Vol. 35 (2015)
No. 2

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

诱导的 I-fuzzy 拓扑生成序空间

吴修云 [1,2], 白世忠 [3]

(1. 湖南科技学院计算数学所数学系, 湖南 永州 425100)

(2. 湘潭大学数学与计算科学学院, 湖南 湘潭 411105)

(3. 五邑大学数学与计算科学学院, 广东 江门 529020)

摘 要: 本文研究了模糊拓扑生成序空间与其诱导的 I-fuzzy 拓扑生成序空间之间的关系. 利用三种 Lowen 映射内在关联的方法, 引入了三种 I-fuzzy 拓扑生成序空间, 建立了诱导的 I-fuzzy 拓扑生成序空间理论. 获得了诱导的 I-fuzzy 拓扑与诱导的 I-fuzzy 拓扑生成序之间的从属关系.

关 键 词: 弱诱导的 I-fuzzy 拓扑生成序空间; 诱导的 I-fuzzy 拓扑生成序空间; 满层 I-fuzzy 拓扑生成序空间; I-fuzzy 拓扑空间

MR(2010) **主题分类号**: 54C08 **中图分类号**: O189.13

文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2015)02-0451-11

1 引言与预备知识

一般共生拓扑结构的概念首先是由 Császár 在他的专著 [1] 中提出的. 它综合了拓扑空间、一致结构和临近空间, 在拓扑学研究中占有重要地位. Katsaras 在文 [2] 中把它推广到了模糊空间中, 并做了大量重要的工作 [2−5].

格模糊拓扑空间以及光滑拓扑空间中的诱导理论都有相应的讨论 [6,9−10]. 本文研究模糊拓扑生成序与其诱导的 I-fuzzy 拓扑生成序的关系. 文中首先通过三种 Lowen 映射得到三种拓扑生成序. 其次, 给出弱诱导共生拓扑序空间和满层共生序空间的概念, 并建立诱导共生拓扑序空间的基本理论. 最后, 文中讨论诱导 I-fuzzy 拓扑与诱导的 I-fuzzy 拓扑生成序的从属关系.

称 X 上的二元映射 $\tau : X \times X \to I$ 为一个 fuzzy 拓扑生成序, 若 τ 满足以下条件:

(FTO 1) $\tau(\emptyset,\emptyset)=\tau(X,X)=1$.

(FTO 2) 若 $\tau(U,V)>0$, 则 $U\subset V$.

(FTO 3) 若 $U\subset U_1$, $V_1\subset V$, 则 $\tau(U_1,V_1)\le\tau(U,V)$.

(FTO 4) $\tau(U\cup U_1,V)\ge\tau(U,V)\wedge\tau(U_1,V)$.

(FTO 5) $\tau(U,V\cap V_1)\ge\tau(U,V)\wedge\tau(U,V_1)$.

称 Fuzzy 拓扑生成序 τ 为双完全的, 若 τ 还满足:

(FTO 6) $\tau(\cup_{j\in J}U_j,V)\ge\wedge_{j\in J}\tau(U_j,V), \forall\{U_j,V\subset X: j\in J\}$.

(FTO 7) $\tau(U,\cap_{j\in J}V_j)\ge\wedge_{j\in J}\tau(U,V_j), \forall\{U,V_j\subset X: j\in J\}$.

若 τ 是 fuzzy(双完全) 拓扑生成序, 那么称 (X,τ) 为 fuzzy(双完全) 拓扑生成序空间. 若 τ_1,τ_2 都是 fuzzy(双完全) 拓扑生成序, 那么 $\tau_1\vee\tau_2$ 和 $\tau_1\wedge\tau_2$ 也是.

*收稿日期: 2012-11-01 接收日期: 2013-09-03

基金项目: 国家自科基金 (10971125); 广东省自科基金 (01000004); 湖南科技学院重点学科建设项目.

作者简介: 吴修云 (1982–), 男, 安徽六安, 博士, 讲师, 主要研究方向: 格上拓扑学.

设 $(X,\tau_1),(Y,\tau_2)$ 是 fuzzy 拓扑生成序空间, $U,V\subset Y$. 称 $f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$ 为

(1) 连续, 若 $\tau_1(f^{-1}(U),f^{-1}(V))\geq\tau_2(U,V)$.

(2) 弱连续, 若 $\tau_2(U,V)>0$, 则 $\tau_1(f^{-1}(U),f^{-1}(V))>0$.

称 I^X 上的二元映射 $\eta:I^X\times I^X\to I$ 为 I-fuzzy 拓扑生成序, 若 η 满足:

(I-FTO 1) $\eta(0_X,0_X)=\eta(1_X,1_X)=1$.

(I-FTO 2) $\eta(A,B)>0$, 则 $A\leq B$.

(I-FTO 3) 若 $A\leq A_1$, $B_1\leq B$, 则 $\eta(A_1,B_1)\leq\eta(A,B)$.

(I-FTO 4) $\eta(A\vee A_1,B)\geq\eta(A,B)\wedge\eta(A_1,B)$.

(I-FTO 5) $\eta(A,B\wedge B_1)\geq\eta(A,B_1)\wedge\eta(A,B_1)$.

称 I-fuzzy 拓扑生成序 η 是双完全的, 若 η 还满足:

(I-FTO 6) $\eta(\vee_{j\in J}A_j,B)\geq\wedge_{j\in J}\eta(A_j,B)$, $\forall\{A_j,B\in I^X:j\in J\}$.

(I-FTO 7) $\eta(A,\wedge_{j\in J}B_j)\geq\wedge_{j\in J}\eta(A,B_j)$, $\forall\{A,B_j\in I^X:j\in J\}$.

若 η 是 fuzzy(双完全) 拓扑生成序, 那么称 (I^X,η) 为 I-fuzzy(双完全) 拓扑生成序空间. 若 η_1,η_2 都是 fuzzy(双完全) 拓扑生成序, 那么 $\eta_1\vee\eta_2$ 和 $\eta_1\wedge\eta_2$ 也是 [4].

称映射 $f^{\to}:I^X\to Y$ 为模糊映射, 若存在 $f:X\to Y$, 使 $\forall A\in I^X,y\in Y$,

$$f^{\to}(A)(y)=\vee\{A(x):x\in X,f(x)=y\}.$$

若 $f^{\to}$ 是双射. 记其逆映射 $f^{\leftarrow}:I^Y\to I^X$ 为: $\forall B\in I^Y,x\in X$, $f^{\leftarrow}(B)(x)=B(f(x))$. 若 $A\in I^X$, 记 $\sigma_r(A)=\{x:A(x)\geq r\}$, 则以下结论显然成立:

(1) $U\subset X$, $V\subset Y$, $f^{\to}(1_U)=1_{f(U)}$, $f^{\leftarrow}(1_V)=1_{f^{-1}(V)}$.

(2) $\sigma_r(f^{\to}(A))=f(\sigma_r(A))$, $\sigma_r(f^{\leftarrow}(B))=f^{-1}(\sigma_r(B))$.

(3) $\sigma_r(\vee_{j\in J}A_j)=\cup_{j\in J}\sigma_r(A_j)$, $\sigma_r(\wedge_{j\in J}A_j)=\cap_{j\in J}\sigma_r(A_j)$.

(4) 若 $\underline{\lambda}\in I^X,\underline{\mu}\in I^Y$ 是常值模糊集, 则 $f^{\to}(\underline{\lambda})\in I^Y$ 和 $f^{\leftarrow}(\underline{\mu})\in I^X$ 都是常值的.

若 $(I^X,\eta_1),(I^Y,\eta_2)$ 是 I-fuzzy 拓扑生成序空间, $A,B\in I^Y$. 称模糊映射 $f^{\to}:I^X\to I^Y$ 为

(1) 连续, 若 $\eta_1(f^{\leftarrow}(A),f^{\leftarrow}(B))\geq\eta_2(A,B)$.

(2) 弱连续, 若 $\eta_2(A,B)>0$, 则 $\eta_1(f^{\leftarrow}(A),f^{\leftarrow}(B))>0$.

2 Lowen 映射以及它们的性质

定理 2.1 设 τ 是 X 上的 fuzzy 拓扑生成序, $A,B\in I^X$. 令

$$\omega(\tau)(A,B)=\wedge_{r\in I}\tau(\sigma_r(A),\sigma_r(B)).$$

则 $\omega(\tau)$ 是 I^X 上的 I-fuzzy 拓扑成序. 称 $\omega(\tau)$ 是由 τ 生成的 I-fuzzy 拓扑生成序.

证 (I-FTO 1) $\omega(\tau)(0_X,0_X)=\wedge_{r\in I}\tau(\sigma_r(0_X),\sigma_r(0_X))=\wedge_{r\in I}\tau(\emptyset,\emptyset)=1$,

$$\omega(\tau)(1_X,1_X)=\wedge_{r\in I}\tau(\sigma_r(1_X),\sigma_r(1_X))=\wedge_{r\in I}\tau(X,X)=1.$$

(I-FTO 2) 若 $\omega(\tau)(A,B)>0$, 则 $\forall r\in I$, $\tau(\sigma_r(A),\sigma_r(B))>0$, 进而 $\sigma_r(A)\subset\sigma_r(B)$. 因此

$$A=\vee_{r\in I}(r\wedge 1_{\sigma_r(A)})\leq\vee_{r\in I}(r\wedge 1_{\sigma_r(B)})=B.$$

(I-FTO 3) 若 $A \leq A_1$, $B_1 \leq B$. 则 $\forall r \in I$, $\tau(\sigma_r(A_1), \sigma_r(B_1)) \leq \tau(\sigma_r(A), \sigma_r(B))$. 从而

$$\wedge_{r\in I}\tau(\sigma_r(A_1), \sigma_r(B_1)) \leq \wedge_{r\in I}\tau(\sigma_r(A), \sigma_r(B)) = \omega(A, B).$$

(I-FTO 4)

$$\begin{aligned} &\omega(A \vee A_1, B) = \wedge_{r\in I}\tau(\sigma_r(A \vee A_1), \sigma_r(B)) \\ = \ & \wedge_{r\in I}\tau(\sigma_r(A) \cup \sigma_r(A_1), \sigma_r(B)) \geq \wedge_{r\in I}\tau(\sigma_r(A), \sigma_r(B)) \wedge \wedge_{r\in I}\tau(\sigma_r(A_1), \sigma_r(B)) \\ = \ & \omega(\tau)(A, B) \wedge \omega(\tau)(A_1, B). \end{aligned}$$

(I-FTO 5) 类似 (I-FTO 4) 可证. 因此 $\omega(\tau)$ 是 I-fuzzy 拓扑生成序. 若 τ 是双完全的, 则

(I-FTO 6) 若 $\{U_j \subset X : j \in J\}$, 有

$$\begin{aligned} &\omega(\tau)(\vee_{j\in J}A_j, B) = \wedge_{r\in I}\tau(\sigma_r(\vee_{j\in J}A_j), \sigma_r(B)) \\ \geq \ & \wedge_{r\in I} \wedge_{j\in J} \tau(\cup_{j\in J}\sigma_r(A_j), \sigma_r(B)) \\ = \ & \wedge_{j\in J} \wedge_{r\in I} \tau(\sigma_r(A_j), \sigma_r(B)) = \wedge_{j\in J}\omega(\tau)(A_j, B). \end{aligned}$$

(I-FTO 7) 类似 (I-FTO 6) 可证.

说明 1 称 I-fuzzy 拓扑生成序 η 是可生成的, 若存在 X 上的 fuzzy 拓扑生成序 τ 使 $\eta = \omega(\tau)$.

定理 2.2 (1) 若 $\tau_1 \leq \tau_2$, 则 $\omega(\tau_1) \leq \omega(\tau_2)$.

(2) $\forall\, U, V \subset X$, $\omega(\tau)(1_U, 1_V) = \tau(U, V)$.

(3) 任意 $\underset{\sim}{\lambda} \in I^X$, 有 $\omega(\tau)(\underset{\sim}{\lambda}, \underset{\sim}{\lambda}) = 1$.

定理 2.3 $f^{\rightarrow} : (I^X, \omega(\tau_1)) \to (I^Y, \omega(\tau_2))$ (弱) 连续当且仅当 $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$(弱) 连续.

定理 2.4 设 (I^X, η) 是 I-fuzzy(双完全) 拓扑生成序, $\forall\, U, V \subset X$, 记 $[\eta](U, V) = \eta(1_U, 1_V)$, 则 $[\eta]$ 是 X 上的 fuzzy(双完全) 拓扑生成序.

证 (FTO 1) $[\eta](\emptyset, \emptyset) = \eta(0_X, 0_X) = 1$. $[\eta](X, X) = \eta(1_X, 1_X) = 1$.

(FTO 2) $\forall\, U, V \subset X$, 若 $[\eta](U, V) > 0$, 则 $\eta(1_U, 1_V) > 0$. 则 $1_U \leq 1_V$. 于是 $U \subset V$.

(FTO 3) 若 $U \subset U_1$, $V_1 \subset V$, 有 $[\eta](U_1, V_1) = \eta(1_{U_1}, 1_{V_1}) \leq \eta(1_U, 1_V) = [\eta](U, V)$.

(FTO 4) $[\eta](U \cup U_1, V) = \eta(1_U \vee 1_{U_1}, 1_V) \geq \eta(1_U, 1_V) \wedge \eta(1_{U_1}, 1_V) = [\eta](U, V) \wedge [\eta](U_1, V)$.

(FTO 5) $[\eta](U, V \cap V_1) = \eta(1_U, 1_V \wedge 1_{V_1}) \geq \eta(1_U, 1_V) \wedge \eta(1_U, 1_{V_1}) = [\eta](U, V) \wedge [\eta](U, V_1)$.

(FTO 6) $[\eta](\cup_{j\in J}U_j, V) = \eta(1_{\cup_{j\in J}U_j}, 1_V) = \eta(\vee_{j\in J}1_{U_j}, 1_V) \geq \wedge_{j\in J}[\eta](U_j, V)$.

(FTO 7) $[\eta](U, \cap_{j\in J}V_j) = \eta(1_U, 1_{\cap_{j\in J}V_j}) = \eta(1_U, \wedge_{j\in J}1_{V_j}) \geq \wedge_{j\in J}[\eta](U, V_j)$.

定理 2.5 若 $f^{\rightarrow} : (I^X, \eta_1) \to (I^Y, \eta_2)$(弱) 连续, 则 $f : (X, [\eta_1]) \to (Y, [\eta_2])$ 也 (弱) 连续.

定理 2.6 设 (I^X, η) 是 I-fuzzy(双完全) 拓扑生成序, $\forall\, U, V \subset X, r \in I$, 记

$$\iota_r(\eta)(U, V) = \vee\{\eta(A, B) : \sigma_r(A, B) = (U, V)\},$$

则 $\iota_r(\eta)$ 是 fuzzy(双完全) 拓扑生成序.

证 (FTO 1) $\iota_r(\eta)(\emptyset, \emptyset) \geq \eta(0_X, 0_X) = 1$, $\iota_r(\eta)(X, X) \geq \eta(1_X, 1_X) = 1$.

(FTO 2) 若 $0<\iota_r(\eta)(U,V)=\vee\{\eta(A,B):\sigma_r(A,B)=(U,V)\}$. 存在 $A,B\in I^X$, 使 $\sigma_r(A,B)=(U,V)$, 并且 $\eta(A,B)>0$. 于是 $A\le B$. 从而 $U=\sigma_r(A)\subset\sigma_r(B)=V$.

(FTO 3) 若 $U\subset U_1$, $V_1\subset V$, 有

$$\begin{aligned}\iota_r(\eta)(U_1,V_1) &= \vee\{\eta(A_1,B_1):\sigma_r(A_1,B_1)=(U_1,V_1)\}\\ &\le \vee\{\eta(A,B):\sigma_r(A,B)=(U,V)\}=\iota_r(\eta)(U,V).\end{aligned}$$

(FTO 4) $\forall\, U,U_1,V\subset X,\varepsilon>0$, 存在 $A,A_1,B,D\in I^X$, 使

$$\sigma_r(A,A_1)=(U,U_1),\sigma(B,D)=(V,V),$$

且 $\iota_r(\eta)(U,V)-\varepsilon<\eta(A,B)$, $\iota_r(\eta)(U_1,V)-\varepsilon<\eta(A_1,D)$. 因

$$\sigma_r(A\vee A_1)=U\cup U_1,\sigma_r(B\vee D)=V,$$

则

$$\begin{aligned}\eta(A\vee A_1,B\vee D) &\ge \eta(A,B)\wedge\eta(A_1,D)>(\iota_r(\eta)(U,V)-\varepsilon)\wedge(\iota_r(\eta)(U_1,V)-\varepsilon)\\ &= \iota_r(\eta)(U,V)\wedge\iota_r(\eta)(U_1,V)-\varepsilon.\end{aligned}$$

由 ε 的任意性, 得

$$\eta(A\vee A_1,B)\ge\eta(A,B)\wedge\eta(A_1,B)>\iota_r(\eta)(U,V)\wedge\iota_r(\eta)(U_1,V).$$

从而

$$\iota_r(\eta)(U\vee U_1,V)\ge\eta(A\vee A_1,B)\ge\iota_r(\eta)(U,V)\wedge\iota_r(\eta)(U_1,V).$$

(FTO 5) 类似 (FTO 4) 可证. 另外, 若 η 双完全, $\forall U_j\subset X,j\in J$, 有

(FTO 6) $U_j,V\subset X,j\in J,\varepsilon>0$, 存在 $A_j,B\in I^X$, 使 $\iota_r(\eta)(U_j,V)-\varepsilon\le\eta(A_j,B)$. 于是

$$\iota_r(\eta)(\cup_{j\in J}U_j,V)\ge\wedge_{j\in J}\eta(A_j,B)\ge\wedge_{j\in J}(\iota_r(\eta)(U_j,V)-\varepsilon)=\wedge_{j\in J}\iota_r(\eta)(U_j,V)-\varepsilon.$$

由 ε 的任意性可知 $\iota_r(\eta)(\cup_{j\in J}U_j,V)\ge\wedge_{j\in J}\iota_r(\eta)(U_j,V)$. 类似可证 (FTO 7).

定理 2.7 设 (I^X,η) 是 I-fuzzy(双完全) 生成序空间. 则 $\iota(\eta)=\vee_{r\in I}\iota_r(\eta)$ 是 fuzzy(双完全) 生成序.

定理 2.8 设 $f^{\rightarrow}:(I^X,\eta_1)\to(I^Y,\eta_2)$ (弱) 连续, 则 $f:(X,\iota(\eta_1))\to(Y,\iota(\eta_2))$ 也 (弱) 连续.

定理 2.9 设 τ 是 X 上的 fuzzy 拓扑生成序, η 是 I^X 上的 I-fuzzy 扑生成序. 则以下结论成立:

(1) $[\omega(\tau)]=\tau$, $[\eta]\le\iota(\eta)$.

(2) $\omega([\eta])(1_U,1_V)=\eta(1_U,1_V)$.

(3) $\wedge_{r\in I}\eta(1_{\sigma_r(A)},1_{\sigma_r(B)})=\omega([\eta])(A,B)$.

(4) $\omega(\iota(\eta))\ge\eta$, $\iota(\omega(\tau))=\tau$.

(5) $\omega([\eta_1\wedge\eta_2])=\omega([\eta_1])\wedge\omega([\eta_2])$, $\omega([\eta_1\vee\eta_2])=\omega([\eta_1])\vee\omega([\eta_2])$.

(6) $\omega(\iota(\eta_1\wedge\eta_2))=\omega(\iota(\eta_1))\wedge\omega(\iota(\eta_2))$, $\omega(\iota(\eta_1\vee\eta_2))=\omega(\iota(\eta_1))\vee\omega(\iota(\eta_2))$.

(7) $\omega([\omega([\eta])])=\omega([\eta])$, $\omega(\iota(\omega(\iota(\eta))))=\omega(\iota(\eta))$.

(8) $\omega([\omega(\iota(\eta))])=\omega(\iota(\eta))$, $\omega(\iota(\omega([\eta])))=\omega([\eta])$.

说明 2 由定理 2.9(7) 和 (8) 知, 对给定的 η 实施 ω,ι 和 $[\,]$ 运算, 至多可得四个拓扑生成序, 分别是 $[\eta],\iota(\eta),\omega([\eta])$ 和 $\omega(\iota(\eta))$.

定理 2.10 设 $f:X\to Y$ 为满射, (X,τ) 是 fuzzy (双完全) 拓扑生成序空间, 则 $\tau/f=\tau\circ f^{-1}$ 是 Y 上的 fuzzy(双完全) 拓扑生成序, 并且 $\omega(\tau/f)=\omega(\tau)/f^{\rightarrow}$, 这里 $\omega(\tau)/f^{\rightarrow}=\omega(\tau)\circ f^{\leftarrow}$.

证 由定义易证 $\tau/f=\tau\circ f^{-1}$ 是 Y 上的 fuzzy(双完全) 拓扑生成序. 另外, $\forall A\in I^Y$, 有

$$\omega(\tau/f)(A)=\wedge_{r\in I}\tau/f(\sigma_r(A))=\wedge_{r\in I}\tau(\sigma_r(f^{\leftarrow}(A)))=\omega(\tau)(f^{\leftarrow}(A))=\omega(\tau)/f^{\rightarrow}(A).$$

定理 2.11 设 $f:X\to Y$ 是双射, (Y,τ) fuzzy(双完全) 拓扑生成序空间, 则 $f^{-1}(\tau)=\tau\circ f$ 是 X 上的 fuzzy(双完全) 拓扑生成序, 且 $f^{\leftarrow}(\omega(\tau))=\omega(f^{-1}(\tau))$, 这里 $f^{\leftarrow}(\omega(\tau))=\omega(\tau)\circ f^{\rightarrow}$.

证 $\forall A,B\in I^X$,

$$\begin{aligned} &f^{\leftarrow}(\omega(\tau))(A,B)=\omega(\tau)(f^{\rightarrow}(A),f^{\rightarrow}(B))=\wedge_{r\in I}\tau(\sigma_r(f^{\rightarrow}(A)),\sigma_r(f^{\rightarrow}(B)))\\ =\ &\wedge_{r\in I}\tau(f(\sigma_r(A)),f(\sigma_r(B)))\\ =\ &\wedge_{r\in I}f^{-1}(\tau)(\sigma_r(A),\sigma_r(B))=\omega(f^{-1}(\tau))(A,B).\end{aligned}$$

定理 2.12 设 $f^{\rightarrow}:I^X\to I^Y$ 满射, (I^X,η) 是 I-fuzzy(双完全) 拓扑生成序空间. 则 $\eta/f^{\rightarrow}=\eta\circ f^{\leftarrow}$ 是 I^Y 上 I-fuzzy(双完全) 拓扑生成序空间.

推论 2.1 设 $f^{\rightarrow}:I^X\to I^Y$ 为满射, (I^X,η) 是 I-fuzzy 拓扑生成序. 则

(1) $[\eta/f^{\rightarrow}]=[\eta]/f$.

(2) $\iota(\eta/f^{\rightarrow})=\iota(\eta)/f$.

(3) $\omega([\eta/f^{\rightarrow}])=\omega([\eta])/f^{\rightarrow}$.

(4) $\omega(\iota(\eta/f))=\omega(\iota(\eta))/f^{\rightarrow}$.

定理 2.13 设 $f^{\rightarrow}:I^X\to I^Y$ 为双射, (I^Y,η) 为 I-fuzzy(双完全) 拓扑生成序空间. 则 $f^{\leftarrow}(\eta)=\eta\circ f^{\rightarrow}$ 是 I^X 上的 I-fuzzy(双完全) 拓扑生成序.

推论 2.2 设 $f^{\rightarrow}:I^X\to I^Y$ 为双射, (I^Y,η) 为 I-fuzzy 拓扑生成序空间. 则

(1) $f^{-1}([\eta])=[f^{\leftarrow}(\eta)]$.

(2) $f^{-1}(\iota(\eta))=\iota(f^{\leftarrow}(\eta))$.

(3) $\omega([f^{\leftarrow}(\eta)])=f^{\leftarrow}(\omega([\eta]))$.

(4) $\omega(\iota(f^{\leftarrow}(\eta)))=f^{\leftarrow}(\omega(\iota(\eta)))$.

3 诱导的 I-fuzzy 拓扑生成序空间

定义 3.1 称 I-fuzzy 拓扑生成序空间 (I^X,η) 是诱导的, 若 $A,B\in I^X$,

$$\wedge_{r\in I}\eta(1_{\sigma_r(A)},1_{\sigma_r(B)})=\eta(A,B).$$

称 (I^X,η) 为弱诱导的, 若 $\wedge_{r\in I}\eta(1_{\sigma_r(A)},1_{\sigma_r(B)})\geq\eta(A,B)$.

定理 3.1 I-fuzzy 拓扑生成序空间 (I^X,η) 是诱导的当且仅当它是可生成的.

证 必要性 设 $\tau=[\eta]$. 对于任意 $A,B\in I^X$,

$$\begin{aligned}&\eta(A,B)=\wedge_{r\in I}\eta(1_{\sigma_r(A)},1_{\sigma_r(B)})=\wedge_{r\in I}[\eta](\sigma_r(A),\sigma_r(B))\\ =\ &\wedge_{r\in I}\tau(\sigma_r(A),\sigma_r(B))=\omega(\tau)(A,B).\end{aligned}$$

充分性 设 $\eta=\omega(\tau)$. $\forall A,B\in I^X$, 则

$$\begin{aligned}&\eta(A,B)=\omega(\tau)(A,B)=\wedge_{r\in I}\tau(\sigma_r(A),\sigma_r(B))\\ =\ &\wedge_{r\in I}\omega(\tau)(1_{\sigma_r(A)},1_{\sigma_r(B)})=\wedge_{r\in I}\eta(1_{\sigma_r(A)},1_{\sigma_r(B)}).\end{aligned}$$

故 η 是诱导的.

定理 3.2 I-fuzzy 拓扑生成序空间 (I^X,η) 是弱诱导的当且仅当 $\omega([\eta])\ge\eta$.

定理 3.3 I-fuzzy 拓扑生成序 (I^X,η) 是弱诱导的当且仅当 $[\eta]=\iota(\eta)$.

证 必要性 只要证 $[\eta]\ge\iota(\eta)$. 事实上, $\forall\, U,V\subset X$, 有

$$\begin{aligned}\iota(\eta)(U,V)&=\vee_{r\in I}\iota_r(\eta)(U,V)=\vee_{r\in I}\vee\{\eta(A,B):\sigma_r(A,B)=(U,V)\}\\ &\le\vee_{r\in I}\vee\{\wedge_{r\in I}\eta(1_{\sigma_r(A)},1_{\sigma_r(B)}):\sigma_r(A,B)=(U,V)\}\\ &=\vee_{r\in I}\vee\{\eta(1_U,1_V):\sigma_r(A,B)=(U,V)\}\\ &=\eta(1_U,1_V)=[\eta](U,V).\end{aligned}$$

充分性 $\forall A,B\in I^X$,

$$\begin{aligned}\wedge_{r\in I}\eta(1_{\sigma_r(A)},1_{\sigma_r(B)})&=\wedge_{r\in I}[\eta](\sigma_r(A),\sigma_r(B))=\wedge_{r\in I}\iota(\eta)(\sigma_r(A),\sigma_r(B))\\ &=\wedge_{r\in I}\vee_{s\in I}\iota_s(\eta)(\sigma_r(A),\sigma_r(B))\\ &\ge\wedge_{r\in I}\iota_r(\eta)(\sigma_r(A),\sigma_r(B))\ge\eta(A,B).\end{aligned}$$

定理 3.4 设 $f^\rightarrow:I^X\to I^Y$ 是满射, (I^X,η) 为 (弱) 诱导的, 则 $\eta/f^\rightarrow$ 是 (弱) 诱导的.

定理 3.5 设 $f^\rightarrow:I^X\to I^Y$ 是双射, (I^Y,η) 为 (弱) 诱导的, 则 $f^\leftarrow(\eta)$ 也是 (弱) 诱导的.

定理 3.6 设 (I^X,η) 为 I-fuzzy 拓扑生成序空间. 记 $\eta_*=\eta\wedge\omega([\eta])$, 则 η_* 是满足 $\eta_*\le\eta$ 最大的弱诱导的 I-fuzzy 拓扑生成序.

推论 3.1 设 (I^X,η) 是弱诱导的 I-fuzzy 空间. 则 $\eta_*=\eta$.

定理 3.7 设 (I^X,η) 为 I-fuzzy 拓扑生成序空间. 则 $\eta^*=\omega(\iota(\eta))$ 是满足 $\eta^*\ge\eta$ 最小的诱导的 I-fuzzy 拓扑生成序.

证 由定理 2.9 知, η^* 是诱导的, 且 $\eta\le\eta^*$. 若 δ 是诱导的 I-fuzzy 拓扑生成序, 且 $\eta\le\delta$. 则

$$\begin{aligned}\eta^*(A,B)&=\omega(\iota(\eta))(A,B)=\wedge_{r\in I}\iota(\eta)(\sigma_r(A),\sigma_r(B))\\ &=\wedge_{r\in I}\vee_{s\in I}\iota_s(\eta)(\sigma_r(A),\sigma_r(B))\\ &=\wedge_{r\in I}\vee_{s\in I}\vee\{\eta(G,H):\sigma_s(G,H)=\sigma_r(A,B)\}\\ &\le\wedge_{r\in I}\vee_{s\in I}\vee\{\delta(G,H):\sigma_s(G,H)=\sigma_r(A,B)\}\\ &=\wedge_{r\in I}\vee_{s\in I}\vee\{\wedge_{t\in I}\delta(1_{\sigma_t(G)},1_{\sigma_t(H)}):\sigma_s(G,H)=\sigma_r(A,B)\}\\ &\le\wedge_{r\in I}\vee_{s\in I}\vee\{\delta(1_{\sigma_r(G)},1_{\sigma_r(H)}):\sigma_s(G,H)=\sigma_r(A,B)\}\\ &=\wedge_{r\in I}\delta(1_{\sigma_r(A)},1_{\sigma_r(B)})=\omega([\delta])(\sigma_r(A),\sigma_r(B))=\delta(A,B).\end{aligned}$$

推论 3.2 I-fuzzy 拓扑生成序空间 (I^X,η) 是诱导的当且仅当 $\eta^*=\eta$.

定理 3.8 设 η_1,η_2 和 η 都是 I^X 上的 I-fuzzy 拓扑生成序空间. 则

(1) $(\eta_1\wedge\eta_2)_*=\eta_{1*}\wedge\eta_{2*}$, $(\eta_1\vee\eta_2)_*\geq\eta_{1*}\vee\eta_{2*}$.

(2) $(\eta_1\wedge\eta_2)^*=\eta_1^*\wedge\eta_2^*$, $(\eta_1\vee\eta_2)^*=\eta_1^*\vee\eta_2^*$.

(3) $\omega([\eta])_*=\omega([\eta_*])=\omega([\eta])^*=\omega(\iota(\eta_*))=\omega([\eta])$.

(4) $\omega(\iota(\eta))_*=\omega(\iota(\eta))^*=\omega(\iota(\eta^*))=\omega([\eta^*])=\omega(\iota(\eta))$.

(5) $\eta^{**}=\eta^*$, $\eta_{**}=\eta_*$.

(6) $(\eta^*)_*=((\eta^*)_*)^*=(((\eta^*)_*)^*)_*=\cdots=\omega(\iota(\eta))$,

$$(\eta_*)^*=((\eta_*)^*)_*=(((\eta_*)^*)_*)^*=\cdots=\omega([\eta]).$$

说明 2 由定理 3.8 (5) 和 (6) 知, 给定 I-fuzzy 拓扑生成序 η. 如果对 η 实施 $_*$ 和 * 运算, 则至多可以得到四种不同的 I-fuzzy 拓扑生成序, 它们分别是 $\eta_*,\eta^*,\omega([\eta])$ 和 $\omega(\iota(\eta))$.

定理 3.9 设 $f^{\rightarrow}:I^X\rightarrow I^Y$ 为满射, (I^X,η) 是 I-fuzzy 拓扑生成序空间. 则

(1) $(\eta/f^{\rightarrow})_*=\eta_*/f^{\rightarrow}$.

(2) $(\eta/f^{\rightarrow})^*=\eta^*/f^{\rightarrow}$.

定理 3.10 设 $f^{\rightarrow}:I^X\rightarrow I^Y$ 为双射, (I^Y,η) 是 I-fuzzy 拓扑生成序空间. 则

(1) $f^{\leftarrow}(\eta)_*=f^{\leftarrow}(\eta_*)$.

(2) $f^{\leftarrow}(\eta)^*=f^{\leftarrow}(\eta^*)$.

定理 3.11 设 $f^{\rightarrow}:(I^X,\eta)\rightarrow(I^Y,\delta)$. (I^Y,δ) 是弱诱导的. 则 $f^{\rightarrow}:(I^X,\eta)\rightarrow(I^Y,\delta)$(弱) 连续当且仅当 $f^{\rightarrow}:(I^X,\eta_*)\rightarrow(I^Y,\delta_*)$(弱) 连续.

定理 3.12 若 $f^{\rightarrow}:(I^X,\eta)\rightarrow(I^Y,\delta)$ (弱) 连续, 则 $f^{\rightarrow}:(I^X,\eta^*)\rightarrow(I^Y,\delta^*)$(弱) 连续. 并且, 若 δ 是弱诱导的, η 是诱导的, 则逆定理也成立.

证 只证连续的情况. $\forall A,B\in I^Y$, 有

$$\begin{aligned}
\delta^*(A,B) &= \omega(\iota(\delta))(A,B)\\
&= \wedge_{r\in I}\iota(\delta)(\sigma_r(A).\sigma_r(B))\\
&= \wedge_{r\in I}\vee_{s\in I}\iota_s(\delta)(\sigma_r(A).\sigma_r(B))\\
&= \wedge_{r\in I}\vee_{s\in I}\vee\{\delta(G,H):\sigma_s(G,H)=\sigma_r(A,B)\}\\
&\leq \wedge_{r\in I}\vee_{s\in I}\vee\{\eta(f^{\leftarrow}(G),f^{\leftarrow}(H)):\sigma_s(G,H)=\sigma_r(A,B)\}\\
&= \wedge_{r\in I}\vee_{s\in I}\vee\{\eta(P,Q):\sigma_s(P,Q)=\sigma_r(f^{\leftarrow}(A),f^{\leftarrow}(B))\}\\
&= \omega(\iota(\eta))(f^{\leftarrow}(A),f^{\leftarrow}(B))\\
&= \eta^*(f^{\leftarrow}(A),f^{\leftarrow}(B)).
\end{aligned}$$

反之, $\delta(A,B)\leq\omega([\delta])(A,B)=\omega(\iota(\delta))(A,B)\leq\omega(\iota(\eta))(f^{\leftarrow}(A),f^{\leftarrow}(B))=\eta(f^{\leftarrow}(A),f^{\leftarrow}(B))$.

定义 3.2 称 I-fuzzy 拓扑生成序空间 (I^X,η) 是满层的, 若任意 $\underline{\lambda}\in I^X$, $\eta(\underline{\lambda},\underline{\lambda})=1$.

定理 3.13 I-fuzzy 双完全拓扑生成序空间 (I^X,η) 是满层的当且仅当 $\omega([\eta])\leq\eta$.

证 必要性 $\forall A,B\in I^X$,

$$\begin{aligned}\eta(A,B) &= \eta(\vee_{r\in I}(\underline{r}\wedge 1_{\sigma_r(A)}),\wedge_{r\in I}(\underline{r}\vee 1_{\sigma_r(B)}))\\ &\geq \wedge_{r\in I}\eta(\underline{r}\wedge 1_{\sigma_r(A)},\underline{r}\vee 1_{\sigma_r(A)})\\ &\geq \wedge_{r\in I}(\eta(\underline{r},\underline{r}\vee 1_{\sigma_r(B)})\wedge\eta(1_{\sigma_r(A)},\underline{r}\vee 1_{\sigma_r(B)}))\\ &\geq \wedge_{r\in I}(\eta(\underline{r},\underline{r})\wedge\eta(1_{\sigma_r(A)},1_{\sigma_r(B)}))\\ &\geq \wedge_{r\in I}\eta(1_{\sigma_r(A)},1_{\sigma_r(B)})\\ &= \wedge_{r\in I}[\eta](\sigma_r(A),\sigma_r(B))\\ &= \omega([\eta])(A,B).\end{aligned}$$

充分性 $\forall\underline{\lambda}\in I^X$, $\omega([\eta])(\underline{\lambda},\underline{\lambda})=\wedge_{r\leq\lambda}[\eta](X,X)\wedge\wedge_{r>\lambda}[\eta](\emptyset,\emptyset)=1$. 因此 $\eta(\underline{\lambda},\underline{\lambda})\geq\omega([\eta])(\underline{\lambda},\underline{\lambda})=1$. 从而 (I^X,η) 是满层的.

定理 3.14 I-fuzzy 双完全拓扑生成序空间 (I^X,η) 是诱导的当且仅当它满层且是弱诱导的.

推论 3.3 I-fuzzy 双完全拓扑生成序空间 (I^X,η) 是可生成的当且仅当 $\omega([\eta])=\eta$.

问题 如果 η 不是双完全的, 那么定理 3.13 的必要性任然成立吗?

定理 3.15 设 $f^{\rightarrow}:I^X\rightarrow I^Y$ 为双射, (I^X,η) 是 I-fuzzy 拓扑生成序空间. 则 (I^X,η) 满层当且仅当 $(I^Y,\eta/f^{\rightarrow})$ 满层.

定理 3.16 设 $f^{\rightarrow}:I^X\rightarrow I^Y$ 为双射, (I^Y,η) 是 I-fuzzy 拓扑生成序空间. 则 (I^Y,η) 满层当且仅当 $(I^X,f^{\leftarrow}(\eta))$ 满层.

4 诱导的 I-Fuzzy 子拓扑生成序空间与 Fuzzifying 拓扑空间的关系

本节中 I-fuzzy 拓扑生成序都为双完全的. 文献 [8–9] 中定义了 fuzzifying 和 I-fuzzy 拓扑定义如下:

称映射 $\varrho:X\rightarrow I$ 为 X 上的一个 fuzzifying 拓扑, 若 ϱ 满足

(FT1) $\varrho(\emptyset)=\varrho(X)=1$.

(FT2) $\forall\,U,V\subset X$, $\varrho(U\cup V)\geq\varrho(U)\wedge\varrho(V)$.

(FT3) $\forall j\in J,U_j\subset X$, $\varrho(\wedge_{j\in J}U_j)\geq\wedge_{j\in J}\varrho(U_j)$.

这时称 (X,ϱ) 一个 fuzzifying 拓扑空间 [8].

称映射 $\zeta:I^X\rightarrow I$ 为 I^X 上的一个 I-fuzzy 拓扑, 若 ζ 满足

(IFT1) $\zeta(\underline{0})=\zeta(\underline{1})=1$.

(IFT2) $\forall A,B\in I^X$, $\zeta(A\vee B)\geq\zeta(A)\wedge\zeta(B)$.

(IFT3) $\forall A_j\in I^X,j\in J$, $\zeta(\wedge_{j\in J}A_j)\geq\wedge_{j\in J}\zeta(A_j)$.

这时称 (X,ζ) 一个 I-fuzzy 拓扑空间. 有关诱导的 I-fuzzy 拓扑等相关概念参见文献 [9].

定理 4.1 设 τ 是 X 上的 fuzzy 双完全拓扑生成序. 定义 $T(\tau):X\rightarrow I$ 为: 任意 $U\subset X$, $T(\tau)(U)=\tau(U,U)$. 则 $T(\tau)$ 为 X 上的 fuzzifying 拓扑. 并且 $\omega(T(\tau))=T(\omega(\tau))$. 另外, 若 $\tau_1\leq\tau_2$ 都是 X 上的 fuzzy 双完全拓扑生成序, 则 $T(\tau_1)\leq T(\tau_2)$.

证 (FT1) $T(\tau)(\emptyset)=\tau(\emptyset,\emptyset)=1$, $T(\tau)(X)=\tau(X,X)=1$.

(FT2) $\forall\, U, V\subset X$,

$$\begin{aligned} T(\tau)(U\cup V) &= \tau(U\cup V, U\cup V)\geq \tau(U, U\cup V)\wedge\tau(V, U\cup V)\\ &\geq \tau(U,U)\wedge\tau(V,V)=T(\tau)(U)\wedge T(\tau)(V). \end{aligned}$$

(FT3) $\forall\, U_j\subset X, j\in J$,

$$\begin{aligned} T(\tau)(\wedge_{j\in J}U_j) &= \tau(\wedge_{j\in J}U_j, \wedge_{j\in J}U_j)\geq \wedge_{j\in J}\tau(\wedge_{j\in J}U_j, U_j)\\ &\geq \wedge_{j\in J}\tau(U_j,U_j)=\wedge_{j\in J}T(\tau)(U_j). \end{aligned}$$

因此 $T(\tau)$ 是 fuzzifying 拓扑. 另外, 任意 $A\in I^X$, 有

$$\omega(T(\tau))(A)=\wedge_{r\in I}T(\tau)(\sigma_r(A))=\wedge_{r\in I}\tau(\sigma_r(A),\sigma_r(A))=\omega(\tau)(A,A)=T(\omega(\tau))(A).$$

故 $\omega(T(\tau))=T(\omega(\tau))$. 其余的证明显然.

定理 4.2 设 η 是 I^X 上的 I-fuzzy 双完全拓扑生成序. 定义 $T(\eta): I^X\to I$ 为: 任意 $A\subset X$, $T(\eta)(A)=\tau(A,A)$. 则 $T(\eta)$ 为 I^X 上的 I-fuzzy 拓扑. 并且

(1) $T([\eta])=[T(\eta)]$.

(2) $T(\iota(\eta))\geq\iota(T(\eta))$.

若 $\eta_1\leq\eta_2$ 都是 I^X 上的 I-fuzzy 双完全拓扑生成序, 则 $T(\eta_1)\leq T(\eta_2)$.

证 只证 (1) 和 (2), 其余类似于定理 4.1 可证. 任意 $U\subset X$,

(1) $T([\eta])(U)=[\eta](U,U)=\eta(1_U,1_U)=T(\eta)(1_U)=[T(\eta)](U)$. 故 $T([\eta])=[T(\eta)]$.

(2)

$$\begin{aligned} T(\iota(\eta))(U) &= \iota(\eta)(U,U)=\vee_{r\in I}\iota_r(\eta)(U,U)\\ &= \vee_{r\in I}\vee\{\eta(A,B):\sigma_r(A,B)=(U,U)\}\\ &\geq \vee_{r\in I}\vee\{\eta(A,A):\sigma_r(A)=U\}\\ &= \vee_{r\in I}\vee\{T(\eta)(A):\sigma_r(A)=U\}\\ &= \iota(T(\eta))(U). \end{aligned}$$

定理 4.3 若 (I^X,η) 是弱诱导的, 则 I-fuzzy 拓扑空间 $(I^X, T(\eta))$ 是弱诱导的.

定理 4.4 若 (I^X,η) 满层, 则 I-fuzzy 拓扑空间 $(I^X, T(\eta))$ 满层.

推论 4.1 若 (I^X,η) 是诱导的, 则 I-fuzzy 拓扑空间 $(I^X, T(\eta))$ 也是诱导的.

定理 4.5 设 $f: X\to Y$ 为满射, (X,τ) 双完全, 则 $T(\tau/f)=T(\tau)/f$, 且

$$\omega(T(\tau/f))=\omega(T(\tau))/f^{\to}.$$

证 由定理 2.11 和定理 4.1 知, $T(\tau/f)$ 为 Y 上的 fuzzifying 拓扑. 任意 $U\subset Y$,

$$T(\tau/f)(U)=\tau/f(U,U)=\tau(f^{-1}(U),f^{-1}(U))=T(\tau)(f^{-1}(U))=T(\tau)/f(U).$$

从而 $T(\tau/f)=T(\tau)/f$.

最后, 对于任意 $A \in I^Y$,

$$\begin{aligned}\omega(T(\tau/f))(A) &= \wedge_{r\in I}T(\tau/f)(\sigma_r(A)) = \wedge_{r\in I}T(\tau)/f(\sigma_r(A)) \\ &= \wedge_{r\in I}T(\tau)\circ f^{-1}(\sigma_r(A)) \\ &= \wedge_{r\in I}T(\tau)(\sigma_r(f^{\leftarrow}(A))) = \omega(T(\tau))/f^{\leftarrow}(A).\end{aligned}$$

得证.

定理 4.6 设 $f: X \to Y$ 为双射, (Y,τ) 双完全, 则 $T(f^{-1}(\tau)) = f^{-1}(T(\tau))$, 且 $T(f^{\leftarrow}(\omega(\tau))) = \omega(f^{-1}(T(\tau)))$.

证 由定理 2.12 和定理 4.1 知, $T(f^{-1}(\tau))$ 是 X 上的 fuzzifying 拓扑. 另外, 任意 $U \subset X$,

$$T(f^{-1}(\tau))(U) = f^{-1}(\tau)(U,U) = \tau(f(U),f(U)) = T(\tau)(f(U)) = f^{-1}(T(\tau))(U).$$

最后, 对于任意 $A \in I^X$,

$$\begin{aligned}T(f^{\leftarrow}(\omega(\tau)))(A) &= f^{\leftarrow}(\omega(\tau))(A,A) = \omega(\tau)(f^{\rightarrow}(A),f^{\rightarrow}(A)) \\ &= \wedge_{r\in I}T(\tau)(\sigma_r(f^{\rightarrow}(A))) \\ &= \wedge_{r\in I}T(\tau)(f(\sigma_r(A))) \\ &= \wedge_{r\in I}f^{-1}(T(\tau))(\sigma_r(A)) = \omega(f^{-1}(T(\tau)))(A).\end{aligned}$$

定理 4.7 设 $f^{\rightarrow}: I^X \to I^Y$ 满射, (I^X,η) 是 I-fuzzy 双完全拓扑生成序空间. 则 $T(\eta/f^{\rightarrow}) = T(\eta)/f^{\rightarrow}$ 是 I^Y 上 I-fuzzy 拓扑.

定理 4.8 设 $f^{\rightarrow}: I^X \to I^Y$ 双射, (I^Y,η) 为 I-fuzzy 双完全拓扑生成序空间. 则 $T(f^{\leftarrow}(\eta)) = f^{\leftarrow}(T(\eta))$ 是 I^X 上的 I-fuzzy 拓扑.

定理 4.9 若 $f^{\rightarrow}:(I^X,\eta_1) \to (I^Y,\eta_2)$(弱) 连续, 则 $f^{\rightarrow}:(I^X,T(\eta_1)) \to (I^Y,T(\eta_2))$(弱) 连续.

参 考 文 献

[1] Császár A. Foundations of General topology [M]. New York: Pergamon Press, 1963.

[2] Katsaras A K, Petalas C G. On fuzzy syntopogenous structures [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1984, 99: 219–236.

[3] Katsaras A K. Totally bounded fuzzy syntopogenous structures [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1988, 36: 91–103.

[4] Katsaras A K. Fuzzy syntopogenous structures compatible with Lowen fuzzy uniformities and Artico-Moresco fuzzy proximities [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1990, 36: 375–393.

[5] Katsaras A K. Operations on fuzzy syntopogenous structures [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1991, 43: 199–217.

[6] Liu Y M, Pu B M. Fuzzy topology I [M]. Singapore: World Scientific, 1997.

[7] Lowen R. Fuzzy topological spaces and fuzzy compactness [J]. J. Math. Anal. Appl., 1976, 56: 621–633.

[8] Ying M S. A new approach to fuzzy topology [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1991, 39: 303–321.

[9] Yue Y L, Fang J M. Generated I-fuzzy topological spaces [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2005, 154: 103–117.

[10] 王国俊. L-fuzzy 拓扑空间论 [M]. 西安: 陕西师范大学出版社, 1988.

ON INDUCED I-FUZZY TOPOGENOUS ORDER SPACES

WU Xiu-Yun [1,2], BAI Shi-zhong [3]

(*1. Dept. of Mathematics and Computing Science, Institute of Computational Mathematics, Hunan Institute of Science and Engineering, Yongzhong 425100, China*)

(*2. Dept. of Mathematics and Computing Science, Xiangtan University, Xiangtan 411105, China*)

(*3. Dept. of Mathematics and Computing Science Wuyi university, Jiangmen 529020, China*)

Abstract: In this article, we study the relations between fuzzy topogenous spaces and their induced I-fuzzy topogenous spaces. By using the internal relationships of three Lowen functions, we introduce three I-fuzzy topogenous spaces and establish the theory of induced I-fuzzy topogenous spaces. We obtain the subordinate relations between I-fuzzy topologies and I-fuzzy topogenous orders.

Keywords: weakly induced I-fuzzy topogenous space; induced I-fuzzy topogenous space; stratified I-fuzzy topogenous space; I-fuzzy topological space

2010 MR Subject Classification: 54C08