结果.

2 主要结果

引理 1 设 $\{X_t, t \in T\}$ 是定义在测度空间 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上在 S 中取值的随机变量族, μ_1 与 μ_2 是可测空间 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的两个不同的概率测度, 记

$$\mu_i(X^{T^{(n)}} = x^{T^{(n)}}) = \mu_i(x^{T^{(n)}}), \quad i = 1, 2. \quad (7)$$

则

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|T^{(n)}|} \ln \frac{\mu_2(X^{T^{(n)}})}{\mu_1(X^{T^{(n)}})} \leq 0, \quad \mu_1 - \text{a.e.} \quad (8)$$

证 证明的方法类似于文献 [16] 中引理 1, 这里省略证明.

定理 1 设 P 为 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的概率测度, $\{X_t, t \in T\}$ 在 P 下为定义 2 中的在 S 中取值的树指标路径过程, 其概率分布和路径条件概率矩阵族分别为式 (1) 与 (2), 则随机路径条件概率 $\{P_t(X_t | X_{1_t}, X_{2_t}, \dots, X_o), t \in T^{(n)} \setminus \{o\}\}$ 的几何平均的下极限在概率测度 P 下几乎处处不小于 $\frac{1}{m}$, 即

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{t \in T^{(n)} \setminus \{o\}} P_t(X_t | X_{1_t}, X_{2_t}, \dots, X_o) \right)^{\frac{1}{|T^{(n)}|}} \geq \frac{1}{m}, \quad P - \text{a.e.} \quad (9)$$

证 设 Q 为 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上另一概率测度, 且 $\{X_t, t \in T\}$ 在 Q 下是独立同分布的, 且 X_t 在 S 上是均匀分布, 即 $Q(X_t = x) = \frac{1}{m}, x \in S$, 则 $Q(x^{T^{(n)}}) = (\frac{1}{m})^{|T^{(n)}|}$, 由引理 1 可得

$$\begin{aligned} & \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{Q(X^{T^{(n)}})}{P(X^{T^{(n)}})} \right)^{\frac{1}{|T^{(n)}|}} \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{m}}{(P(X_o) \prod_{t \in T^{(n)} \setminus \{o\}} P_t(X_t | X_{1_t}, X_{2_t}, \dots, X_o))^{\frac{1}{|T^{(n)}|}}} \\ &\leq 1, \quad P - \text{a.e.}, \end{aligned}$$

所以

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{t \in T^{(n)} \setminus \{o\}} P_t(X_t | X_{1_t}, X_{2_t}, \dots, X_o) \right)^{\frac{1}{|T^{(n)}|}} \geq \frac{1}{m}, \quad P - \text{a.e.}$$

故结论成立.

注 2 在式 (9) 两边取对数可得

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|T^{(n)}|} \sum_{t \in T^{(n)} \setminus \{o\}} \ln P_t(X_t | X_{1_t}, X_{2_t}, \dots, X_o) \geq -\ln m, \quad P - \text{a.e.} \quad (10)$$

由式 (6) 和 (10) 可知

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega) \leq \ln m, \quad P - \text{a.e.}, \quad (11)$$

因此上式给出了树指标路径过程的熵密度的上确界不超过状态数的对数.

注 3 显然, 对于树上非齐次马氏链的类似结果 (见文献 [16]), 我们由定理 1 即得.

定理 2 设 P 为 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的概率测度, $\{X_t, t \in T\}$ 在 P 下为定义 2 中的树上路径过程, 其初始概率分布和路径条件概率矩阵族分别为式 (1) 与 (2). 设 $i \in S, S_n(i, \omega)$ 是 $\{X_t : t \in T^{(n)}\}$ 中 i 的个数, 即 $S_n(i, \omega) = \sum_{t \in T^{(n)}} \delta_i(X_t)$, 其中 $\delta_i(\cdot), (i \in S)$ 是 S 上的 Kronecher- δ 函数.

(1) 如果存在一个常数 $r \in [\frac{1}{m}, 1)$ 使得

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{t \in T^{(n)} \setminus \{o\}} P_t(X_t | X_{1_t}, X_{2_t}, \dots, X_o) \right)^{\frac{1}{|T^{(n)}|}} \leq r, \quad P - \text{a.e.}, \quad (12)$$

那么就有

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|T^{(n)}|} S_n(i, \omega) \leq p, \quad P - \text{a.e.}, \quad (13)$$

其中 P 是关于 $\lambda (0 < \lambda < 1)$ 的方程

$$\lambda^\lambda [(1 - \lambda)/(m - 1)]^{1 - \lambda} = r \quad (14)$$

在区间 $[\frac{1}{m}, 1)$ 的唯一解.

(2) 如果存在一个常数 $r \in [\frac{1}{m}, \frac{1}{m-1})$ 使得式 (12) 成立, 那么

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|T^{(n)}|} S_n(i, \omega) \geq q, \quad P - \text{a.e.}, \quad (15)$$

其中 q 是方程 (14) 在区间 $(0, \frac{1}{m}]$ 上的唯一解.

证 设 Q 为 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上另一概率测度, 且 $\{X_t, t \in T\}$ 在 Q 下是独立同分布的, X_t 的分布为 $Q(X_t = i) = \lambda, Q(X_t \neq i) = (1 - \lambda)/(m - 1)$, 则

$$Q(X^{T^{(n)}}) = \lambda^{S_n(i, \omega)} \left(\frac{1 - \lambda}{m - 1} \right)^{|T^{(n)}| - S_n(i, \omega)},$$

由引理 1 有

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{Q(X^{T^{(n)}})}{P(X^{T^{(n)}})} \right)^{\frac{1}{|T^{(n)}|}} \leq 1, \quad P - \text{a.e.},$$

即

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\lambda^{S_n(i, \omega)} \left(\frac{1 - \lambda}{m - 1} \right)^{|T^{(n)}| - S_n(i, \omega)}}{P(X_o) \prod_{t \in T^{(n)} \setminus \{o\}} P_t(X_t | X_{1_t}, X_{2_t}, \dots, X_o)} \right]^{\frac{1}{|T^{(n)}|}} \leq 1, \quad P - \text{a.e.}.$$

由于

$$\begin{aligned}
 & \limsup_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\lambda(m-1)}{1-\lambda} \right]^{\frac{S_n(i, \omega)}{|T^{(n)}|}} \left(\frac{1-\lambda}{m-1} \right) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left[\lambda^{S_n(i, \omega)} \left(\frac{1-\lambda}{m-1} \right)^{|T^{(n)}| - S_n(i, \omega)} \right]^{\frac{1}{|T^{(n)}|}} \\
 &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\left[\lambda^{S_n(i, \omega)} \left(\frac{1-\lambda}{m-1} \right)^{|T^{(n)}| - S_n(i, \omega)} \right]^{\frac{1}{|T^{(n)}|}}}{\left[P(X_o) \prod_{t \in T^{(n)} \setminus \{o\}} P_t(X_t | X_{1_t}, X_{2_t}, \dots, X_o) \right]^{\frac{1}{|T^{(n)}|}}} \\
 & \times \left[P(X_o) \prod_{t \in T^{(n)} \setminus \{o\}} P_t(X_t | X_{1_t}, X_{2_t}, \dots, X_o) \right]^{\frac{1}{|T^{(n)}|}} \\
 &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\left[\lambda^{S_n(i, \omega)} \left(\frac{1-\lambda}{m-1} \right)^{|T^{(n)}| - S_n(i, \omega)} \right]^{\frac{1}{|T^{(n)}|}}}{\left[P(X_o) \prod_{t \in T^{(n)} \setminus \{o\}} P_t(X_t | X_{1_t}, X_{2_t}, \dots, X_o) \right]^{\frac{1}{|T^{(n)}|}}} \\
 & \times \limsup_{n \rightarrow \infty} \left[P(X_o) \prod_{t \in T^{(n)} \setminus \{o\}} P_t(X_t | X_{1_t}, X_{2_t}, \dots, X_o) \right]^{\frac{1}{|T^{(n)}|}} \leq r, \quad P - \text{a.e.},
 \end{aligned}$$

所以

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\lambda(m-1)}{1-\lambda} \right]^{\frac{S_n(i, \omega)}{|T^{(n)}|}} \leq \frac{r(m-1)}{1-\lambda}, \quad P - \text{a.e.}, \quad (16)$$

于是

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(i, \omega)}{|T^{(n)}|} \ln \frac{\lambda(m-1)}{1-\lambda} \leq \ln \frac{\lambda(m-1)}{1-\lambda}, \quad P - \text{a.e.} \quad (17)$$

(1) 假设 $\frac{1}{m} < \lambda < 1$, 由式 (17) 得

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(i, \omega)}{|T^{(n)}|} \leq \frac{\ln \frac{r(m-1)}{1-\lambda}}{\ln \frac{\lambda(m-1)}{1-\lambda}}, \quad P - \text{a.e.} \quad (18)$$

令

$$\varphi(\lambda) = \frac{\ln \frac{r(m-1)}{1-\lambda}}{\ln \frac{\lambda(m-1)}{1-\lambda}}, \quad (19)$$

由 $\varphi'(\lambda) = 0$ 得

$$\lambda^\lambda [(1-\lambda)/(m-1)]^{1-\lambda} = r, \quad (20)$$

令

$$\phi(\lambda) = \lambda^\lambda [(1-\lambda)/(m-1)]^{1-\lambda}, \quad (21)$$

易证 $\phi(\lambda)$ 在 $[\frac{1}{m}, 1)$ 上是单调递增的, 且 $\phi(\frac{1}{m}) = \frac{1}{m}$, $\lim_{\lambda \rightarrow 1^-} \phi(\lambda) = 1$. 因此, 对于 $\frac{1}{m} < r < 1$, 式 (20) 在区间 $(\frac{1}{m}, 1)$ 上有唯一解, 记为 p , 易见 $\varphi(\lambda)$ 在区间 $(\frac{1}{m}, 1)$ 上在 $\lambda = p$ 处取得最小值, 且 $\varphi(p) = p$. 对于式 (19), 令 $\lambda = p$, 可得到

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(i, \omega)}{|T^{(n)}|} \leq p, \quad P - \text{a.e.}, \quad (22)$$

在区间 $[\frac{1}{m}, 1)$ 上, 当 $r = \frac{1}{m}$ 时, $\frac{1}{m}$ 显然是式 (20) 的唯一解. 这时, 选 $\lambda_k \in (\frac{1}{m}, 1)$, $k = 1, 2, \dots$, 使得 $\lambda_k \rightarrow \frac{1}{m}$ ($k \rightarrow \infty$). 那么对所有 $k \geq 1$, 由式 (18) 和式 (19) 可得

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(i, \omega)}{|T^{(n)}|} \leq \varphi(\lambda_k), \quad P - \text{a.e.}, \quad (23)$$

又由于 $\lim_{\lambda_k \rightarrow \frac{1}{m}} \varphi(\lambda_k) = \frac{1}{m}$, 所以

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(i, \omega)}{|T^{(n)}|} \leq \frac{1}{m}, \quad P - \text{a.e.} \quad (24)$$

由式 (22) 和 (24) 即可知式 (13) 成立.

(2) 假设 $0 < \lambda < \frac{1}{m}$, 根据式 (18), 有

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(i, \omega)}{|T^{(n)}|} \geq \frac{\ln \frac{r(m-1)}{1-\lambda}}{\ln \frac{\lambda(m-1)}{1-\lambda}}, \quad P - \text{a.e.} \quad (25)$$

令 $\varphi(\lambda)$ 和 $\phi(\lambda)$ 分别如式 (19) 和 (21) 所定义. 易证 $\phi(\lambda)$ 在 $(0, \frac{1}{m})$ 上是单调递减的, 且 $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \phi(\lambda) = \frac{1}{m-1}$. 进而, 当 $\frac{1}{m} < r < \frac{1}{m-1}$ 时, 式 (20) 在 $(0, \frac{1}{m})$ 上有唯一解, 记为 q . 易见在区间 $(0, \frac{1}{m})$ 上, $\varphi(\lambda)$ 的最大值在 $\lambda = q$ 处达到, 且

$$\varphi(q) = q, \quad (26)$$

在式 (25) 中令 $\lambda = q$, 根据式 (26), 可得到

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(i, \omega)}{|T^{(n)}|} \geq q, \quad P - \text{a.e.}, \quad (27)$$

显然当 $r = \frac{1}{m}$ 时, $\frac{1}{m}$ 也是式 (20) 在区间 $(0, \frac{1}{m}]$ 上的唯一解. 选取 $\tau_k \in (0, \frac{1}{m})$, $k = 1, 2, \dots$, 使得 $\tau_k \rightarrow \frac{1}{m}$ ($k \rightarrow \infty$). 仿照式 (22), 可证明当 $r = \frac{1}{m}$ 时, 有

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(i, \omega)}{|T^{(n)}|} \geq \frac{1}{m}, \quad P - \text{a.e.} \quad (28)$$

成立. 由式 (27) 和 (28) 可知式 (15) 成立.

显然, 对于树指标非齐次马氏链和非齐次马氏链的类似结果 (见文献 [16]), 我们由定理 2 即得.

参 考 文 献

- [1] Benjamini I, Peres Y. Markov chains indexed by trees[J]. Ann. Probab., 1994, 22: 219–243.
- [2] Berger T, Ye Z. Entropic aspects of random fields on trees[J]. IEEE Trans Inform. Theory, 1990, 36: 1006–1018.
- [3] Ye Z, Berger T. Ergodic, regular and asymptotic equipartition property of random fields on trees[J]. J. Combin Inform. System Sci., 1996, 21: 157–184.
- [4] Ye Z, Berger T. Information measures for discrete random fields[M]. Beijing: Science, 1998.
- [5] Pemantle R. Antomorphism invariant measure on trees[J]. Ann. Probab., 1992, 20: 1549–1566.
- [6] Yang W G, Liu W. Strong law of large numbers for Markov chains fields on a Bethe tree[J]. Statist Probab Lett., 2000, 49: 245–250.
- [7] Yang W G. Some limit properties for Markov chains indexed by a homogeneous tree[J]. Statist Probab Lett., 2003, 65: 241–250.

- [8] Yang W G, Ye Z. The Asymptotic Equipartition property for Markov chains indexed by a Homogeneous tree[J]. IEEE Trans Inf. Theory, 2007, 53(9): 3275–3280.
- [9] Liu W. A limit property of random conditional probabilities and an approach of conditional moment generating function[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2000, 23(2): 275–279 (in Chinese).
- [10] Liu W. A limit property of random conditional probabilities[J]. Statist Probab Lett., 2000, 49: 299–304.
- [11] Liu W. A strong limit theorem for the harmonic mean of the random transition probabilities of finite nonhomogeneous Markov chains[J]. Acta Mathematica Scientia, 2000, 20(1): 81–84 (In Chinese).
- [12] Shi Z Y, Yang W G, Wan B. Some limit properties of random path conditional probability for path process indexed by a tree[J]. J. of Math., 2012, 32(2): 499–505.
- [13] Yan W G, Yun G L. Some limit theorems for second-order nonhomogeneous Markov chains indexed by a tree[J]. Journal of Jiangsu University (Natural Science Edition), 2012, 33(4): 486–490.
- [14] Shi Z Y, Yang W G. A limit property of random transition probability for a nonhomogeneous Markov chains indexed by a tree[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2008, 31(4): 648–653 (In Chinese).
- [15] Xi Q L, Yang W G, Shi Z Y. A strong limit theorem for arbitrary stochastic arrays[J]. J. of Math.(PRC), 2010, 30(6): 1001–1007.
- [16] Wang H S, Yang W G, Shi Z Y. Some strong limit theorems relative to the geometric average of random transition probabilities of nonhomogeneous markov chains indexed by a tree[A]. 2009 Second International Workshop on Computer Science and Engineering, 2009: 472–475.
- [17] Barron A R. The strong ergodic theorem for densities: generalized Shannon-McMillan-Breiman theorem[J]. Annals of Probability, 1985, 13: 1292–1303.
- [18] Orey S. On the Shannon-Perez-Moy theorem[J]. Contemp. Math., 1985, 41: 319–327.
- [19] Algoet P, Cover T M. A Sandwich proof of the Shannon-McMillan-Breiman theorem[J]. Annals of Probability, 1988, 16: 899–909.

SOME LIMIT PROPERTIES OF RANDOM PATH CONDITIONAL PROBABILITY FOR PATH PROCESS INDEXED BY A TREE

HAN Da-zhao, SHI Zhi-yan, YANG Wei-guo

(Faculty of Science, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China)

Abstract: In this paper, some strong limit theorems relative to the geometric average and occurred frequency of states for path process indexed by a tree were studied. The definition of the path process indexed by a tree was introduced to propose a lemma. Some strong limit theorems relative to the geometric average of random path conditional probability with inequality for path process indexed by a tree was established, and some strong limit theorems relative to occasional occurred frequency of states with inequality for path process indexed by a tree was deduced. As corollary, random conditional probability for nonhomogeneous Markov chains indexed by a tree was achieved.

Keywords: path process; random path conditional probability; geometric average

2000 MR Subject Classification: 60F15