Vol. 35 (2015)
No. 2

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

幂等扩张的分配格的同余可换性

罗从文 , 郭 玲
(三峡大学理学院, 湖北 宜昌 443002)

摘 要: 本文研究了幂等扩张的有界分配格的同余可换性问题. 利用幂等扩张的有界分配格的对偶理论, 得到了同余可换的幂等扩张的有界分配格的一个充分必要条件, 推广了 Davey 和 Priestley 关于有界分配格的一些结果.

关键词: 扩张的有界分配格; 幂等的; 同余可换
MR(2010) **主题分类号**: 06D05 **中图分类号**: O153.1
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2015)02-0407-05

1 引言

设 L 是一个泛代数, 我们用 $\mathrm{Con}(L)$ 表示 L 的同余关系形成的格. 若对任意的 $\theta,\delta\in\mathrm{Con}(L)$, 有 $\theta\circ\delta=\delta\circ\theta$, 则称 θ 和 δ 可换; 若代数 L 上的任意两个同余关系都是可换的, 则称 L 是同余可换的. 近年来已有不少学者研究了具有同余可换性的代数, 譬如 Campercholi, 方捷和罗从文在文 [1–3] 中分别研究了 MS- 代数, 对称扩张的 De Morgan 代数, 对称扩张的 MS - 代数以及这些代数的同余可换性. 在本文中我们提出了扩张的有界分配格的概念即一个具有 $\langle 2,2,1,0,0\rangle$ 型的代数 $\langle L;\vee,\wedge,f,0,1\rangle$, 其中 $\langle L;\vee,\wedge,f,0,1\rangle$ 是一个带有自同态 f 的有界分配格, 我们把这一类代数记为 $\mathbf{eD}$. 若 $f^2=f$, 则这个代数称为幂等的, 我们把幂等扩张的有界分配格记为 $\mathbf{e_2D}$. 然后介绍了幂等扩张的有界分配格的对偶理论, 最后借助对偶理论深入研究了幂等扩张的有界分配格的同余可换性, 得到了同余可换的幂等扩张的有界分配格的等价刻画条件.

下面我们先介绍扩张的有界分配格的对偶理论, 详细内容可参见文献 [4–8].

2 基础知识

设 P 是一个偏序集且 $x,y\in P$, 若 x 和 y 不可比, 记为 $x\parallel y$; 否则 $x\nparallel y$, 也就是 $x\geq y$ 或 $x\leq y$.

一个拓扑空间 $\langle P;\tau\rangle$, 若带有一个偏序关系, 则称它是序拓扑空间, 记为 $\langle P;\tau,\leq\rangle$. 序拓扑空间 $\langle P;\tau,\leq\rangle$ 若对给定的 $x,y\in P$ 且 $x\not\leq y$, 存在 P 的既开又闭的子集 U 使得 $y\in U$ 及 $x\notin U$, 则称为完全序不连通的. 称一个紧致完全序不连通空间为 Priestley 空间; 若在 Priestley 空间上定义一个连续的保序映射 g, 则称这个空间为扩张的 Priestley 空间.

若 $\langle P;g\rangle$ 是一个扩张的 Priestley 空间, $O(P)$ 是 P 的所有既开又闭的降集, 定义

$$f(A)=g^{-1}(A),$$

*收稿日期: 2014-04-10 接收日期: 2014-06-04
基金项目: 湖北省自然科学基金 (2011CDC099).
作者简介: 罗从文 (1965–), 男, 湖北仙桃, 教授, 主要研究方向: 格论.

则 $O(P)$ 是一个扩张的有界分配格.

反过来, 若 $\langle L;f\rangle$ 是一个扩张的有界分配格, $\wp(L)$ 表示 L 的所有素理想构成的集合, 定义 $g(J)=\{a\in L|f(a)\in J\}$, 则 $\wp(L)$ 是一个扩张的 Priestley 空间.

显然, 对于一个幂等扩张的有界分配格, 它的对偶空间 P 是一个扩张的 Priestley 空间且满足 $g^2=g$.

定义 1.1 设 $\langle L;f\rangle$ 是一个扩张的有界分配格, θ 是它的一个格同余关系, 若 $(a,b)\in\theta\Rightarrow(f(a),f(b))\in\theta$, 则称 θ 是 L 的一个同余关系.

定义 1.2 设 $\langle L;f\rangle$ 是一个扩张的有界分配格, $\langle P;g\rangle$ 是它的对偶空间. 若 $g(Q)\subseteq Q$, 则称 P 的子集 Q 是一个 e - 子集.

关于扩张的有界分配格的同余关系, 我们有如下结论:

(1) 如果 Q 是 P 的闭 e - 子集, 则下面所定义的 $O(P)(\simeq L)$ 上的关系 θ_Q:

$$(A,B)\in\theta_Q\Leftrightarrow A\cap Q=B\cap Q$$

是 $O(P)(\simeq L)$ 上的同余关系.

(2) 设 $E(P)$ 表示 P 的所有闭 e - 子集的集合, 则映射 $\theta:Q\to\theta_Q$ 是 $E(P)\to\mathrm{Con}O(P)(\simeq\mathrm{Con}L)$ 的对偶格同构.

由对偶性可知, 下面的定理是显然的事实.

定理 A 设 L 是一个扩张的有界分配格, $\langle P;g\rangle$ 是它的对偶空间. 若 L 是同余可换的当且仅当对于 P 的任意两个闭 e - 子集 Q_0 和 Q_1, 以及既开又闭降集 $A,B,C\subseteq P$, 只要 $A\cap Q_0=B\cap Q_0$ 及 $B\cap Q_1=C\cap Q_1$, 则存在既开又闭降集 $D\subseteq P$ 使得 $A\cap Q_1=D\cap Q_1$ 及 $D\cap Q_0=C\cap Q_0$.

2 主要结论

定理 2.1 设 $L\in\mathbf{e}_2\mathbf{D}$, $\langle P;g\rangle$ 是它的对偶空间. 若对任意 $x,y\in P$, $x>y$ 蕴含 $x\geq g(x)=g(y)\geq y$, 则 L 是同余可换的.

证 要证明 L 是同余可换的, 只需证明 L 的每对紧同余关系可换. 设 θ_0 和 θ_1 是 L 的两个紧同余关系且分别对应 P 的闭 e - 子集 Q_0 和 Q_1. 不失一般性, 设 $\theta_0\cap\theta_1=\triangle$, 这里 $\triangle$ 表示 $\mathrm{Con}(L)$ 的最小元. (若 L 满足定理中的素理想条件, 则 $L/(\theta_0\cap\theta_1)$ 也满足; 若 $\theta_0/(\theta_0\cap\theta_1)$ 和 $\theta_1/(\theta_0\cap\theta_1)$ 可交换, 则 θ_0 和 θ_1 可交换). 假设 $a,b,c\in L$, $a\equiv b(\theta_0)$ 和 $b\equiv c(\theta_1)$. 则 $A\cap Q_0=B\cap Q_0$ 及 $B\cap Q_1=C\cap Q_1$, 其中 A,B,C 为 P 中既开又闭降集且分别对应于 a,b,c. 令 $D=(C\cap Q_0)\cup(A\cap Q_1)$. 显然 D 是既开又闭的集合且 $D\cap Q_0=C\cap Q_0$ 及 $D\cap Q_1=A\cap Q_1$.

接下来证明 D 是降集. 设 $x\in D$ 且 $x>y$, 则我们需要考虑下面两种可能情况:

(1) 如果 $x\in C\cap Q_0$, 则因 C 是降集, 故 $y\in C$. 若 $y\in Q_0$, 则 $y\in C\cap Q_0\subseteq D$. 若 $y\notin Q_0$, 则因 $\theta_0\cap\theta_1=\triangle$, 故 $Q_0\cup Q_1=P$, 因此 $y\in Q_1$. 又 $x\in Q_0$ 且 $x\geq g(x)=g(y)\geq y$, 则有

$$g(x)=g(y)\in C\cap Q_0\cap Q_1=A\cap Q_0\cap Q_1.$$

也就是 $g(y)\in A$. 因 $g(y)\geq y$, 故 $y\in A$, 因此 $y\in A\cap Q_1\subseteq D$.

(2) 如果 $x\in A\cap Q_1$, 类似于 (1), 我们很容易证明 D 是降集.

综上所述, 存在 $d \in L$, 使得 $a \equiv d(\theta_1)$ 和 $d \equiv c(\theta_0)$. 由定理 A 可知, L 是同余可换的.

定理 2.2 设 $L \in \mathbf{e}_2\mathbf{D}$, $\langle P; g\rangle$ 是它的对偶空间. 若 $l(P) = 0$, 则 L 是同余可换的.

证 设 θ_0 和 θ_1 是 L 的两个同余关系且分别对应 P 的闭 e - 子集 Q_0 和 Q_1. 假设 $a, b, c \in L$, $a \equiv b(\theta_0)$ 和 $b \equiv c(\theta_1)$. 则 $A \cap Q_0 = B \cap Q_0$ 及 $B \cap Q_1 = C \cap Q_1$, 其中 A, B, C 为 P 中既开又闭降集且分别对应于 a, b, c. 令 $D = (C \cap Q_0) \cup (A \cap Q_1)$, 显然 D 是既开又闭的, 且有 $D \cap Q_0 = C \cap Q_0, D \cap Q_1 = A \cap Q_1$. 因为 $l(P) = 0$, D 是降集, 因此存在 $d \in L$ 使得 $a \equiv d(\theta_1)$ 和 $d \equiv c(\theta_0)$. 由定理 A 可知 L 是同余可换的.

定理 2.3 设 $L \in \mathbf{e}_2\mathbf{D}$, $\langle P; g\rangle$ 是它的对偶空间. 若 L 是同余可换的, 则对任意 $x, y \in P, x > y$ 及 $g(x) = g(y)$, 有 $x \geq g(x) = g(y) \geq y$.

证 假设 L 是同余可换的且对任意 $x, y \in P, x > y$ 及 $g(x) = g(y)$. 令 $Q_0 = \{x, g(x)\}$, $Q_1 = \{y, g(y)\}$, 则 Q_0 和 Q_1 是 P 的闭 e - 子集.

我们需要考虑下面两种可能性:

(1) 如果 $g(x) \not\leq x$, 则由 $x > y$ 可得 $g(x) = g(y) \not\leq y$, 这样我们可以找到既开又闭降集 A, B 使得 $y \in A, x, g(x) = g(y) \notin A$ 及 $y, x \in B, g(x) = g(y) \notin B$. 因此 $\emptyset \cap Q_0 = A \cap Q_0$ 及 $A \cap Q_1 = B \cap Q_1$. 于是存在既开又闭降集 $D \subseteq P$ 使得 $\emptyset \cap Q_1 = D \cap Q_1$ 及 $D \cap Q_0 = B \cap Q_0$. 因为 $y < x \in B \cap Q_0$, 所以 $y \in D$, 矛盾!

(2) 如果 $g(x) < x$ 及 $y \not\leq g(x)$, 则存在既开又闭降集 A, B 使得 $g(x) \in A, x, y \notin A$ 及 $g(x), y \in B, x \notin B$.

这样, $A \cap Q_0 = B \cap Q_0$ 及 $B \supseteq Q_1$. 因此存在既开又闭降集 $D \subseteq P$ 使得 $A \cap Q_1 = D \cap Q_1$ 及 $D \supseteq Q_0$. 注意到 $y \notin A$, 因此 $y \notin A \cap Q_1 = D \cap Q_1$, 即 $y \notin D$. 又因 $y < x \in Q_0 \subseteq D$, 则 $y \in D$, 矛盾! 综上即有 $x \geq g(x) = g(y) \geq y$.

定理 2.4 设 $L \in \mathbf{e}_2\mathbf{D}$, $\langle P; g\rangle$ 是它的对偶空间. 若 L 是同余可换的且对任意 $x, y \in P, x > y$ 及 $g(x) > g(y)$ 则 $x = g(x)$ 当且仅当 $y = g(y)$.

证 令 $Q_0 = \{x, g(x)\}$, $Q_1 = \{y, g(y)\}$, 则 Q_0 和 Q_1 是 P 的闭 e - 子集.

假设 $x = g(x)$ 而 $y \neq g(y)$. 考虑下面两种不同的情况:

(1) 如果 $g(y) \not\leq y$, 则存在既开又闭降集 A 满足下面条件:

$$y \in A, x, g(y) \notin A$$

且由 $x = g(x) > g(y), x > y$, 则存在既开又闭降集 B 使得 $y, g(y) \in B, x \notin B$.

显然 $A \cap Q_0 = B \cap Q_0$ 且 $B \supseteq Q_1$. 由定理 A 可知存在既开又闭降集 $D \subseteq P$ 使得 $A \cap Q_1 = D \cap Q_1$ 及 $D \supseteq Q_0$. 注意到 $g(y) \notin A$, 因此 $g(y) \notin A \cap Q_1 = D \cap Q_1$, 即 $g(y) \notin D$; 但由于 $x \in Q_0 \subseteq D$ 且 $x > g(y)$, 故 $g(y) \in D$ 矛盾! 从上面分析可得 $g(y) \leq y$.

(2) 如果 $g(y) < y$, 则存在既开又闭降集 A, B 使得 $g(y) \in A, x, y \notin A$ 及 $y, g(y) \in B, x \notin B$.

因而, $A \cap Q_0 = B \cap Q_0$ 及 $B \supseteq Q_1$. 这样存在既开又闭降集 $D \subseteq P$ 使得 $A \cap Q_1 = D \cap Q_1$ 及 $D \supseteq Q_0$. 注意到 $y \notin A$, 因此 $y \notin A \cap Q_1 = D \cap Q_1$, 即 $y \notin D$. 但由于 $y < x \in Q_0 \subseteq D$, 故 $y \in D$, 矛盾! 因此 $y = g(y)$.

类似地, 由 $y = g(y)$ 可得 $x = g(x)$.

定理 2.5 设 $L \in \mathbf{e}_2\mathbf{D}$, $\langle P; g\rangle$ 是它的对偶空间. 若 L 是同余可换的, 则对任意 $x, y \in P, x > y$ 且 $g(x) > g(y)$, 有 $x = g(x)$ 及 $y = g(y)$.

证 令 $Q_0=\{x,g(x)\}, Q_1=\{y,g(y)\}$, 则 Q_0 和 Q_1 是 P 的闭 e - 子集. 假设 $x\neq g(x)$, 则由定理 2.4 可知 $y\neq g(y)$. 很容易看出 $x\not\leq g(y)$ 及 $g(x)\not\leq y$. 若 $g(y)\not\leq y$, 则由下面的不等式

$$x\not\leq y, g(y)\not\leq y, x\not\leq g(y), g(x)\not\leq g(y),$$

可以找到 P 的既开又闭降集 A, B_1, 使得 $y\in A$, $g(y), x, g(x)\notin A$ 及 $g(y)\in B_1, x, g(x)\notin B_1$. 令 $B=A\cup B_1$, 则 B 是既开又闭降集, 且 $y, g(y)\in B, x, g(x)\notin B$.

这样, $A\cap Q_0=B\cap Q_0$ 及 $B\supseteq Q_1$. 因此存在既开又闭降集 $D\subseteq P$ 使得 $A\cap Q_1=D\cap Q_1$ 及 $D\supseteq Q_0$. 注意到 $g(y)\notin A$, 因此 $g(y)\notin A\cap Q_1=D\cap Q_1$, 即 $g(y)\notin D$. 但 $g(y)<g(x)\in Q_0\subseteq D$, 故 $g(y)\in D$, 矛盾!

因此, $g(y)\leq y$. 若 $g(y)<y$, 则存在既开又闭降集 $A, B\subseteq P$ 使得

$$g(y)\in A, y, x, g(x)\notin A$$

及

$$y, g(y)\in B, x, g(x)\notin B.$$

注意到 $A\cap Q_0=B\cap Q_0$ 及 $B\supseteq Q_1$. 因此存在既开又闭降集 $D\subseteq P$ 满足 $A\cap Q_1=D\cap Q_1$ 及 $D\supseteq Q_0$. 因为 $y\notin A$ 及 $y\notin A\cap Q_1=D\cap Q_1$, 所以 $y\notin D$. 又 $y<x\in Q_0\subseteq D$, 故 $y\in D$, 矛盾!

综上所述, $y=g(y)$, 由定理 2.4 可知 $x=g(x)$.

定理 2.6 设 $L\in\mathbf{e}_2\mathbf{D}$, $\langle P;g\rangle$ 是它的对偶空间. 若 L 是同余可换的, 则 $l(P)=0$ 或者对 P 中每一个二元链 $x>y$, 有 $x\geq g(x)=g(y)\geq y$.

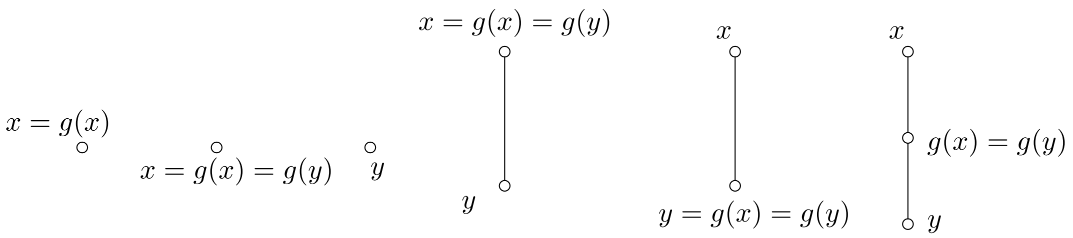
证 假设 $l(P)>0$, 则存在 $x, y\in P$ 使得 $x>y$, 因此 $g(x)\geq g(y)$. 若 $g(x)=g(y)$, 则由定理 2.3 可知 $x\geq g(x)=g(y)\geq y$; 若 $g(x)>g(y)$, 则由定理 2.5 可知 $x=g(x), y=g(y)$. 令 $Q_0=\{x\}, Q_1=\{y\}$, 则 Q_0 和 Q_1 是 P 的闭 e - 子集, 且分别对应 L 的两个不同的同余关系 ϑ_0 和 ϑ_1. 因 $x>y$, 故存在既开又闭降集 $A\subseteq P$ 使得 $y\in A, x\notin A$.

因此 $\emptyset\cap Q_0=A\cap Q_0$ 及 $A\supseteq Q_1$. 这样存在既开又闭降集 $B\subseteq P$ 使得 $\emptyset\cap Q_1=B\cap Q_1$ 且 $B\supseteq Q_0$. 注意到 $y<x\in Q_0\subseteq B$, 所以 $y\in B$; 但 $y\in B\cap Q_1=\emptyset\cap Q_1=\emptyset$, 矛盾! 即证.

结合定理 2.1, 2.2 以及定理 2.6, 我们得到本文的主要结论.

定理 2.7 设 $L\in\mathbf{e}_2\mathbf{D}$, $\langle P;g\rangle$ 是它的对偶空间, 则 L 是同余可换的当且仅当 $l(P)=0$ 或者对 P 中每一个二元链 $x>y$, 有 $x\geq g(x)=g(y)\geq y$.

我们尤其感兴趣的是同余可换的有限幂等扩张的有界分配格的刻画. 若一个幂等扩张的有界分配格 L 是有限的, 则它的对偶空间 $\langle P;g\rangle$ 也是有限的, 在这种情况下, 拓扑 τ 是离散的.L 同构于那样一些有限幂等扩张的有界分配格的直积, 即其对偶空间可以表示成有限多个 g 封闭序连通分支的并. 而每个 g 封闭序连通分支是下面五种类型之一: 一个单点集; 一个无序对, 其上 g 非平凡; 两个二元链, 一个三元链. 它们的 Hasse 图如下图所示:



(A_1) (A_2) (A_3) (A_4) (A_5)

参 考 文 献

[1] Campercholi M, Vaggione D. Congruence permutable MS-algebras[J]. Algebra Univ., 2007, 56: 119–131

[2] Luo C W. On symmetric extened MS-algebras whose congruences are permuterable[J]. Acta Math. Scientia, English Series, 2011, 31(3): 1113–1122

[3] Fang J. Congruence permutable symmetric extended de Morgan algebras[J]. Acta Math. Sinica, English Series, 2006, 1–6.

[4] Blyth T S, Fang J. Extended ockham algebras[J]. Commun. Algebra, 2000, 28(3): 1271–1284.

[6] Fang J. An Extended Ockham algebra with endomorphism kernel property[J]. Acta Math. Sinica, 2007, 23(9): 1611–1620.

[6] Fang J. Distributive lattices with unary operations[M]. Beijing: Science Press, 2011.

[7] Davey B A, Priestley H A. Introduction to lattices and order[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

[8] Priestley H A. Ordered sets and duality for distributive lattices[J]. Ann Discrete Math., 1984, 23, 39–60.

ON IDEMPOTENT EXTENDED DISTRIBUTIVE LATTICES WHOSE CONGRUENCES ARE PERMUTABLE

LUO Cong-wen , GUO Ling

(*College of Science, China Three Gorges University, Yichang 443002, China*)

Abstract: In this paper, we study the idempotent extended bounded distributive lattices whose congruence are permutable. By the dual theory of idempotent extended distributive lattices, we get a necessary and sufficient condition of congruence permutable idempotent extended distributive lattices. Some results obtained by Davey and Priestley on bounded distributive lattices are generalized.

Keywords: extended bounded distributive lattice; idempotent; congruence permutable

2010 MR Subject Classification: 06D05