Vol. 35 (2015)
No. 2

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

N - 弱拟 Armendariz 环

丁婷婷，吴 俊，张培雨
(安徽师范大学数学计算机科学学院, 安徽 芜湖 241003)

摘 要: 本文研究了 N - 弱拟 Armendariz 环的基本性质以及与一些特殊环的关系. 利用某些矩阵环的特殊性质, 得到了环 R 是 N - 弱拟 Armendariz 环当且仅当环 $T_n(R)$ 是 N - 弱拟 Armendariz 环, 推广了弱拟 -Armendariz 环的相应结果.

关 键 词: N - 弱拟 Armendariz 环; 弱拟 -Armendariz 环; 半素环; nil - 半交换环
MR(2010) **主题分类号**: 16N60; 16S36; 16S50 **中图分类号**: O153.3
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2015)02-0337-08

1 引言

文中的所有环均指有单位元的结合环. $C(R)$ 表示环 R 的中心, $N(R)$ 表示环 R 的所有幂零元集合, $T_n(R)$ 表示环 R 上的 n 阶上三角矩阵环. 在文 [1] 中, Rege 等人引入了 Armendariz 环的概念, 并研究了 Armendariz 环与半交换环之间的关系. 环 R 称为 Armendariz 环 [1], 如果对任意的 $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i, g(x)=\sum\limits_{j=0}^{m}b_jx^j\in R[x]$, 满足 $f(x)g(x)=0$, 则有 $a_ib_j=0$, 对任意的 i,j. 随后, 众多数学工作者对 Armendariz 环以及 Armendariz 环的推广等相关问题做了些研究 [2–7]. 在文 [2] 中, Liu 和 Zhao 引入和讨论了弱 Armendariz 环. 环 R 称为弱 Armendariz 环 [2], 如果对任意的 $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i, g(x)=\sum\limits_{j=0}^{m}b_jx^j\in R[x]$, 满足 $f(x)g(x)=0$, 则有 $a_ib_j\in N(R)$, 对任意的 i,j. 在文 [3] 中, Baser 等人引入了弱拟 -Armendariz 环的概念并研究了它的相关性质. 环 R 称为弱拟 -Armendariz 环 [3], 如果对任意的 $f(x)=a_0+a_1x, g(x)=b_0+b_1x\in R[x]$, 满足 $f(x)R[x]g(x)=0$, 则有 $a_iRb_j=0, i,j=0,1$.

本文引入了 N - 弱拟 Armendariz 环的概念, 通过例子说明了 N - 弱拟 Armendariz 环是弱拟 -Armendariz 环的真正推广, 并且给出了 N - 弱拟 Armendariz 环的等价刻画以及它与一些特殊环之间的关系.

2 主要结果

定义 2.1 环 R 称为 N - 弱拟 Armendariz 环, 如果 $f(x)=a_0+a_1x, g(x)=b_0+b_1x\in R[x]$, 满足 $f(x)R[x]g(x)=0$, 则有 $a_iRb_j\subseteq N(R), i,j=0,1$.

引理 2.2 [8, n 2.1] 设 $f(x),g(x)\in R[x]$, 则 $f(x)Rg(x)=0$ 当且仅当 $f(x)R[x]g(x)=0$.

设 R 为环, M 为 (R,R) - 双模, R 对于 M 的平凡扩张 $T(R,M)=R\bigoplus M$, 其中运算为

$$(r_1,m_1)+(r_2,m_2)=(r_1+r_2,m_1+m_2),(r_1,m_1)(r_2,m_2)=(r_1r_2,r_1m_2+m_1r_2).$$

*收稿日期: 2012-11-19 接收日期: 2013-01-25
基金项目: 国家自然科学基金资助 (10971099).
作者简介: 丁婷婷 (1989–), 女, 安徽蚌埠, 硕士, 主要研究方向: 同调代数与代数表示论.

易知 $T(R,M)\cong\left\{\begin{pmatrix} r & m\\ 0 & r\end{pmatrix}|r\in R,m\in M\right\}$.

记

$$S_n(R)=\left\{\begin{pmatrix} a & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & a\end{pmatrix}|a,a_{ij}\in R\right\}\ (n\geq 2).$$

由文 [3, 例 2.5] 可知, 若 R 是弱拟 -Armendariz 环, $S_n(R)$ 不是弱拟 -Armendariz 环, 但对于 N - 弱拟 Armendariz 环却有以下结论.

定理 2.3 设 R 是环, 则下列命题等价:

(1) R 是 N - 弱拟 Armendariz 环;

(2) $T_n(R)$ 是 N - 弱拟 Armendariz 环, 对任意 $n\geq 2$;

(2′) $T_n(R)$ 是 N - 弱拟 Armendariz 环, 对某个 $n\geq 2$;

(3) $S_n(R)$ 是 N - 弱拟 Armendariz 环, 对任意 $n\geq 2$;

(3′) $S_n(R)$ 是 N - 弱拟 Armendariz 环, 对某个 $n\geq 2$;

(4) $T(R,R)$ 是 N - 弱拟 Armendariz 环.

证 (1) $\Rightarrow$ (2) 设 $f(x)=A_0+A_1x, g(x)=B_0+B_1x\in T_n(R)[x]$, 有 $f(x)T_n(R)[x]g(x)=0$, 其中

$$A_i=\begin{pmatrix} a_{11}^i & a_{12}^i & \cdots & a_{1n}^i\\ 0 & a_{22}^i & \cdots & a_{2n}^i\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^i\end{pmatrix},\ B_j=\begin{pmatrix} b_{11}^j & b_{12}^j & \cdots & b_{1n}^j\\ 0 & b_{22}^j & \cdots & b_{2n}^j\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn}^j\end{pmatrix},\ i,j=0,1.$$

易证存在环同构 $T_n(R)[x]\to T_n(R[x])$;

$$\sum_{i=0}^{n}\begin{pmatrix} a_{11}^i & a_{12}^i & \cdots & a_{1n}^i\\ 0 & a_{22}^i & \cdots & a_{2n}^i\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^i\end{pmatrix}x^i\mapsto\begin{pmatrix} \sum\limits_{i=0}^{n}a_{11}^ix^i & \sum\limits_{i=0}^{n}a_{12}^ix^i & \cdots & \sum\limits_{i=0}^{n}a_{1n}^ix^i\\ 0 & \sum\limits_{i=0}^{n}a_{22}^ix^i & \cdots & \sum\limits_{i=0}^{n}a_{2n}^ix^i\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & \sum\limits_{i=0}^{n}a_{nn}^ix^i\end{pmatrix}.$$

则可令

$$f(x)=\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n}\\ 0 & f_{22} & \cdots & f_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & f_{nn}\end{pmatrix},\ g(x)=\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n}\\ 0 & g_{22} & \cdots & g_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & g_{nn}\end{pmatrix},$$

其中 $f_{st}=a_{st}^o+a_{st}^1x, g_{vw}=b_{vw}^o+b_{vw}^1x\quad(1\leq s,t,v,w\leq n)$. 故对任意的 $r\in R$, 由

$f(x)T_n(R)[x]g(x)=0$，得

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ 0 & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & f_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ 0 & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} f_{11}rg_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & f_{22}rg_{22} & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & f_{nn}rg_{nn} \end{pmatrix}=0.$$

因此 $f_{ss}Rg_{ss}=0$, 即 $f_{ss}R[x]g_{ss}=0$, $s=1,2,\cdots,n$. 由于 R 是 N - 弱拟 Armendariz 环, 所以 $a_{ss}^iRb_{ss}^j\subseteq N(R)$.

下证 $A_iT_n(R)B_j\subseteq N(T_n(R))$. 任取

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}\in T_n(R),$$

则

$$A_iCB_j = \begin{pmatrix} a_{11}^ic_{11}b_{11}^j & * & \cdots & * \\ 0 & a_{22}^ic_{22}b_{22}^j & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^ic_{nn}b_{nn}^j \end{pmatrix},$$

$a_{ss}^iRb_{ss}^j\subseteq N(R)$, 所以对任意的 s 及 i,j, 存在 $m_{ijs}^c\in\mathbb{N}^+$, 使得 $(a_{ss}^ic_{ss}b_{ss}^j)^{m_{ijs}^c}=0$. 令 $m_{ij}^c=\max\{m_{ij1}^c,m_{ij2}^c,\cdots,m_{ijn}^c\}$, 则 $(a_{tt}^ic_{tt}b_{tt}^j)^{m_{ij}^c}=0,t=1,2,\cdots,n$, 因此 $\left((A_iCB_j)^{m_{ij}^c}\right)^n=0$. 所以 $T_n(R)$ 是 N - 弱拟 Armendariz 环, 对任意 $n\geq 2$.

(2) $\Rightarrow$ (2$'$) 显然成立.

(2$'$) $\Rightarrow$ (1) 设 $f(x)=a_0+a_1x, g(x)=b_0+b_1x\in R[x]$, 有 $f(x)R[x]g(x)=0$. 则

$$\begin{pmatrix} f(x) & & & \\ & f(x) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(x) \end{pmatrix}T_n(R[x])\begin{pmatrix} g(x) & & & \\ & g(x) & & \\ & & \ddots & \\ & & & g(x) \end{pmatrix}=0,$$
$$T_n(R)[x]\cong T_n(R[x]),$$

于是

$$\left(\begin{pmatrix} a_0 & & & \\ & a_0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_1 \end{pmatrix}x\right)T_n(R)[x]$$

$$\left(\begin{pmatrix} b_0 & & & \\ & b_0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & & & \\ & b_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_1 \end{pmatrix} x\right) = 0.$$

由于 $T_n(R)$ 是 N - 弱拟 Armendariz 环, 所以

$$\begin{pmatrix} a_i & & & \\ & a_i & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_i \end{pmatrix} T_n(R) \begin{pmatrix} b_j & & & \\ & b_j & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_j \end{pmatrix} \subseteq N(T_n(R)), i, j = 0, 1.$$

特别地, 对任意的 $r \in R$, 存在 $n_{ij}^r \in \mathbb{N}^+$, 使得

$$\left(\begin{pmatrix} a_i & & & \\ & a_i & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & & & \\ & r & & \\ & & \ddots & \\ & & & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_j & & & \\ & b_j & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_j \end{pmatrix}\right)^{n_{ij}^r} = 0,$$

则 $(a_i r b_j)^{n_{ij}^r} = 0$, 于是 $a_i R b_j \subseteq N(R)$. 所以 R 是 N - 弱拟 Armendariz 环.

(1) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (3$'$) $\Rightarrow$ (1) 与上述证明过程类似.

(1) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (1) 易证, 从而得证.

注 由定义可知, 弱拟 -Armendariz 环一定是 N - 弱拟 Armendariz 环.

下面的例子说明了反之是不成立的.

例 2.4 设 W 为约化环, 由文 [3, 例 2.5] 可知 $R = T(W, W)$ 为弱拟 -Armendariz 环, 且 $S_3(R)$ 不是弱拟 -Armendariz 环, 但由定理 2.3 知 $S_n(R)$ 为 N - 弱拟 Armendariz 环, 对任意 $n \geq 2$.

引理 2.5 [3] 若 R 是半素环, 则 $aRb = 0$ 当且仅当 $bRa = 0$, 且若 $aRbRa = 0$, 则 $aRb = 0$, 任意的 $a, b \in R$.

引理 2.6 若 R 是半素环, 则 $R[x]$ 是 N - 弱拟 Armendariz 环.

证 由文 [3, 定理 2.7] 可以直接得出该结论, 下面给出该引理的另一种证法.

设 $F(y) = f_0 + f_1 y, G(y) = g_0 + g_1 y \in R[x][y], f_i, g_j \in R[x], i, j = 0, 1$, 有 $F(y)R[x][y]G(y) = 0$, 即 $F(y)R[x]G(y) = 0$. 则对任意的 $f(x) \in R[x]$,

$$f_0 f g_0 = 0,\ f_0 f g_1 + f_1 f g_0 = 0,\ f_1 f g_1 = 0.$$

由文 [9, 定理 10.19] 知, 环 R 是半素的当且仅当环 $R[x]$ 是半素的. $f_0 f g_0 = 0$, 由引理 2.5 知 $g_0 f f_0 = 0$, 即 $g_0 R[x] f_0 = 0$. 任取 $h(x) \in R[x]$, 在 $f_0 f g_1 + f_1 f g_0 = 0$ 两边同时右乘 $h f_0$, 则有

$$f_0 f g_1 h f_0 = -f_1 f g_0 h f_0 = 0.$$

由引理 2.5 知 $f_0 f g_1 = 0$, 故 $f_i f g_j \in N(R[x])$, 即 $f_i R[x] g_j \subseteq N(R[x]), i, j = 0, 1$. 所以 $R[x]$ 是 N - 弱拟 Armendariz 环.

引理 2.7 若 $R[x]$ 是 N - 弱拟 Armendariz 环, 则 R 是 N - 弱拟 Armendariz 环.

证 设 $f(x)=a_0+a_1x, g(x)=b_0+b_1x\in R[x]$, 有 $f(x)R[x]g(x)=0$, 即 $f(x)Rg(x)=0$. 则对任意的 $r\in R$,

$$a_0rb_0=0,\ a_0rb_1+a_1rb_0=0,\ a_1rb_1=0.$$

令 $p(y)=a_0+a_1y, q(y)=b_0+b_1y\in R[x][y]$.

下证 $p(y)R[x]q(y)=0$. 对任意的 $r\in R$, $t\in\mathbb{N}$, 由上面的三个等式可知,

$$p(y)(rx^t)q(y)=(a_0rb_0)x^t+(a_0rb_1+a_1rb_0)x^ty+(a_1rb_1)x^ty^2=0.$$

于是 $p(y)R[x]q(y)=0$, 即 $p(y)R[x][y]q(y)=0$. 由于 $R[x]$ 是 N- 弱拟 Armendariz 环, 所以 $a_iR[x]b_j\subseteq N(R[x])$. 特别地, $a_iRb_j\subseteq N(R), i,j=0,1$. 所以 R 是 N - 弱拟 Armendariz 环.

由引理 2.6, 引理 2.7 可即得,

定理 2.8 若 R 是半素环, 则 R 是 N - 弱拟 Armendariz 环.

注 1) 由文 [3, 定理 2.7] 也可推出该定理成立.

2) 例 2.4 说明了该定理的逆命题不成立.

事实上, 令 $a=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\in R$, 任意的

$$\begin{pmatrix}w_{11}&w_{12}\\0&w_{11}\end{pmatrix}\in R, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w_{11}&w_{12}\\0&w_{11}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=0,$$

即 $aRa=0$, 但 $a\neq 0$, 所以 R 不是半素环.

命题 2.9 设 e 是环 R 的中心幂等元. 则 R 是 N - 弱拟 Armendariz 环当且仅当 eR 和 $(1-e)R$ 都是 N - 弱拟 Armendariz 环.

证 $(\Rightarrow)$ 设 $f(x)=a_0+a_1x, g(x)=b_0+b_1x\in(eR)[x]$, 有 $f(x)(eR)[x]g(x)=0$, 即 $f(x)(eR)g(x)=0$. 又 $f(x)e=f(x)$. 故对任意的 $r\in R, f(x)rg(x)=f(x)(er)g(x)=0$, 即 $f(x)R[x]g(x)=0$. 由于 R 是 N - 弱拟 Armendariz 环, 所以 $a_iRb_j\subseteq N(R), i,j=0,1$, 则对任意的 $er\in eR, r\in R, a_i(er)b_j=(a_ie)rb_j=a_irb_j\in N(R)\bigcap eR=N(eR)$. 所以 eR 是 N - 弱拟 Armendariz 环, 类似可证 $(1-e)R$ 是 N - 弱拟 Armendariz 环.

$(\Leftarrow)$ 设 $f(x)=a_0+a_1x, g(x)=b_0+b_1x\in R[x]$, 有 $f(x)R[x]g(x)=0$, 即 $f(x)Rg(x)=0$. 故对任意的 $r\in R$,

$$ef(x)(er)eg(x)=ef(x)rg(x)=0,(1-e)f(x)(1-e)r(1-e)g(x)=(1-e)f(x)rg(x)=0.$$

即

$$ef(x)(eR)[x]eg(x)=0,(1-e)f(x)((1-e)R)[x](1-e)g(x)=0.$$

由于 eR 和 $(1-e)R$ 都是 N - 弱拟 Armendariz 环, 所以对任意的 $r\in R$, 存在 $n_{ij}^r, m_{ij}^r\in\mathbb{N}^+$, 使得

$$[(ea_i)(er)(eb_j)]^{n_{ij}^r}=e(a_irb_j)^{n_{ij}^r}=0,[(1-e)a_i((1-e)r)(1-e)b_j]^{m_{ij}^r}=(1-e)(a_irb_j)^{m_{ij}^r}=0.$$

令 $k_{ij}^r=\max\{n_{ij}^r,m_{ij}^r\}$, 则

$$e(a_irb_j)^{k_{ij}^r}=0,(1-e)(a_irb_j)^{k_{ij}^r}=0,(a_irb_j)^{k_{ij}^r}=e(a_irb_j)^{k_{ij}^r}+(1-e)(a_irb_j)^{k_{ij}^r}=0,$$

于是 $a_iRb_j\subseteq N(R),i,j=0,1$. 所以 R 是 N - 弱拟 Armendariz 环.

环 R 称为 nil- 半交换的 [10], 若对任意的 $a,b\in R$, $ab\in N(R)$, 有 $aRb\subseteq N(R)$. $I\lhd R$ 称为 nil - 半交换的, 若 I 满足上述条件.

命题 2.10 设 R 是环, 则有

(1) 若 R 是 N - 弱拟 Armendariz 环, L 为 $C(R)$ 的零化子, 则 R/L 是 N - 弱拟 Armendariz 环.

(2) $I\lhd R$, 若 R/I 是 N - 弱拟 Armendariz 环, I 是 nil- 半交换的, 则 R 是 N - 弱拟 Armendariz 环.

证 (1) $\varnothing\neq C(R)=\{s\in R|sr=rs,r\in R\}$, 令 $\bar{a}=a+L,a\in R$, $\bar{R}=R/L$. 设 $\bar{f}(x)=\bar{a_0}+\bar{a_1}x,\bar{g}(x)=\bar{b_0}+\bar{b_1}x\in\bar{R}[x]$, 有 $\bar{f}(x)\bar{R}[x]\bar{g}(x)=\bar{0}$.

下证 $\bar{a_i}\bar{R}\bar{b_j}\subseteq N(\bar{R}),i,j=0,1$, $\bar{f}(x)\bar{R}[x]\bar{g}(x)=\bar{0}$, 故对任意的 $\bar{r}\in\bar{R},\bar{f}(x)\bar{r}\bar{g}(x)=\bar{0}$, 则 a_0rb_0, $a_0rb_1+a_1rb_0$, $a_1rb_1\in L$, 所以对任意的 $s\in C(R)$,

$$s(a_0rb_0)=0,\ s(a_0rb_1+a_1rb_0)=0,\ s(a_1rb_1)=0.$$

则 $(sa_0+sa_1x)R(b_0+b_1x)=0$, 即 $(sa_0+sa_1x)R[x](b_0+b_1x)=0$. 由于 R 是 N - 弱拟 Armendariz 环, 所以对任意的 $r\in R$, 存在 $n_{ij}^r\in\mathbb{N}^+$, 使得 $(sa_irb_j)^{n_{ij}^r}=s^{n_{ij}^r}(a_irb_j)^{n_{ij}^r}=0$, 则 $(a_irb_j)^{n_{ij}^r}\in L(s\in C(R)\Rightarrow s^{n_{ij}^r}\in C(R))$, 于是 $\bar{a_i}\bar{R}\bar{b_j}\subseteq N(\bar{R}),i,j=0,1$. 所以 R/L 是 N - 弱拟 Armendariz 环.

(2) 设 $f(x)=a_0+a_1x,g(x)=b_0+b_1x\in R[x]$, 有 $f(x)R[x]g(x)=0$, 即 $f(x)Rg(x)=0$. 则对任意的 $r\in R$,

$$a_0rb_0=0,\ a_0rb_1+a_1rb_0=0,\ a_1rb_1=0.$$

另一方面 $\bar{f}(x)\bar{R}\bar{g}(x)=\bar{0}$, 由于 $\bar{R}$ 是 N - 弱拟 Armendariz 环, 所以 $\bar{a_i}\bar{R}\bar{b_j}\subseteq N(\bar{R}),i,j=0,1$. 故对任意的 $r\in R$, 存在 $n_{ij}^r\in\mathbb{N}^+$, 使得 $(a_irb_j)^{n_{ij}^r}\in I$, 令 $(a_0rb_1)^p\in I,p\in\mathbb{N}^+$.

下证 $a_0rb_1\in N(R)$. 由 $a_0rb_0=0$ 得 $(b_0a_0r)^2=0$, 于是

$$(a_1rb_0)(a_0rb_1)^{p+1}a_1r(b_0a_0r)^2(b_0(a_0rb_1)^{p+1})=0.$$

因为

$$(a_1rb_0)(a_0rb_1)^{p+1}a_1r(b_0a_0r)\in I,(b_0a_0r)(b_0(a_0rb_1)^{p+1})\in I,b_1(a_0rb_1)^pa_1r\in I,$$

且 I 是 nil - 半交换的, 所以

$$(a_1rb_0)(a_0rb_1)^{p+1}a_1r(b_0a_0r)b_1(a_0rb_1)^pa_1r(b_0a_0r)(b_0(a_0rb_1)^{p+1})\in N(I).$$

即

$$[(a_1rb_0)(a_0rb_1)^{p+1}]^2a_1r(b_0a_0r)(b_0(a_0rb_1)^{p+1})\in N(I).$$

继续此过程可得, $[(a_1rb_0)(a_0rb_1)^{p+1}]^4 \in N(I)$, 于是 $(a_1rb_0)(a_0rb_1)^{p+1} \in N(I)$. 在等式 $a_0rb_1+a_1rb_0=0$ 两边同时右乘 $(a_0rb_1)^{p+1}$, 则有

$$(a_0rb_1)^{p+2} = -(a_1rb_0)(a_0rb_1)^{p+1} \in N(I).$$

这样 $a_0rb_1 \in N(I) \subseteq N(R)$, 则 $a_iRb_j \subseteq N(R), i,j=0,1$. 所以 R 是 N - 弱拟 Armendariz 环.

推论 2.11 若 R 是 nil - 半交换环, 则 R 是 N - 弱拟 Armendariz 环.

$x \in R$ 称为正则的 [11], 若对任意的 $0 \neq r \in R, rx \neq 0, xr \neq 0$.

命题 2.12 设 $\triangle$ 为 R 中中心正则元构成的乘法封闭子集. 则 R 是 N - 弱拟 Armendariz 环当且仅当 $\triangle^{-1}R$ 是 N - 弱拟 Armendariz 环.

证 $(\Rightarrow)$ 设 $F(x)=\alpha_0+\alpha_1x, G(x)=\beta_0+\beta_1x \in (\triangle^{-1}R)[x]$, 有 $F(x)(\triangle^{-1}R)[x]G(x)=0$, 即

$$F(x)(\triangle^{-1}R)G(x)=0,$$

其中 $\alpha_i=u^{-1}a_i, \beta_j=v^{-1}b_j, u,v\in\triangle, a_i,b_j\in R$. 故对任意的 $w^{-1}r\in\triangle^{-1}R$,

$$0=u^{-1}(a_0+a_1x)(w^{-1}r)v^{-1}(b_0+b_1x)=(uwv)^{-1}(a_0+a_1x)r(b_0+b_1x).$$

令 $f(x)=a_0+a_1x, g(x)=b_0+b_1x$, 则 $f(x),g(x)\in R[x]$, 且 $f(x)Rg(x)=0$, 即 $f(x)R[x]g(x)=0$. 由于 R 是 N - 弱拟 Armendariz 环, 所以对任意的 $r\in R$, 存在 $n_{ij}^r\in\mathbb{N}^+$, 使得 $(a_irb_j)^{n_{ij}^r}=0$, 则

$$[(uwv)^{-1}a_irb_j]^{n_{ij}^r}=0,$$

即 $(uwv)^{-1}a_irb_j\in N(\triangle^{-1}R), i,j=0,1$, 则 $\alpha_i(\triangle^{-1}R)\beta_j\subseteq N(\triangle^{-1}R)$. 所以 $\triangle^{-1}R$ 是 N - 弱拟 Armendariz 环.

$(\Leftarrow)$ 设 $f(x)=a_0+a_1x, g(x)=b_0+b_1x\in R[x]$, 有 $f(x)R[x]g(x)=0$, 即 $f(x)Rg(x)=0$. 故对任意的 $r\in R, w\in\triangle, 0=w^{-1}f(x)rg(x)=f(x)(w^{-1}r)g(x)$, 则

$$f(x)(\triangle^{-1}R)g(x)=0,$$

即 $f(x)(\triangle^{-1}R)[x]g(x)=0$. 由于 $\triangle^{-1}R$ 是 N - 弱拟 Armendariz 环, 所以对任意的 $w^{-1}r\in\triangle^{-1}R$, 存在 $n_{ij}^{wr}\in\mathbb{N}^+$, 使得 $[a_i(w^{-1}r)b_j]^{n_{ij}^{wr}}=0$, 则 $(a_irb_j)^{n_{ij}^{wr}}=0$, 于是 $a_iRb_j\subseteq N(R), i,j=0,1$. 所以 R 是 N - 弱拟 Armendariz 环.

环 $R[x;x^{-1}]=\{\sum\limits_{i=k}^{n}m_ix^i|m_i\in R,k,n\in\mathbb{Z}\}$, 其中加法和乘法运算与 $R[x]$ 中相同.

推论 2.13 设 R 为环. 则 $R[x]$ 是 N - 弱拟 Armendariz 环当且仅当 $R[x;x^{-1}]$ 是 N - 弱拟 Armendariz 环.

证 令 $\triangle=\{1,x,x^2,\cdots\}$, 则 $\triangle$ 为 $R[x]$ 中中心正则元构成的乘法封闭子集. $R[x;x^{-1}]=\triangle^{-1}R[x]$, 由命题 2.12 即证.

参 考 文 献

[1] Rege M B, Chhawchharia S. Armendariz rings[J]. Pro. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., 1997, 73: 14–17.

[2] Liu Z K, Zhao R Y. On weak Armendariz rings[J]. Comm. Algebra, 2006, 34(7): 2607–2616.

[3] Baser M, Kaynarca F. Weak quasi-Armendariz rings[J]. Algebra Coll., 2011, 18(4): 541–552.

[4] Jeon Y C, Kim H K, Lee Y, et al. On weak Armendariz rings[J]. Bull. Korean Math. Soc., 2009, 46(1): 135–146.

[5] Lee T K, Wong T L. On Armendariz rings[J]. Houston J. Math., 2003, 29(3): 583–593.

[6] Anderson D D, Camillo V. Armendariz rings and Gaussian rings[J]. Comm. Algebra, 1998, 26(7): 2265–2272.

[7] Hong C Y, Kwak T K, Rizvi S T. Extensions of generalized Armendariz rings[J]. Algebra Coll., 2002, 30(2): 751–761.

[8] Hirano Y. On annihilator ideals of a polynomial ring over a noncommutative ring[J]. J. Pure Appl. Algebra, 2002, 168(1): 45–52.

[9] Lam T Y. A first course in noncommutative rings[M]. New York: Springer-Verlag New York Inc., 1991.

[10] Chen W X. On nil-semicommutative rings[J]. Thai J. of Math., 2011, 9(1): 39–47.

[11] Goodearl K R. Ring theory: nonsingular rings and modules[M]. New York: Marcel Dekker, Inc., 1976.

N-WEAK QUASI ARMENDARIZ RINGS

DING Ting-ting , WU Jun , ZHANG Pei-yu

(*School of Mathematics* & *Computer Science, Anhui Normal University, Wuhu 241003, China*)

Abstract: In this paper, the basic properties and the relations with some special rings of N-weak quasi Armendariz rings are studied. By using particular properties of some matrix rings, we show that a ring R is a N-weak quasi Armendariz ring if and only if the ring $T_n(R)$ is a N-weak quasi Armendariz ring, which generalizes the corresponding results of weak quasi-Armendariz rings.

Keywords: N-weak quasi Armendariz rings; weak quasi-Armendariz rings; semiprime rings; nil-semicommutative rings

2010 MR Subject Classification: 16N60; 16S36; 16S50