Vol. 35 ( 2015 )
No. 2

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

# 分数次积分交换子在加权 Herz 型 Hardy 空间上的有界性质

胡 越[1], 王月山[2], 王艳烩[1]
(1. 河南理工大学数学与信息科学学院, 河南 焦作 454010)
(2. 焦作大学基础科学系, 河南 焦作 454003)

**摘 要**: 本文研究了由分数次积分 $I_l$ 与加权 Lipschitz 函数 $b$ 生成的交换子 $[b, I_l]$ 在加权 Herz 型 Hardy 空间上的估计. 利用加权 Herz 型 Hardy 空间的分解理论, 得到了交换子 $[b, I_l]$ 从加权 Herz 型 Hardy 空间到 (弱) 加权 Herz 空间上的有界性质.

**关键词**: 分数次积分; 交换子; 加权 Lipschitz 函数; Herz 空间; Herz 型 Hardy 空间
MR(2010) **主题分类号**: 42B20; 42B30 **中图分类号**: O174.2
**文献标识码**: A **文章编号**: 0255-7797(2015)02-0443-08

## 1 引言

设 $0 < l < n$, 分数次积分 $I_l$ 定义为

$$I_l f(x) = \int_{\mathbf{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-l}} dy.$$

考虑分数次积分 $I_l$ 与局部可积函数 $b$ 生成的交换子 $[b, I_l]f(x) = b(x)I_l f(x) - I_l(bf)(x)$. 当 $1/q = 1/p - l/n, 1 < p < n/l$ 时, Chanillo 在文献 [1] 中证明了 $[b, I_l]$ 是 $L^p$ 到 $L^q$ 有界的充分必要条件是 $b \in \mathrm{BMO}$. 当 $b$ 属于加权 Lipschitz 空间 $\mathrm{Lip}_\beta(\mu)(0 < \beta < 1)$ 时, 陈爱清等在文献 [2] 中研究了 $[b, I_l]$ 在加权 Hardy 空间上的有界性质. 当 $b$ 属于 Lipschitz 空间 $\mathrm{Lip}_\beta(0 < \beta < 1)$ 时, 陆善镇等在文献 [3] 中研究了 $[b, I_l]$ 在 Herz 型 Hardy 空间上的有界性质, 他们的主要结果是

设 $0 < l < n - \beta, 1 < q_1, q_2 < \infty, 1/q_2 = 1/q_1 - (l + \beta)/n$.

(i) 若 $0 < p < \infty, n(1 - 1/q_1) \le \alpha < n(1 - 1/q_1) + \beta$, 则 $[b, I_l]$ 是从 $H\dot{K}_{q_1}^{\alpha,p}$ 到 $\dot{K}_{q_2}^{\alpha,p}$ 的有界算子;

(ii) 若 $0 < p \le 1, \alpha = n(1 - 1/q_1) + \beta$, 则 $[b, I_l]$ 是从 $H\dot{K}_{q_1}^{\alpha,p}$ 到 $W\dot{K}_{q_2}^{\alpha,p}$ 的有界算子.

本文的目的是研究当 $b$ 属于加权 Lipschitz 函数空间时, $[b, I_l]$ 在加权 Herz 型 Hardy 空间上的有界性质, 得到了如下结果:

**定理 1.1** 设 $\mu \in A_1, b \in \mathrm{Lip}_\beta(\mu)(0 < \beta < 1), 0 < l < n - \beta$. 若 $0 < p < \infty, 1 < q_1, q_2 < \infty, 1/q_2 = 1/q_1 - (l + \beta)/n$, 则当 $n(1 - 1/q_1) \le \alpha < n(1 - 1/q_1) + \beta$ 时, $[b, I_l]$ 是从 $H\dot{K}_{q_1}^{\alpha,p}(\mu, \mu)$ 到 $\dot{K}_{q_2}^{\alpha,p}(\mu, \mu^{1-(1-l/n)q_2})$ 的有界算子.

*收稿日期: 2012-09-20 接收日期: 2013-12-24
基金项目: 国家自然科学基金资助 (11071057).
作者简介: 胡越 (1960–), 男, 河南泌阳, 教授, 主要研究方向: 调和分析及偏微分方程.

**定理 1.2** 设 $\mu \in A_1, b \in \mathrm{Lip}_\beta(\mu)(0 < \beta < 1), 0 < l < n-\beta$. 若 $0 < p \le 1, 1 < q_1, q_2 < \infty, 1/q_2 = 1/q_1 - (l+\beta)/n$, 则当 $\alpha = n(1-1/q_1)+\beta$ 时, $[b, I_l]$ 是从 $H\dot{K}_{q_1}^{\alpha,p}(\mu,\mu)$ 到 $W\dot{K}_{q_2}^{\alpha,p}(\mu, \mu^{1-(1-l/n)q_2})$ 的有界算子.

## 2 一些预备结果

称定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的局部可积函数 $\mu$ 属于 Muckenhoupt $A_1$ 权, 如果

$$M(\mu)(x) \le C\mu(x) \quad \text{a.e. } x \in \mathbf{R}^n.$$

其中 $M$ 表示标准的 Hardy-Littlewood 极大算子.

设 $k \in \mathbb{Z}$, 记 $B_k = B(0, 2^k), C_k = B_k \backslash B_{k-1}, \chi_k = \chi_{C_k}$. $A_1$ 权函数具有下面性质

**引理 2.1** 如果 $\mu \in A_1$, 则存在常数 $C$ 以及 $0 < \delta < 1$, 使得当 $k < j$ 时,

$$\frac{\mu(B_k)}{\mu(B_j)} \le C 2^{(k-j)n\delta};$$

当 $k > j$ 时,

$$\frac{\mu(B_k)}{\mu(B_j)} \le C 2^{(k-j)n}.$$

下面介绍加权 Herz 空间和加权 Herz 型 Hardy 空间的概念, 这些概念可参见文献 [4–6].

**定义 2.1** 设 $\alpha \in \mathbf{R}, 0 < p, q < \infty, \mu_1, \mu_2$ 为权函数, 齐次加权 Herz 空间定义为

$$\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mu_1,\mu_2) = \left\{ f \in L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n \backslash \{0\}, \mu_2) : \|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mu_1,\mu_2)} < \infty \right\},$$

其中

$$\|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mu_1,\mu_2)} = \left\{ \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mu_1(B_j)^{\frac{\alpha p}{n}} \|f\chi_{C_j}\|^p_{L^q_{\mu_2}} \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

**定义 2.2** 设 $\alpha \in \mathbf{R}, 0 < p, q < \infty, \mu_1, \mu_2$ 为权函数, 记 $m_{j,\mu_2}(\lambda, f) = \mu_2(\{x \in C_j : |f(x)| > \lambda\})$. 称 $\mu_2$ 可测函数 $f$ 属于齐次加权弱 Herz 空间, 如果

$$\|f\|_{W\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mu_1,\mu_2)} = \sup_{\lambda>0} \left\{ \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mu_1(B_j)^{\frac{\alpha p}{n}} m_{j,\mu_2}(\lambda, f)^{\frac{p}{q}} \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

**定义 2.3** 设 $\alpha \in \mathbf{R}, 0 < p, q < \infty, \mu_1, \mu_2$ 为权函数, 齐次加权 Herz 型 Hardy 空间定义为

$$H\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mu_1,\mu_2) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n) : G(f) \in \dot{K}_q^{\alpha,p}(\mu_1,\mu_2)\} \text{ 且 } \|f\|_{H\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mu_1,\mu_2)} = \|G(f)\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mu_1,\mu_2)},$$

其中 $G(f)$ 为 $f$ 的 Grand 极大函数.

当 $\mu_1 = \mu_2 = 1$ 时, 上述空间分别对应为齐次 Herz 空间, 齐次弱 Herz 空间以及齐次 Herz 型 Hardy 空间.

加权 Herz 型 Hardy 空间最重要的性质是中心原子分解.

**定义 2.4** 设 $\alpha \in \mathbf{R}, 1 < q < \infty$. $\mathbf{R}^n$ 上的函数 $a$ 称为 $(\alpha, q; \mu_1, \mu_2)$ - 原子, 如果

(1) 存在 $r > 0$, 使得 $\mathrm{supp}a \subset B(0, r)$;

(2) $\|a\|_{L^q_{\mu_2}} \le \mu_1(B)^{-\frac{\alpha}{n}}$;

(3) 当 $|\gamma| \le [\alpha - n(1-1/q)]$ 时 $\int_{R^n} a(x)x^\gamma dx = 0$.

**引理 2.2** [6] 设 $0 < p < \infty, 1 < q < \infty, \alpha \ge n(1-1/q), \mu_1, \mu_2 \in A_1$. $\mathbf{R}^n$ 上的分布函数 $f$ 属于 $H\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mu_1,\mu_2)$ 当且仅当存在支集为 $B_k$ 的中心 $(\alpha, q; \mu_1, \mu_2)$ - 原子 $a_k$ 和常数 $\lambda_k$, $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |\lambda_k|^p < \infty$, 使得 $f = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k a_k$ 在分布意义下成立, 并且

$$\|f\|^p_{H\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mu_1,\mu_2)} \sim \inf\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\lambda_k|^p\right),$$

其中下确界取自 $f$ 的所有中心原子分解.

最后介绍加权 Lipschitz 空间及其性质.

**定义 2.5** 设 $\mu$ 为一个权函数, $1 \le p < \infty$, 一个局部可积函数函数 $b$ 属于加权 Lipschitz 空间, 记为 $b \in \mathrm{Lip}_{\beta,p}(\mu)$, 如果

$$\sup_B \frac{1}{\mu(B)^{\beta/n}} \left[\frac{1}{\mu(B)} \int_B |b(x) - b_B|^p \mu(x)^{1-p} dx\right]^{1/p} \le C < \infty,$$

这里 $b_B = |B|^{-1}\int_B b(x)dx$, 上确界取遍所有的 $B \subset \mathbf{R}^n$. 上式中 $C$ 的最小下界称为 $b$ 的 $\mathrm{Lip}_{\beta,p}(\mu)$ 范数, 记为 $\|b\|_{\mathrm{Lip}_{\beta,p}(\mu)}$.

当 $\beta = 0$ 时, $\mathrm{Lip}_{\beta,p}(\mu)$ 即为加权 BMO 空间; 当 $\mu = 1$ 时, $\mathrm{Lip}_{\beta,p}(\mu)$ 即为通常的 Lipschitz 空间. 由文献 [7], 如果 $\mu \in A_1$, 则对任意的 $1 \le p \le q < \infty$ 有 $Lip_{\beta,p}(\mu) = \mathrm{Lip}_{\beta,q}(\mu)$, 并且其范数等价. 由于在下文中所涉及的权函数均属于 $A_1$, 为方便起见, 我们总记 $\mathrm{Lip}_{\beta,p}(\mu)$ 为 $\mathrm{Lip}_\beta(\mu)$, 其范数记为 $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\mu)}$. 加权 Lipschitz 函数有如下性质.

**引理 2.3** [8,9] 设 $1 < q_1, q_2 < \infty, 0 < \beta < 1, 0 < l < n - \beta$ 且 $1/q_2 = 1/q_1 - (l+\beta)/n$. 若 $\mu \in A_1$, 则 $[b, I_l]$ 是 $L^{q_1}(\mu)$ 到 $L^{q_2}(\mu^{1-(1-l/n)q_2})$ 有界的充分必要条件是 $b \in \mathrm{Lip}_\beta(\mu)$.

**引理 2.4** [2] 若 $\mu \in A_1, b \in \mathrm{Lip}_\beta(\mu), j > k$, 则 $|b_{B_j} - b_{B_k}| \le C\|b\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\mu)} 2^{j\beta - k(n+\beta)} \mu(B_k)^{1+\frac{\beta}{n}}$.

## 3 定理 1.1 的证明

由引理 2.2, $f$ 可以分解为 $f = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k a_k$, 其中 $a_k$ 为支集是 $B_k$ 的中心 $(\alpha, q_1; \mu, \mu)$ - 原子, 并且 $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |\lambda_k|^p < \infty$. 所以

$$\begin{aligned}
&\big\|[b, I_l]f\big\|^p_{\dot{K}_{q_2}^{\alpha,p}(\mu,\mu^{1-(1-l/n)q_2})} \\
&\le C\sum_{j=-\infty}^{\infty} \mu(B_j)^{\frac{\alpha p}{n}} \left(\sum_{k=-\infty}^{j-3} |\lambda_k| \big\|([b, I_l]a_k)\chi_j\big\|_{L^{q_2}(\mu^{1-(1-l/n)q_2})}\right)^p \\
&\quad + C\sum_{j=-\infty}^{\infty} \mu(B_j)^{\frac{\alpha p}{n}} \left(\sum_{k=j-2}^{\infty} |\lambda_k| \big\|([b, I_l]a_k)\chi_j\big\|_{L^{q_2}(\mu^{1-(1-l/n)q_2})}\right)^p \\
&= M_1 + M_2,
\end{aligned}$$

由 $[b,I_l]$ 的 $L^{q_1}(\mu)$ 到 $L^{q_2}(\mu^{1-(1-l/n)q_2})$ 有界性,

$$M_2\le C\|b\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\mu)}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\mu(B_j)^{\frac{\alpha p}{n}}\left(\sum_{k=j-2}^{\infty}|\lambda_k|\|a_k\|_{L^{q_1}(\mu)}\right)^p$$
$$\le C\|b\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\mu)}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\mu(B_j)^{\frac{\alpha p}{n}}\left(\sum_{k=j-2}^{\infty}|\lambda_k|\mu(B_k)^{-\frac{\alpha}{n}}\right)^p.$$

当 $0<p\le 1$ 时, 由引理 2.1,

$$M_2\le C\|b\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\mu)}\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\lambda_k|^p\sum_{j=-\infty}^{k+2}\frac{\mu(B_j)}{\mu(B_k)}\le C\|b\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\mu)}\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\lambda_k|^p.$$

当 $p>1$ 时, 由 Hölder 不等式以及引理 2.1,

$$M_2\le C\|b\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\mu)}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=j-2}^{\infty}|\lambda_k|^p\left(\frac{\mu(B_j)}{\mu(B_k)}\right)^{\frac{\alpha p}{2n}}\right]\left[\sum_{k=j-2}^{\infty}\left(\frac{\mu(B_j)}{\mu(B_k)}\right)^{\frac{\alpha p'}{2n}}\right]^{-\frac{p}{p'}}$$
$$\le C\|b\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\mu)}\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\lambda_k|^p\sum_{j=-\infty}^{k+2}\left(\frac{\mu(B_j)}{\mu(B_k)}\right)^{\frac{\alpha p}{2n}}\le C\|b\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\mu)}\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\lambda_k|^p.$$

下面估计 $M_1$. 当 $j>k+2$ 时,

$$\begin{aligned}&|[b,I_l]a_k(x)|\chi_j(x)\\
\le{}&|b(x)-b_{B_k}|\left|\int_{B_k}\left(\frac{1}{|x-y|^{n-l}}-\frac{1}{|x|^{n-l}}\right)a_k(y)dy\right|\\
&+\left|\int_{B_k}\frac{1}{|x-y|^{n-l}}(b(y)-b_{B_k})a_k(y)dy\right|\\
\le{}&C|b(x)-b_{B_k}|\int_{B_k}\frac{|y|}{|x|^{n+1-l}}|a_k(y)|dy+\frac{C}{|x|^{n-l}}\int_{B_k}|b(y)-b_{B_k}||a_k(y)|dy\\
\le{}&C2^{k-j(n+1)+jl}|b(x)-b_{B_k}|\int_{B_k}|a_k(y)|dy+C2^{-jn+jl}\int_{B_k}|b(y)-b_{B_k}||a_k(y)|dy.\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}&\int_{B_k}|a_k(y)|dy\le C\frac{2^{kn}}{\mu(B_k)}\int_{B_k}|a_k(y)|\mu(y)dy\\
\le{}&C2^{kn}\left(\frac{1}{\mu(B_k)}\int_{B_k}|a_k(y)|^{q_1}\mu(y)dy\right)^{1/q_1}\le C2^{kn}\mu(B_k)^{-\frac{1}{q_1}-\frac{\alpha}{n}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\int_{B_k}|b(y)-b_{B_k}||a_k(y)|dy\\
\le{}&\left(\int_{B_k}|b(y)-b_{B_k}|^{q_1'}\mu(y)^{1-q_1'}\right)^{\frac{1}{q_1'}}\left(\int_{B_k}|a_k(y)|^{q_1}\mu(y)\right)^{\frac{1}{q_1}}\\
\le{}&C\|b\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\mu)}\mu(B_k)^{1+\frac{\beta}{n}-\frac{1}{q_1}-\frac{\alpha}{n}},\end{aligned}$$

所以

$$
\begin{aligned}
&|[b,I_l]a_k(x)|\chi_j(x)\\
&\le C2^{(k-j)(n+1)+jl}\mu(B_k)^{-\frac{1}{q_1}-\frac{\alpha}{n}}\left(|b(x)-b_{B_j}|+|b_{B_j}-b_{B_k}|\right)\\
&\quad+C\|b\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\mu)}2^{-jn+jl}\mu(B_k)^{1+\frac{\beta}{n}-\frac{1}{q_1}-\frac{\alpha}{n}}.
\end{aligned}
$$

首先我们有

$$
2^{jlq_2}\int_{B_j}|b(x)-b_{B_j}|^{q_2}\mu(x)^{1-(1-\frac{l}{n})q_2}dx\le C\|b\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\mu)}^{q_2}\mu(B_j)^{1+\frac{l+\beta}{n}q_2}.
$$

事实上, 取 $t=(1-\frac{1}{q_2})\frac{n}{l+\beta}$, 由于 $\frac{1}{q_2}=\frac{1}{q_1}-\frac{l+\beta}{n}$, 所以 $t>1$. 由 Hölder 不等式以及 $\mu\in A_1$,

$$
\begin{aligned}
&2^{jlq_2}\int_{B_j}|b(x)-b_{B_j}|^{q_2}\mu(x)^{1-(1-\frac{l}{n})q_2}dx\\
&\le C2^{jlq_2}\left(\int_{B_j}|b(x)-b_{B_j}|^{q_2t'}\mu(x)^{1-q_2t'}dx\right)^{\frac{1}{t'}}\left(\int_{B_j}\mu(x)^{1+\frac{l}{n}q_2t}dx\right)^{\frac{1}{t}}\\
&\le C\|b\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\mu)}^{q_2}\mu(B_j)^{\frac{1}{t'}+\frac{\beta}{n}q_2}\left(\inf_{x\in B_j}\mu(x)\right)^{\frac{1}{t}+\frac{l}{n}q_2}|B_j|^{\frac{1}{t}+\frac{l}{n}q_2}\\
&\le C\|b\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\mu)}^{q_2}\mu(B_j)^{1+\frac{l+\beta}{n}q_2}.
\end{aligned}
$$

再注意到

$$
\int_{B_j}\mu(x)^{1-(1-\frac{l}{n})q_2}dx\le C|B_j|^{(1-\frac{l}{n})q_2}\mu(B_j)^{1-(1-\frac{l}{n})q_2},
$$

所以, 由引理 2.4, 当 $j>k+2$ 时,

$$
\begin{aligned}
&\mu(B_j)^{\frac{\alpha}{n}}\|[b,I_l]a_k(x)\chi_j(x)\|_{L^{q_2}(\mu^{1-(1-l/n)q_2})}\\
&\le C\|b\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\mu)}2^{(k-j)(n+1)}\left(\frac{\mu(B_j)}{\mu(B_k)}\right)^{\frac{1}{q_1}+\frac{\alpha}{n}}\\
&\quad+C\|b\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\mu)}2^{(k-j)(1-\beta)}\left(\frac{\mu(B_k)}{\mu(B_j)}\right)^{1+\frac{\beta}{n}-\frac{1}{q_1}-\frac{\alpha}{n}}+C\|b\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\mu)}\left(\frac{\mu(B_k)}{\mu(B_j)}\right)^{1+\frac{\beta}{n}-\frac{1}{q_1}-\frac{\alpha}{n}}\\
&\le C\|b\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\mu)}\left(2^{(k-j)(n+1)}\left(\frac{\mu(B_j)}{\mu(B_k)}\right)^{\frac{1}{q_1}+\frac{\alpha}{n}}+\left(\frac{\mu(B_k)}{\mu(B_j)}\right)^{1+\frac{\beta}{n}-\frac{1}{q_1}-\frac{\alpha}{n}}\right)\\
&\le C\|b\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\mu)}\left(2^{(k-j)(n(\frac{1}{q_1}-1)-\alpha+1)}+2^{(k-j)\delta(n(1-\frac{1}{q_1})+\beta-\alpha)}\right)\\
&\le C\|b\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\mu)}2^{(k-j)\delta(n(1-\frac{1}{q_1})+\beta-\alpha)}=C\|b\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\mu)}W(j,k).
\end{aligned}
$$

从而可得

$$\begin{aligned} M_1 &\le C\|b\|^p_{\mathrm{Lip}_\beta(\mu)} \sum_{j=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{j-3}|\lambda_k|W(j,k)\right]^p \\ &\le C\|b\|^p_{\mathrm{Lip}_\beta(\mu)} \begin{cases} \sum\limits_{j=-\infty}^{\infty}\sum\limits_{k=-\infty}^{j-3}|\lambda_k|^pW(j,k)^p, & \text{当}0<p\le 1 \\ \sum\limits_{j=-\infty}^{\infty}\left[\sum\limits_{k=-\infty}^{j-3}|\lambda_k|^pW(j,k)\right]\left[\sum\limits_{k=-\infty}^{j-2}W(j,k)\right]^{p/p'}, & \text{当}p>1 \end{cases} \\ &\le C\|b\|^p_{\mathrm{Lip}_\beta(\mu)} \sum_{k=-\infty}^{\infty}|\lambda_k|^p. \end{aligned}$$

综合对 $M_1$ 和 $M_2$ 的估计, 得

$$\|[b,I_l]f\|_{K^{\dot{\alpha},p}_{q_2}(\mu,\mu^{1-(1-l/n)q_2})} \le C\|b\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\mu)}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\lambda_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

再对 $f$ 的所有中心原子分解取下确界即完成证明.

## 4 定理 1.2 的证明

设 $f=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\lambda_k a_k$, $a_k$ 是支集为 $B_k$ 的中心 $(\alpha,q_1;\mu,\mu)$ - 原子, $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}|\lambda_k|^p<\infty$, 则

$$\begin{aligned} &\|[b,I_l]f\|^p_{W\dot{K}^{\alpha,p}_{q_2}(\mu,\mu^{1-(1-l/n)q_2})} \\ \le& C\lambda^p\sum_{j=-\infty}^{\infty}\mu(B_j)^{\frac{\alpha p}{n}}\mu^{1-(1-l/n)q_2}\left(\left\{x\in C_j:\Big|\sum_{k=-\infty}^{j-3}\lambda_k(b(x)-b_{B_k})I_la_k(x)\Big|>\frac{\lambda}{3}\right\}\right)^{p/q_2} \\ &+\ C\lambda^p\sum_{j=-\infty}^{\infty}\mu(B_j)^{\frac{\alpha p}{n}}\mu^{1-(1-l/n)q_2}\left(\left\{x\in C_j:\Big|\sum_{k=-\infty}^{j-3}\lambda_kI_l((b-b_{B_k})a_k)(x)\Big|>\frac{\lambda}{3}\right\}\right)^{p/q_2} \\ &+\ C\lambda^p\sum_{j=-\infty}^{\infty}\mu(B_j)^{\frac{\alpha p}{n}}\mu^{1-(1-l/n)q_2}\left(\left\{x\in C_j:\Big|\sum_{k=j-2}^{\infty}\lambda_k[b,I_l]a_k(x)\Big|>\frac{\lambda}{3}\right\}\right)^{p/q_2} \\ =&N_1+N_2+N_3 \end{aligned}$$

由对 $M_2$ 的估计,

$$\begin{aligned} N_3 &\le C\sum_{j=-\infty}^{\infty}\mu(B_k)^{\frac{\alpha p}{n}}\Big\|\sum_{k=j-2}^{\infty}\lambda_k([b,I_l]a_k)\chi_j\Big\|^p_{L^{q_2}(\mu^{1-(1-l/n)q_2})} \\ &\le C\|b\|^p_{\mathrm{Lip}_\beta(\mu)}\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\lambda_k|^p. \end{aligned}$$

注意到 $\alpha=n(1-\frac{1}{q_1})+\beta$, 类似于 $M_1$ 中的估计, 当 $j>k+2$ 时,

$$\mu(B_j)\big\|(b-b_{B_k})I_la_k\chi_j\big\|_{L^{q_2}(\mu^{1-(1-l/n)q_2})}\le C\|b\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\mu)}2^{(k-j)(1-\beta)},$$

所以

$$N_1 \le C \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mu(B_k)^{\frac{\alpha p}{n}} \left( \sum_{k=j-2}^{\infty} |\lambda_k| \, \|(b-b_{B_k})I_l a_k \chi_j\|_{L^{q_2}(\mu^{1-(1-l/n)q_2})} \right)^p$$
$$\le C \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=j-2}^{\infty} |\lambda_k|^p 2^{(k-j)(1-\beta)p} \le C \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\lambda_k|^p.$$

再注意到, 当 $x \in C_j, j > k+2$ 时,

$$\begin{aligned} I_l((b-b_{B_k})a_k)(x) &\le \left| \int_{B_k} \frac{1}{|x-y|^{n-l}} (b(y)-b_{B_k}) a_k(y) dy \right| \\ &\le C 2^{-j(n-l)} \|b\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\mu)} \mu(B_k)^{1+\frac{\beta}{n}-\frac{1}{q_1}-\frac{\alpha}{n}} \\ &= C 2^{-j(n-l)} \|b\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\mu)}, \end{aligned}$$

所以, 当 $x \in C_j$ 时,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=-\infty}^{j-3} \lambda_k I_l(b-b_{B_k})a_k(x) \right| &\le C 2^{-(n-l)} \|b\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\mu)} \sum_{k=-\infty}^{j-3} |\lambda_k| \\ &\le C 2^{-j(n-l)} \|b\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\mu)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\lambda_k|. \end{aligned}$$

可选取 $j_0 \in \mathbb{Z}$, 使得

$$2^{j_0(n-l)} \le 3C^{-1} \lambda \|b\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\mu)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\lambda_k| \le 2^{(j_0+1)(n-l)}$$

成立. 易见, 若 $j \ge j_0+1$, 则

$$\left\{ x \in C_j : \Big| \sum_{k=-\infty}^{j-3} \lambda_k I_l((b-b_{B_k})a_k)(x) \Big| > \frac{\lambda}{3} \right\} = \phi,$$

注意到 $\mu^{1-(1-l/n)q_2}(B_j) \le C|B_j|^{(1-l/n)q_2} \mu(B_j)^{1-(1-l/n)q_2}$ 以及 $1/q_2 = 1/q_1 - (l+\beta)/n, \alpha = n(1-1/q_1)+\beta, 0 < p \le 1$, 因此

$$\begin{aligned} N_2 &\le C \sup_{\lambda>0} \lambda^p \sum_{j=-\infty}^{j_0} \mu(B_j)^{\frac{\alpha p}{n}} (\mu^{1-(1-l/n)q_2}(B_j))^{p/q_2} \\ &\le C \sup_{\lambda>0} \lambda^p \sum_{j=-\infty}^{j_0} 2^{j(n-l)p} \le C \sup_{\lambda>0} \lambda^p 2^{j_0(n-l)p} \\ &\le C \|b\|^p_{\mathrm{Lip}_\beta(\mu)} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\lambda_k| \right)^p \le C \|b\|^p_{\mathrm{Lip}_\beta(\mu)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\lambda_k|^p. \end{aligned}$$

综合 $N_1, N_2, N_3$ 的估计,

$$\|[b,I_l]f\|^p_{W\dot{K}^{\alpha,p}_{q_2}(\mu,\mu^{1-(1-l/n)q_2})} \le C\|b\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\mu)}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\lambda_k|^p\right)^{1/p}.$$

再对 $f$ 的所有中心原子分解取下确界即完成定理 1.2 的证明.

## 参 考 文 献


[1] Chanillo S. A note on commutator[J]. Indiana Univ. Math. J., 1982, 31(1): 7–16.

[2] 陈爱清, 何月香, 王月山. 分数次积分交换子的加权 Hardy 型估计 [J]. 数学杂志, 2012, 32(1): 140–146.

[3] Lu S Z, Wu Q, Yang D C. Boundedness of commutators on Hardy type spaces [J]. Sci. in China Ser. A 2002, 45(8): 984–997.

[4] 陆善镇, 杨大春. $\mathbf{R}^n$ 上加权 Herz 空间分解及应用 [J]. 中国科学 (A), 1995, 38(2): 147–158.

[5] 刘宗光, 王斯雷. Herz 型空间中的分数次积分算子的弱型估计 [J]. 数学学报, 1999, 42(2): 923–830.

[6] 陆善镇, 杨大春. 加权 Herz 型 Hardy 空间分解及应用 [J]. 中国科学 (A), 1995, 38(6): 235–245.

[7] García-Cuerva J. Weighted $H^p$ spaces[D]. Louis: Washington University, 1975.

[8] Hu B, Gu J J. Necessary and sufficient conditions for boundedness of some commutators with weighted Lipschitz functions[J]. J. Math. Anal. Appl., 2008, 340(1): 598–605.

[9] Hu Y, Wang Y H, Wang Y S. The weighted estimate for the commutator of the generalized fractional integral [J]. Journal of Mathematical Inequalities, 2013, 7(3): 337–347.


# THE BOUNDEDNESS OF COMMUTATOR OF FRACTIONAL INTEGRALS ON WEIGHTED HERZ-TYPE HADRY SPACES


HU Yue[1] , WANG Yue-shan[2] , WANG Yan-hui[1]

(*1.College of Mathematics and Informatics, Henan Polytechnic University, Jiaozuo 454010, China*)

(*2.Department of Basic Science, Jiaozuo University, Jiaozuo 454003, China*)



**Abstract:** Let $[b, I_l]$ denote the commutator generated by fractional integral $I_l$ and weighted Lipschitz function $b$. By the theory of atomic decomposition of weighed Herz-type Hardy spaces, we investigate the boundedness of commutator $[b, I_\alpha]$ from weighted Herz-type Hardy spaces to (weak) weighted Herz-type spaces.



**Keywords:** fractional integral; commutator; weighted Lipschitz space; Herz space; Herz-type Hardy space.

**2010 MR Subject Classification:** 42B20; 42B30