

截断 δ 冲击模型的参数估计

马 明, 白静盼, 郑 莹

(西北民族大学数学与计算机科学学院, 甘肃 兰州 730030)

摘 要: 本文主要研究截断 δ 冲击模型的参数估计问题. 利用极大似然估计的方法, 我们得到了截断 δ 冲击模型的参数估计量, 并分析了估计量的无偏性, 最后将其应用到关系营销系统中, 从而获得泊松营销系统到达率的估计值.

关键词: 截断 δ 冲击模型; 关系营销系统; 参数估计; 极大似然估计

MR(2010) 主题分类号: 62F10

中图分类号: O211.9

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2015)02-0389-08

0 引言

冲击模型是可靠性数学理论中的重要研究内容之一, 经典的冲击模型以冲击次数为失效机制, 而 δ 冲击模型是以冲击间隔为失效机制的. 自从 Li 提出 δ 冲击模型之后^[1], 有关 δ 方面的文章日益增多.

δ 冲击模型是指相邻两次冲击的时间间隔小于事先给定的参数 (或称为阈值) δ 时, 系统发生故障. Li 讨论了 δ 冲击模型的概率分布与寿命性质^[2]; 李泽慧等针对一般冲击模型, 研究 Bayes 方法处理无失效数据的问题, 分别选择均匀分布和 Beta 分布作为先验分布, 用 Bayes 方法和多层 Bayes 方法得到了参数 δ_1 和 δ_2 的估计^[3]; 马明讨论了 δ 冲击模型寿命分布中多重积分的计算问题, 并研究了由此积分引出的 M 函数的性质^[4]; 冶建华等研究了时间点服从 $0 \sim 1$ 分布的离散型 δ 冲击模型系统寿命的概率分布和期望性质^[5]. 有关 δ 冲击模型的进一步发展, 可参见文献 [6–10].

最近 Ma 扩展了 δ 冲击模型, 提出了截断 δ 冲击模型^[11]. 截断 δ 冲击模型是指相邻两次冲击的时间间隔大于事先给定的参数 δ 时, 系统失效. 张攀等研究了时间点服从 $0-1$ 分布的离散型截断 δ 冲击模型中系统寿命的分布和期望^[12]. 郑莹等讨论了自激滤过的泊松过程的二阶矩, 并将所得结论应用于截断 δ 冲击模型的标值过程和客户寿命价值, 得到了截断 δ 冲击模型的标值过程的二阶矩和客户寿命价值的二阶矩^[13]. Serkan Eryilmaz 研究了冲击时间间隔服从更新过程的截断 δ 冲击模型, 得到寿命的前 1、2 阶矩, 进一步得到了更新时间间隔为均匀分布情形时的生存函数^[14].

前人文章中对截断 δ 冲击模型的研究主要关注于寿命分布的计算, 而对参数估计问题涉及比较少. 本文在三种样本轨道数据的情形下讨论了截断 δ 冲击模型的完全寿命参数估计问题.

*收稿日期: 2013-12-12

接收日期: 2014-04-02

基金项目: 国家自然科学基金 (11361049; 31260098); 甘肃省科技计划资助项目 (1308RJZA147; 1208RJYA037); 西北民族大学中央高校基本科研业务费专项资助项目 (ZYZ2012082).

作者简介: 马明 (1971–), 男, 回族, 内蒙古呼和浩特, 教授, 研究方向: 可靠性数学理论和数理关系营销理论.

通讯作者: 白静盼.

1 模型假设

假设系统遭受的外部冲击时间间隔服从参数为 $\lambda > 0$ 的指数分布, 而且任意两次冲击时间间隔是相互独立的. 设 X_n ($n = 1, 2, \dots$) 为第 $(n-1)$ 次和第 n 次冲击的时间间隔, t_n 表示第 n 次冲击的到达时间, $\delta > 0$ 是一个实数, 则截断 δ 冲击模型的寿命可以描述为:

$$\bar{T} = \sum_{n=0}^{\bar{N}} X_n + \delta = t_{\bar{N}} + \delta,$$

其中 $\bar{N} = \inf\{n : t_{n+1} - t_n \geq \delta, n \geq 0\}$.

对于寿命 $\bar{T}$ 有下面的引理:

引理 ^[11] 截断 δ 冲击模型寿命的期望和二阶矩分别为

$$E[\bar{T}] = \frac{1}{\lambda}(e^{\lambda\delta} - 1) \text{ 和 } E[\bar{T}^2] = \frac{2}{\lambda}e^{\lambda\delta}\left[\frac{1}{\lambda}(e^{\lambda\delta} - 1) - \delta\right].$$

在截断 δ 冲击模型中, δ 和 λ 是两个重要的参数. 为了估计 δ 和 λ , 我们假设观察出的样本轨道数据有下面三种形式, 并且是完全寿命数据, 即全部观测到寿命终止为止.

假设 A_1 : 观察到一系列冲击到达时间数据 $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n, n \geq 1$ 且 t_n 是寿命终止前最后一次冲击时刻 (其中 $t_0 = 0$).

假设 A_2 : 观测到寿命终止时一共冲击次数是 $n, n \geq 1$.

假设 A_3 : 观察到多组寿命结束时间 $T_1, T_2, \dots, T_m, m \geq 1$.

注 1) 在假设 A_1 下, 意味着 $t_{n+1} - t_n > \delta$, 且若 $n \geq 1, t_{i+1} - t_i < \delta, i = 0, \dots, n-1$, 但 t_{n+1} 不能观测到.

2) 此外, 若允许 $n=0$, 即只有一个观测值 $t_0 = 0$, 此时是不可识别的, 因为我们不清楚是纯粹没有冲击发生还是有冲击到达而被 δ 截断了.

2 主要结果

在假设 A_1 下, 我们得到定理 1 ~ 4.

定理 1 在假设 A_1 下, 若 δ 已知, 则 λ 的极大似然估计为

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{t_n + \delta}. \quad (2.1)$$

证 在假设 A_1 下, 由于时间间隔服从指数分布, 并且在 t_n 后附加了一段大于 δ 的时间, 所以样本的似然函数为

$$L(\lambda) = \left[\prod_{i=1}^n (\lambda e^{-\lambda(t_i - t_{i-1})}) \right] e^{-\lambda\delta} = \lambda^n e^{-\lambda t_n} e^{-\lambda\delta}.$$

对似然函数取对数得

$$\ln(L(\lambda)) = n \ln \lambda - \lambda t_n - \lambda\delta. \quad (2.2)$$

对式 (2.2) 求关于 λ 的导数, 并令其等于 0 得 $\hat{\lambda} = \frac{n}{t_n + \delta}$.

定理得证.

定理 2 在假设 A_1 下, 若 δ 与 λ 均未知, 则 δ 与 λ 的极大似然估计分别是

$$\hat{\delta} = \max\{t_i - t_{i-1}; i = 1, \dots, n\} \text{ 和 } \hat{\lambda} = \frac{n}{t_n + \max\{t_i - t_{i-1}; i = 1, \dots, n\}}, n > 0.$$

其中, $t_0 = 0$.

证 对式 (2.2) 关于 δ 与 λ 分别取导数, 得

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - t_n - \delta, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \delta} = -\lambda. \quad (2.4)$$

由于式 (2.4) 小于 0, 说明 δ 取最小值时似然函数最大, 但注意到样本数据中的每个时间间隔都小于 δ , 所以得 $\hat{\delta} = \max\{t_i - t_{i-1}; i = 1, \dots, n\}$. 令式 (2.3) 等于 0, 将 $\hat{\delta}$ 代入得

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{t_n + \max\{t_i - t_{i-1}; i = 1, \dots, n\}}.$$

注 实际应用中, 取 $\delta + \varepsilon$, 其中 $\varepsilon > 0$ 是微小的修正量.

定理 3 设 $\hat{\delta}$ 是假设 A_1 下 δ 的极大似然估计, 则

$$E[\hat{\delta}] = \delta - \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda\delta}).$$

证 对 $\bar{N}$ 的任一实现 n , 记 $X_i = t_i - t_{i-1}, i = 1, \dots, n+1$ (其中 $X_0 = 0$), 有

$$E[\hat{\delta}|\bar{N} = n] = E[\max\{X_i, i = 1, \dots, n\} | X_i < \delta; i = 1, \dots, n, X_{n+1} > \delta].$$

注意到 $\max\{X_i, i = 1, \dots, n\} < t \iff \{X_i < t, i = 1, \dots, n\}$, 并且当 $t \geq \delta$ 时,

$$P(X_i < t, i = 1, \dots, n | X_i < \delta; i = 1, \dots, n, X_{n+1} > \delta) = 1,$$

当 $0 < t < \delta$ 时,

$$\begin{aligned} & \frac{P(X_i < t, i = 1, \dots, n | X_i < \delta; i = 1, \dots, n, X_{n+1} > \delta)}{P(X_i < t, i = 1, \dots, n, X_i < \delta; i = 1, \dots, n, X_{n+1} > \delta)} \\ &= \frac{P(X_i < \delta; i = 1, \dots, n, X_{n+1} > \delta)}{P(X_i < \delta; i = 1, \dots, n, X_{n+1} > \delta)} = \frac{\prod_{i=1}^n (1 - e^{-\lambda t})}{\prod_{i=1}^n (1 - e^{-\lambda \delta})} = \frac{(1 - e^{-\lambda t})^n}{(1 - e^{-\lambda \delta})^n}, \end{aligned}$$

则

$$E[\hat{\delta}|\bar{N} = n] = \int_0^{+\infty} P(\hat{\delta} > t | \bar{N} = n) dt = \int_0^{\delta} [1 - \frac{(1 - e^{-\lambda t})^n}{(1 - e^{-\lambda \delta})^n}] dt = \delta - \int_0^{\delta} \frac{(1 - e^{-\lambda t})^n}{(1 - e^{-\lambda \delta})^n} dt.$$

由全期望公式, 得

$$\begin{aligned} E[\widehat{\delta}] &= \sum_{n=0}^{\infty} [\delta - \int_0^{\delta} \frac{(1 - e^{-\lambda t})^n}{(1 - e^{-\lambda \delta})^n} dt] (1 - e^{-\lambda \delta})^n e^{-\lambda \delta} \\ &= \delta e^{-\lambda \delta} \sum_{n=0}^{\infty} (1 - e^{-\lambda \delta})^n - e^{-\lambda \delta} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\delta} (1 - e^{-\lambda t})^n dt \\ &= \delta - e^{-\lambda \delta} \int_0^{\delta} \sum_{n=0}^{\infty} (1 - e^{-\lambda t})^n dt = \delta - \frac{1}{\lambda} (1 - e^{-\lambda \delta}). \end{aligned}$$

定理得证.

定理 3 表明, 在假设 A_1 下, δ 的极大似然估计是有偏估计. 我们可以由定理 3 结果构造 δ 的一个无偏估计.

定理 4 在假设 A_1 下, 若 λ 已知, 则

$$\max\{t_i - t_{i-1}; i = 1, \dots, \overline{N}\} + \frac{1}{\lambda} I_{\{\overline{N} > 0\}}$$

是 δ 的一个无偏估计.

证 由定理 3 有

$$E[\max\{t_i - t_{i-1}; i = 1, \dots, \overline{N}\}] = \delta - \frac{1}{\lambda} (1 - e^{-\lambda \delta}).$$

所以我们只需证明 $E[\frac{1}{\lambda} I_{\{\overline{N} > 0\}}] = \frac{1}{\lambda} (1 - e^{-\lambda \delta})$, 而

$$E[I_{\{\overline{N} > 0\}}] = P(\overline{N} > 0) = 1 - P(\overline{N} = 0) = 1 - P(X_i > \delta) = 1 - e^{(-\lambda \delta)},$$

定理得证.

在假设 A_2 下, 我们下面的估计.

定理 5 在假设 A_2 下,

- 1) 若 δ 已知, 则 λ 的极大似然估计是 $\widehat{\lambda} = \frac{\ln(n+1)}{\delta}$;
- 2) 若 λ 已知, 则 δ 的极大似然估计是 $\widehat{\delta} = \frac{\ln(n+1)}{\lambda}$;
- 3) 若 δ 与 λ 都未知, 则 $\lambda\delta$ 的极大似然估计是 $\widehat{\lambda\delta} = \ln(n+1)$.

证 我们先求似然函数, 寿命结束时一共冲击 n 次, 则

$$L(\delta, \lambda) = P(\overline{N} = n) = P\left\{\bigcap_{i=1}^n (X_i < \delta)(X_{n+1} > \delta)\right\}.$$

所以

$$L(\delta, \lambda) = (1 - e^{-\lambda \delta})^n e^{-\lambda \delta}.$$

分别取对数求偏导并令等于 0 得

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \delta} = n \frac{\lambda e^{-\lambda \delta}}{1 - e^{-\lambda \delta}} - \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = n \frac{\delta e^{-\lambda \delta}}{1 - e^{-\lambda \delta}} - \delta = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda \delta} = n \frac{e^{-\lambda \delta}}{1 - e^{-\lambda \delta}} - 1 = 0. \end{cases}$$

分别解方程得证.

注 若将 $\hat{\delta} = \frac{\ln(n+1)}{\lambda}$ 直接代入 $E[\bar{T}] = \frac{1}{\lambda}(e^{\lambda\delta} - 1)$ 可得假设 A_2 下, 平均寿命的一个估计式 $\widehat{E[\bar{T}]} = \frac{n}{\lambda}$, 这恰如参数为 n 和 λ 的伽玛分布的期望, 这个估计有一个直观的解释, 即平均寿命等于平均冲击间隔乘以总冲击次数. 此外, 由于 $\bar{N}$ 服从几何分布, $E[\bar{N}] = e^{\lambda\delta} - 1$, 所以 $E[\widehat{E[\bar{T}]}] = E[\frac{\bar{N}}{\lambda}] = \frac{1}{\lambda}(e^{\lambda\delta} - 1)$, 因此 $\frac{\bar{N}}{\lambda}$ 也是 $E[\bar{T}]$ 的一个无偏估计.

在假设 A_3 下, 我们有下面的估计.

定理 6 在假设 A_3 下, 记 $\bar{X} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m T_i$, $\overline{X^2} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m T_i^2$, 则

- 1) 若 λ 已知, 则 δ 的矩估计量为 $\hat{\delta} = \frac{\ln(\lambda\bar{X}+1)}{\lambda}$;
- 2) 若 δ 已知, 则 λ 的矩估计量为 $\hat{\lambda} = \frac{2(\bar{X}-\delta)}{\bar{X}^2-2\bar{X}(\bar{X}-\delta)}$.

证 令

$$\begin{cases} \bar{X} = E[\bar{T}], \\ \overline{X^2} = E[\bar{T}^2]. \end{cases}$$

由引理结论得证.

3 在客户关系营销系统中的应用

下面我们应用截断 δ 冲击模型对客户关系营销系统中的客户到达率进行估计.

考虑如下泊松营销系统

$$\text{US} / \text{CM} / \text{C} / \text{M} / \text{i.i.d} / \delta,$$

其中/US/ 意味着交易类型是不依订单可任意时刻到达的; /CM/ 表明客户行为是迁移型的; /C/ 表明每期的营销支出是一个常数, 不妨设为 M ; /M/ 说明响应是一个泊松过程, 满足无记忆性, 设其到达率为 λ ; /i. i. d/ 表示每次净贡献是一个独立同分布的序列; / δ / 意味着中止关系采用的策略是 δ 策略. Ma et al. (2008) 建立了营销系统的数学框架, 并讨论了马尔科夫营销系统的最优营销决策^[15], 郑莹等 (2013) 讨论了泊松营销系统的二阶矩^[13], 有关关系营销系统的进一步研究可参见文献 [13] 和 [15].

假设再营销仅影响顾客的到达率, 即 λ 是 M 的一个函数 $\lambda(M)$, 称为到达率, 常用的一个到达率函数是

$$\lambda(M) = \text{arr}(1 - e^{-\theta M}), \quad (3.1)$$

式 (3.1) 中, θ 表示公司目前保留的水平值, arr 表示客户到达最大可能人数. Blattberg et al.(1996) 使用式 (3.1) 计算了客户资产 (Customer Equity)^[16], Ma et al.(2008) 使用式 (3.1) 计算了 δ 和 M 的最优值^[15].

在泊松关系营销系统中, 参数估计主要的任务是在不同的营销支出 M 下, 根据客户的到达规律估计其到达率 λ , 估计的目的是为了进行营销决策. 估计中需要的样本数据是不同的营销支出下, 客户的响应行为样本轨道. 但营销有其特殊性, 即客户的响应行为是不可再现的, 这是由于, 若得到了一个样本数据, 说明该客户关系的寿命已结束了. 所以, 在收集样本数据时, 一般是选择与当前客户各种社会自然特征相近的典型客户.

假设我们得到的数据是不同的营销支出 M 下, 相应典型客户的所有相应时间 (完全寿命), 如表 1 所示:

表 1: 不同营销支出下, 客户的响应时间轨道

营销支出 M	响应时间			
M_1	t_{11}	t_{12}	$\cdots$	t_{1n_1}
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
M_m	t_{m1}	t_{m2}	$\cdots$	t_{mn_m}

根据文献 [11], 客户响应行为就是一个典型的截断 δ 冲击模型, 其中客户响应时间相当于冲击到达时刻, 表 1 中每一行响应时间就相当于假设 A_1 的形式, 所以由 (2.1) 式很容易估计出客户的到达率, 即

$$\hat{\lambda}_i = \frac{n_i}{t_{i,n_i} + \delta}, \quad n = 1, \cdots, m. \quad (3.2)$$

为了检验估计的效果, 我们按照如下路线进行估计: 在不同的营销支出下, 选择适当的参数 θ 和 arr , 根据式 (3.1) 计算出相应的到达率 λ , 应用这些 λ 生成客户的响应时间轨道 (按照泊松营销系统的定义, 响应时间间隔服从指数分布), 从而得到表 1 的具体数值, 然后根据这些数值代入式 (3.2) 得到估计值 $\hat{\lambda}$.

我们选取 $\theta = 0.03$, $\text{arr} = 0.75$, M 按照步长为 0.5 在 $1 \sim 10$ 之间取值, 运用 MATLAB 编程实现, 为了减少随机误差, 程序中使用了批均值法, 结果见表 2.

表 2: 在不同的 δ 取值下, 到达率 λ 的估计值

M	λ 真值	δ				
		22.0788	28.0333	33.9878	39.9423	45.8968
1	0.022166	0.038449	0.0345	0.031286	0.02862	0.026373
1.5	0.033002	0.026078	0.022573	0.036184	0.033759	0.031639
2	0.043677	0.045121	0.035565	0.02935	0.051538	0.050139
2.5	0.054192	0.024232	0.040219	0.037245	0.038303	0.0369
3	0.064552	0.030841	0.026056	0.022556	0.019886	0.01778
3.5	0.074757	0.090596	0.086361	0.082504	0.094781	0.093447
4	0.08481	0.099103	0.090229	0.082813	0.076524	0.071123
4.5	0.094713	0.070596	0.066583	0.070465	0.084553	0.099023
5	0.104469	0.115478	0.108684	0.102668	0.100309	0.098057
5.5	0.11408	0.130202	0.127599	0.119308	0.117323	0.115404
6	0.123547	0.063984	0.12903	0.120356	0.119445	0.118548
6.5	0.132874	0.115035	0.110313	0.112351	0.110183	0.108097
7	0.142062	0.128555	0.128647	0.127293	0.136892	0.141016
7.5	0.151113	0.13904	0.135827	0.159325	0.158612	0.151118
8	0.160029	0.131637	0.126422	0.143049	0.167587	0.163722
8.5	0.168813	0.112976	0.167925	0.164109	0.160462	0.164193
9	0.177465	0.131616	0.171288	0.167614	0.167259	0.17535
9.5	0.185989	0.171772	0.170032	0.181368	0.180814	0.180414
10	0.194386	0.198468	0.211805	0.19075	0.194122	0.192671

表 2 中的第 2 列是由式 (3.1) 得到的 λ 真值, 第 3 列至第 7 列是基于不同的 δ 下所截断的响应轨道得到的 λ 的估计值. 图 1 表示了 λ 的估计值与 λ 真值之间的误差. 从图 1 可看出, 估计值围绕真值曲线进行波动, 误差基本没有超过 ± 0.1 . 此外, 随着 δ 的增加, 误差反而减小.

表 2 中, 每一行的估计值是针对同一个 λ 进行估计的, 为了更进一步直观考察估计效果, 对每一行估计值计算平均值 $\bar{\lambda}$, 将 λ 和 $\bar{\lambda}$ 关于 M 变化曲线分别绘于图 2 中, 从图 2 可看出平均后的最大误差不超过 0.04 (在 $M=3$ 处).

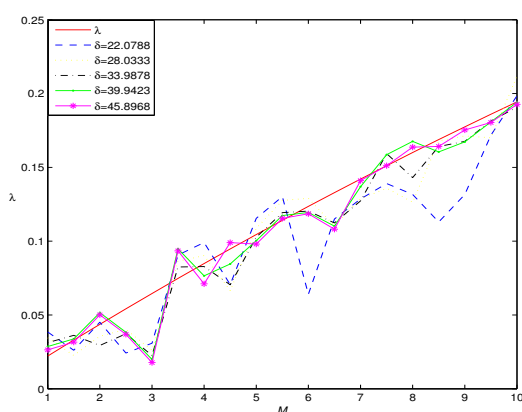


图 1: 在不同的 δ 下, λ 真值曲线与估计值曲线

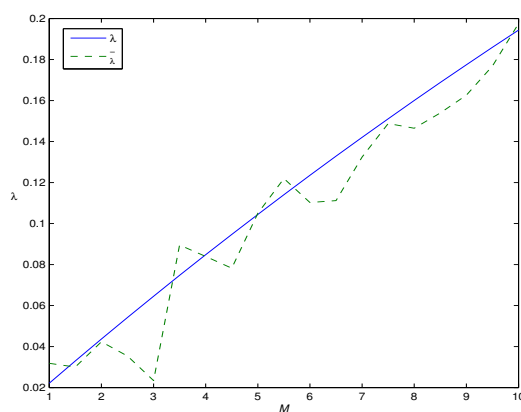


图 2: λ 真值曲线与平均值曲线

参 考 文 献

- [1] 李泽慧, 黄宝胜, 王冠军. 一种冲击源下冲击模型的寿命分布及其性质 [J]. 兰州大学学报 (自然科学版), 1999, 35(4): 2-7.
- [2] Li Z H, Kong X B. Life behavior of δ -shock model[J]. Statistics and Probability Letters, 2007, 77: 577-587.
- [3] 李泽慧, 刘志, 牛一. 一般 δ 冲击模型中无失效数据的 Bayes 统计推断 [J]. 应用概率统计, 2007, 23(1): 51-58.
- [4] 马明. δ 冲击模型寿命分布的积分计算及 M 函数的性质 [J]. 山东大学学报 (理学版), 2008, 43(12): 15-19.
- [5] 冶建华, 马明, 赵芬芬, 李亚亚. 离散 δ 冲击模型的寿命性质 [J]. 西北民族大学学报 (自然科学版), 2012, 33(87): 1-4.
- [6] Li Z H, Chen F. The distribution of dual shock model and its properties[J]. Proceedings of the Sixth Conference of China Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002, 258-263.
- [7] Li Z H, Zhao P. Reliability Analysis on the δ shock model of complex systems[J]. IEEE Transactions on Reliability. 2007, 56(2): 340-348.
- [8] Liang X L, Li Z H, Lam Y. Optimal replacement policies for two δ shock models[J]. International Journal of Systems Science, 2005, 12: 211-214.

- [9] Tang Y Y, Lam Y. A δ shock maintenance model for a deteriorating system[J]. European Journal of Operational Research, 2006, 168: 541–556.
- [10] Wang G J, Zhang Y L. General δ shock model and the optimal replacement policy[J]. Journal of Southeast University (Natural Sciences), 2001, 2001(5): 121–124.
- [11] Ma M and Li Z H. Life behavior of censored δ shock model[J]. Pure Appl. Math., 2010, 41(2): 401–420.
- [12] 张攀, 马明, 余进玉, 贾园园, 刘晓倩. 时间点服从 0–1 分布的离散型截断 δ 冲击模型的寿命性质 [J]. 甘肃联合大学学报 (自然科学版), 2012, 26(5): 24–26.
- [13] 郑莹, 马明. 自激滤过的泊松过程的二阶矩 [J]. 山东大学学报 (理学版), 2013, 48(9): 36–45.
- [14] Serkan Eryilmaz, Konul Bayramoglu. Life behavior of δ shock models for uniformly distributed interarrival times [M]. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2013.
- [15] Ma M, Li Z H, Chen J. Phase-type distribution of customer relationship with Markovian response and marketing expenditure decision on the customer lifetime value[J]. European Journal of Operational Research, 2008, 187: 313–326.
- [16] Blattber R, Bechwati N N. The allocation of promotion budget to maximize customer equity[J]. Journal of Omega, 2001, 29: 49–61.

PARAMETERS ESTIMATION OF THE CENSORED δ -SHOCK MODEL

MA Ming, BAI Jing-pan, ZHENG Ying

(School of Mathematics and Computer Science, Northwest University for Nationalities,
Lanzhou 730030, China)

Abstract: In this paper we main research the parameters estimation of the censored δ shock model. We get the parameters estimation of the censored δ shock model with the maximum likelihood estimation and analyze the unbiased estimator. Finally we apply it to the relational marketing system and obtain the estimates of the arrival rate of the Poisson's marketing system.

Keywords: censored δ shock model; relationship marketing system; parameter estimation; the maximum likelihood estimation

2010 MR Subject Classification: 62F10