

一类无限路幂圈嵌套图边 - 平衡指数的研究

成军祥¹, 陈 刚¹, 田红娟^{1,2}, 郑玉歌¹

(1. 河南理工大学数学与信息科学学院, 河南 焦作 454950)

(2. 河南省信息统计职业学院基础部, 河南 郑州 450000)

摘 要: 本文研究了无限路幂圈嵌套图 $C_{3^m} \times P_{m_3} (m \geq 3)$ 的边 - 平衡指数集. 利用套圈计算的方法给出无限路幂圈嵌套图 $C_{3^m} \times P_{m_3} (m \geq 3)$ 最大的边 - 平衡指数的计算公式和其他指数对应图形的构造性证明, 最后完全解决此类图的边 - 平衡指数集问题.

关键词: 边 - 友好标号; 边 - 平衡指数; 无限路幂圈嵌套图; 带齿套圈子图

MR(2010) 主题分类号: 05C38; 05C78

中图分类号: O157.5

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2015)01-0180-15

1 引言

利用图的顶点和边的标号函数来研究图的理论是在 1966 年由 Stewart 引入的, 多年来国内外许多研究者致力于这方面的研究, 且获得了一系列的研究成果. 图的平衡指数集是将图的顶点和边通过映射函数与数集对应, 进而研究各类图的特征和内在特性, 完成图的指数集的公式推导和证明, 平衡指数集的理论可以应用到信息工程, 通讯网络, 编码理论, 计算机科学, 经济管理, 医学等方面. 1995 年, Sin-Min Lee 在文献 [10] 中定义了边 - 平衡图和强边 - 平衡图, 研究了一些图的边 - 平衡性和强边 - 平衡性, 并提出了两个猜想: (1) 除了 S_n (n 是奇数), 所有的树都是边 - 平衡的; (2) 除了 K_2 , 所有连通的正则图都是边 - 平衡的.

2002 年, Chen 等在文献 [5] 中扩充了边 - 平衡多重图的概念, 证明了文献 [10] 中的猜想是正确的, 并给出一个图是边 - 平衡的不是 NP- 难问题. 2008 年, Alexander、Harris 等在文献 [2, 4, 6] 中研究了图的点 - 平衡指数集和友好指数集, Suh-Ryung 在文献 [7] 中运用构造法研究了新的边 - 平衡图族. 2010 年文献 [8] 中 Chopra 等研究了轮图的边 - 平衡指数集, 2011 年文献 [9] 中 Sin-Min Lee, Chou, Galiardi, Kong, 等人研究了星圈交图的边 - 平衡指数集. 2009 年以来, 郑玉歌及其学生首次提出了无限链图和无限嵌套图的研究, 在文献 [10] 中研究了 I 型 K_4-e 链的边 - 平衡指数集, 确定了其完备指数集和完美指数集, 在文献 [11, 13] 中完全解决了 $C_n \times P_m$ ($n \geq 3, m \geq 2$) 的边 - 平衡指数集问题. 本文在无限路等圈嵌套图的基础上, 提出带齿套圈子图的概念, 通过对带齿套圈子图和基础图的研究, 运用套圈计算的方法给出无限路幂圈嵌套图 $C_{3^m} \times P_{m_3} (m \geq 3)$ 最大的边 - 平衡指数的计算公式, 最后完全解决此类图的边 - 平衡指数集问题.

2 预备知识

*收稿日期: 2013-03-29

接收日期: 2013-09-03

基金项目: 国家自然科学基金科学基金 (51175153/E050903); 河南省教育厅科学技术研究重点项目资助 (12B110009); 河南省应用数学重点学科资助; 河南理工大学运筹学与控制论重点学科资助.

作者简介: 成军祥 (1965-), 男, 河南焦作, 副教授, 主要研究方向: 应用统计, 组合优化.

设 f 是图 G 的边集 $E(G)$ 上的一个 $0, 1$ 标号, 即 $\forall e \in E(G)$, 定义 $f\{e\} = 0$ 或 1 , 标号 0 或 1 的边集分别记为 $E(0), E(1)$, 用 $e(0), e(1)$ 分别来表示此二集合的基数. 由 f 诱导出一个顶点标号 $f^+ : V(G) \rightarrow \{0, 1\}$ 是这样定义的:

$$f^+(x) = \begin{cases} 0, & e_x(0) > e_x(1); \\ 1, & e_x(1) > e_x(0); \\ \text{不定义}, & e_x(0) = e_x(1) \end{cases}$$

($e_x(0), e_x(1)$ 表示与 x 关联的边中标号为 0 或 1 的边集合的基数).

图 G 中标号为 0 或 1 的顶点集分别记为 $V(0), V(1)$, 它们的基数分别记为 $v(0), v(1)$.

定义 2.1 ^[1] 设 f 是图 G 的边集 $E(G)$ 上的一个 $0, 1$ 标号, 如果 $|e_f(0) - e_f(1)| \leq 1$, 那么就称 f 为图 G 的边 - 友好标号.

定义 2.2 ^[1] 如果图 G 存在边 - 友好标号 f , 则称集合 $\{|v_f(0) - v_f(1)| \mid \text{标号 } f \text{ 是友好的}\}$ 为图 G 的边 - 平衡指数集, 记为 $EBI(G)$.

定义 2.3 幂圈套图表示 m 个圈的图, 其中最内圈有 n 个顶点, 且从内到外圈上顶点数以幂次方 (即 $n^1, n^2, n^3, \dots, n^{m-1}, n^m$) 依次增加的. 记为 C_{n^m} , 其中

$$\begin{aligned} V(C_{n^m}) &= \{(i)_j \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq k^i, 2 \leq k \leq n\}; \\ E(C_{n^m}) &= \{((i)_j(i)_{j+1}) \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq k^i - 1, 2 \leq k \leq n\} \\ &\quad \cup \{((i)_{k^m}(i)_1) \mid 1 \leq i \leq m, 2 \leq k \leq n\}. \end{aligned}$$

定义 2.4 无限路形图表示 n^m 条包含 m 个顶点的路, 且路中除路的终点外其他点处均有 n 个分叉的. 记为 P_{m_n} , 其中

$$\begin{aligned} V(P_{m_n}) &= \{(i)_j \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq k^i, 2 \leq k \leq n\}; \\ E(P_{m_n}) &= \{((i)_j(i+1)_{kj-r}) \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq k^i, 2 \leq k \leq n, 0 \leq r \leq k-1\}. \end{aligned}$$

定义 2.5 无限路幂圈嵌套图表示由幂圈套图 C_{n^m} 与无限路形图 P_{m_n} 嵌套构成的. 记为 $C_{n^m} \times P_{m_n}$, 其中

$$\begin{aligned} V(C_{n^m} \times P_{m_n}) &= V(C_{n^m}) \cup V(P_{m_n}), \\ E(C_{n^m} \times P_{m_n}) &= E(C_{n^m}) \cup E(P_{m_n}). \end{aligned}$$

定义 2.6 若与点 x 关联的 n 条边, 满足 $e_x(1) - e_x(0) = 1$ 或 0 , 则称 x 为饱和 1 - 点, 否则称为不饱和 1 - 点. 与 x 关联的 n 条边, 满足 $e_x(0) = n$ 则称 x 为饱和 0 - 点, 否则称为不饱和 0 - 点.

方便起见, 我们对图进行以下标号:

最里圈上的点顺时针依次记为 $(1)_1, (1)_2, \dots, (1)_{n-1}, (1)_n$. 类似的, 从里向外依次将圈上的点按顺时针用 $(m)_1, (m)_2, \dots, (m)_{n^{m-1}}, (m)_{n^m}$ 标号, 其中符号 $(j)_i$ 表示第 j 圈上的第 i 个点.

以 $(1)_1$ 作为起点的路有如下:

$$\begin{aligned} (1)_1 &\rightarrow (2)_1 \rightarrow (3)_1 \rightarrow \dots \rightarrow (m-1)_1 \rightarrow (m)_1; \\ (1)_1 &\rightarrow (2)_1 \rightarrow (3)_1 \rightarrow \dots \rightarrow (m-1)_1 \rightarrow (m)_2; \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (1)_1 \rightarrow (2)_1 \rightarrow (3)_1 \rightarrow \cdots \rightarrow (m-1)_1 \rightarrow (m)_m; \\
& (1)_1 \rightarrow (2)_1 \rightarrow (3)_1 \rightarrow \cdots \rightarrow (m-1)_2 \rightarrow (m)_{m+1}; \\
& \cdots \\
& (1)_1 \rightarrow (2)_{n^1} \rightarrow (3)_{n^2} \rightarrow \cdots \rightarrow (m-1)_{n^{m-2}} \rightarrow (m)_{n^{m-1}-1}; \\
& (1)_1 \rightarrow (2)_{n^1} \rightarrow (3)_{n^2} \rightarrow \cdots \rightarrow (m-1)_{n^{m-2}} \rightarrow (m)_{n^{m-1}}.
\end{aligned}$$

类似的以 $(1)_n$ 作为起点的路如下:

$$\begin{aligned}
& (1)_n \rightarrow (2)_{n^2-n+1} \rightarrow (3)_{n^3-n^2+1} \rightarrow \cdots \rightarrow (m-1)_{n^{m-1}-n^{m-2}+1} \rightarrow (m)_{n^m-n^{m-1}+1}; \\
& (1)_n \rightarrow (2)_{n^2-n+1} \rightarrow (3)_{n^3-n^2+1} \rightarrow \cdots \rightarrow (m-1)_{n^{m-1}-n^{m-2}+1} \rightarrow (m)_{n^m-n^{m-1}+2}; \\
& \cdots \\
& (1)_n \rightarrow (2)_{n^2-n+1} \rightarrow (3)_{n^3-n^2+1} \rightarrow \cdots \rightarrow (m-1)_{n^{m-1}-n^{m-2}+1} \rightarrow (m)_{n^m-n^{m-1}+n}; \\
& (1)_n \rightarrow (2)_{n^2-n+1} \rightarrow (3)_{n^3-n^2+1} \rightarrow \cdots \rightarrow (m-1)_{n^{m-1}-n^{m-2}+1} \rightarrow (m)_{n^m-n^{m-1}+n+1}; \\
& \cdots \\
& (1)_n \rightarrow (2)_{n^2} \rightarrow (3)_{n^3} \rightarrow \cdots \rightarrow (m-1)_{n^{m-1}} \rightarrow (m)_{n^m-1}; \\
& (1)_n \rightarrow (2)_{n^2} \rightarrow (3)_{n^3} \rightarrow \cdots \rightarrow (m-1)_{n^{m-1}} \rightarrow (m)_{n^m}.
\end{aligned}$$

这就是图 $C_{n^m} \times P_{m_n}$ 中的 n^m 条路.

注 1 图 G 中最大的边 - 平衡指数用 $\max\{EBI(G)\}$ 来表示.

注 2 在不混淆的情况下, 我们把图中标号为 0 (或 1) 的边记为 0- 边 (或 1- 边), 0- 点 (或 1- 点) 表示标号为 0 (或 1) 的顶点.

注 3 $(2k-1)_r(2k)_s \leftrightarrow (2k)_s(2k)_{s+1}$ 表示边 $(2k-1)_r(2k)_s$ 由 0- 边变为 1- 边, 同时边 $(2k)_s(2k)_{s+1}$ 由 1- 边变为 0- 边.

注 4 在构造边平衡指数集的标号图时, 所做的每一步变换都是在上一步的基础上完成的.

注 5 文中所有涉及的参数无特殊说明均为自然数.

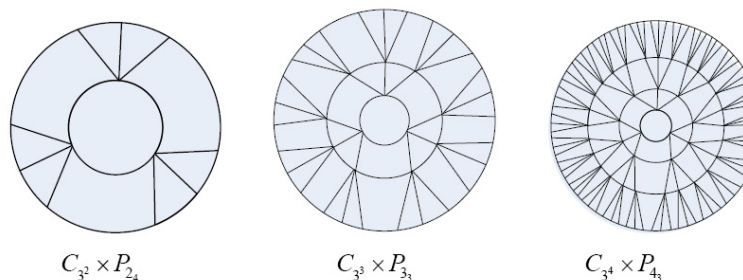
3 图 $C_{3^m} \times P_{m_3}(m \geq 3)$ 最大边 - 平衡指数

本文在无限路幂圈嵌套图的基础上引入带齿套圈子图的概念, 通过对带齿套圈子图和基础图的研究, 运用套圈计算的方法给出无限路幂圈嵌套图 $C_{3^m} \times P_{m_3}(m \geq 3)$ 最大的边 - 平衡指数的计算公式, 以及平衡指数集对应标号图形的构造. 对于图进行边 - 友好标号, 我们将 m 分为 4 类: $m \equiv 3(\text{mod}4)$; $m \equiv 0(\text{mod}4)$, $m \equiv 1(\text{mod}4)$; $m \equiv 2(\text{mod}4)$, 分别来讨论其边 - 平衡指数集.

例 3.1 下面给出了几个 $C_{3^m} \times P_{m_3}$ 图.

在幂圈嵌套图的定义下, 为了更简便的给出图的标号图形, 根据幂圈嵌套图的递推性, 给出带齿套圈子图的定义.

定义 3.1 在无限路幂圈嵌套图中, 以第 $k(t-1)+i$ 圈上的点作为起点, 第 $kt+i$ 圈上的点为终点的图形所经过的点的导出子图, 记作 T'_t , 在其基础上去掉第 $k(t-1)+i$ 圈上的边



得到的图, 记作 $T_t (t = 1, 2, \dots, \frac{m-i}{k})$, 称为第 t 个带齿 k 套圈子图. 特别的 k 由 m 的分类决定, 在图 $C_{3^m} \times P_{m_3} (m \geq 3)$ 中所指的套圈子图均为带齿 4 套圈子图.

引理 3.1 在幂圈嵌套图 $C_{3^m} \times P_{m_3} (m \geq 3)$ 中, 对于给定的带齿套圈子图 $T_t (t = 1, 2, \dots, \frac{m-i}{4}) (i = 3, 4, 5, 6)$, 若路形图的起点记作第 ∂ 圈上的点, 从内到外依次经过的圈记为第 $\partial + 1$ 圈, 第 $\partial + 2$ 圈, 第 $\partial + 3$ 圈, 第 $\partial + 4$ 圈, 则该带齿套圈子图的最大边 - 平衡指数为 $3^{\partial+4} - 3^{\partial}$.

证 首先, 构造最大边 - 平衡指数对应的标号图.

在路形图中, 将路径

$$\begin{aligned} &(\partial)_a(\partial+1)_b(\partial+2)_c(\partial+3)_d(\partial+4)_e \quad (1 \leq a \leq 3^{\partial}; \\ &b = 2 + 3r, \quad 1 \leq b \leq 3^{\partial+1}; \\ &c = 4 + r + 9s, \quad r = 0, 1, 2, \quad 1 \leq c \leq 3^{\partial+2}; \\ &d = 10 + r + 27s, \quad r = 0, 1, \dots, 8, \quad 1 \leq d \leq 3^{\partial+3}; \\ &e = 28 + r + 81s, \quad r = 0, 1, \dots, 26, \quad 1 \leq e \leq 3^{\partial+4}) \end{aligned}$$

中的边均标为 0- 边, 同时路径

$$\begin{aligned} &(\partial+1)_b(\partial+2)_c(\partial+3)_d(\partial+4)_e \quad (b = 1 + 3r, \quad 1 \leq b \leq 3^{\partial+1}; \\ &c = 3 + 9s, \quad 1 \leq c \leq 3^{\partial+2}; \quad d = 7 + r + 27s, \quad r = 0, 1, 2, \quad 1 \leq d \leq 3^{\partial+3}; \\ &e = 19 + r + 81s, \quad r = 0, 1, \dots, 8, \quad 1 \leq e \leq 3^{\partial+4}) \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} &(\partial+1)_b(\partial+2)_c(\partial+3)_d(\partial+4)_e \quad (b = 3 + 3r + 9s, \quad r = 0, 1, \quad 1 \leq b \leq 3^{\partial+1}; \\ &c = 7 + 9r + 27s, \quad r = 0, 1, \quad 1 \leq c \leq 3^{\partial+2}; \\ &d = 19 + r + 27s + 81t, \quad r = 0, 1, 2, \quad s = 0, 1, \quad 1 \leq d \leq 3^{\partial+3}; \\ &e = 55 + r + 81s + 127t, \quad r = 0, 1, \dots, 8, \quad s = 0, 1, \quad 1 \leq e \leq 3^{\partial+4}) \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} &(\partial+2)_c(\partial+3)_d(\partial+4)_e \quad (c = 25 + 27s, \quad 1 \leq c \leq 3^{\partial+2}; \\ &d = 73 + 81s, \quad 1 \leq d \leq 3^{\partial+3}; \\ &e = 217 + r + 243s, \quad r = 0, 1, 2, \quad 1 \leq e \leq 3^{\partial+4}) \end{aligned}$$

上的边均标号为 0. 另外将路中边

$$(\partial+1)_b(\partial+2)_c(b=9+9r, 1 \leq b \leq 3^{\partial+1}; c=26+27r, 1 \leq c \leq 3^{\partial+2})$$

标号为 0, 其余边均标号为 1.

在幂圈套图中, 将第 $\partial+1$ 圈中弧

$$(\partial+1)_i(\partial+1)_{i+1}(\partial+1)_{i+2}(i=1+3r, 1 \leq i \leq 3^{\partial+1})$$

边标号为 0; 将第 $\partial+2$ 圈上除边 $(\partial+2)_i(\partial+2)_{i+1}(i=25+27r, 1 \leq i \leq 3^{\partial+2})$ 外均标号为 0; 第 $\partial+3$ 圈上的边均为 0- 边; 第 $\partial+4$ 圈上边

$$(\partial+4)_i(\partial+4)_{i+1}(i=1+2r+63s+81u, r=0,1,\dots,8, s=0,1;$$

或

$$i=220+2t+243u, t=0,1,2, 1 \leq i \leq 3^{\partial+4})$$

标号为 0, 其它边则都标号为 1.

在带齿套圈子图 $T_t(t=1,2,\dots,\frac{m-i}{4})(i=3,4,5,6)$ 中, 共有 $80 \times 3^{\alpha+1}$ 条边, 其中 0- 边有 $40 \times 3^{\partial+1}$ 条. 由边 - 友好标号的定义, 即 $|e_f(0) - e_f(1)| \leq 1$, 通过计算, 在上述构造图中的边为友好标号. 在构造的标号图中, 第 $\partial+1$ 圈上顶点 $(\partial+1)_i(i=2+3t, 1 \leq i \leq 3^{\partial+1})$ 和第 $\partial+2$ 圈上顶点

$$\begin{aligned} &(\partial+2)_i(i=3+s+9t, s=0,1,2,3,4, 1 \leq i \leq 3^{\partial+2}), \\ &(\partial+2)_i(i=21+s+27t, s=0,1,2,3, 1 \leq i \leq 3^{\partial+2}) \end{aligned}$$

以及第 $\partial+3$ 圈上顶点

$$\begin{aligned} &(\partial+3)_{3i-r}(i=3+s+9t, s=0,1,2,3,4, 1 \leq i \leq 3^{\partial+3}; r=0,1,2), \\ &(\partial+3)_{3i-r}(i=21+s+27t, s=0,1,2,3, 1 \leq i \leq 3^{\partial+3}; r=0,1,2), \\ &(\partial+3)_i(i=73+81t, 1 \leq i \leq 3^{\partial+3}) \end{aligned}$$

均为 0- 点, 其它顶点都为 1- 点, 可知 0- 点有 $20 \times 3^{\partial}$ 个.

又因为该带齿套圈子图中共有 $40 \times 3^{\partial+1}$ 个点, 且图中每个顶点都在顶点标号 f^+ 下定义, 这样就得到 $|v(0) - v(1)| = 3^{\partial+4} - 3^{\partial}$.

可以证明 $3^{\partial+4} - 3^{\partial}$ 为该带齿套圈子图的最大边 - 平衡指数.

因为在上述标号的带齿套圈子图中, 第 ∂ 圈和第 $\partial+4$ 圈上点均为三度饱和 1- 点, 在带齿套圈子图嵌套过程中不会改变其点的标号特征. 其他圈上的点也均为 6 度饱和点, 又由于任意一个 1- 点或不定义变为 0- 点, 只需增加一条 0- 边; 同时如果想 0- 点变为 1- 点或不定义点, 至少要去掉 3 条 0- 边. 而在上述构造图中的任意一条 0- 边和 1- 边互换, 0- 点的个数不会减少, 而 1- 点的个数必要减少, 此时 $|v(0) - v(1)|$ 的值必减小, 因此 $3^{\partial+4} - 3^{\partial}$ 为该图的最大边 - 平衡指数, 即

$$\max\{EBI(T_t(t=1,2,\dots,\frac{m-i}{4})(i=3,4,5,6))\} = 3^{\partial+4} - 3^{\partial}.$$

引理 3.2 在幂圈嵌套图 $C_{3^3} \times P_{3^3}$ 中, 最大的边 - 平衡指数为 3^3 即 27.

证 在这里, 我们首先给出该图的最大边 - 平衡指数对应的标号图.

令与点 $(1)_2, (2)_a (a = 3, 4, 5, 6, 7)$ 相关联的边为 0 - 边, 同时第 2 圈上的边和边 $(3)_1(3)_2, (3)_3(3)_4, (3)_5(3)_6, (3)_{22}(3)_{23}, (3)_{24}, (3)_{25}, (3)_{26}, (3)_{27}$ 标号为 0, 其它边则都标号为 1. 经计算上述构造图满足友好标号, 在图中共有 6 个 0- 点, 其余均为 1- 点, 而图中共有 39 个点, 这样就得到 $|v(0) - v(1)| = 27$.

在上述构造图中, 第一圈上的点均为 5 度点, 第 2 圈上的点均为 6 度点, 第 3 圈上的点均为 3 度点. 图中所有点均为饱和点, 除一个为次大度点外, 0- 点均为最大度点. 若要图中 0- 点变为 1- 点或不定义点, 至少需去掉 3 条 0- 边, 而将其放在任何位置, 0- 点个数必将增加, 1- 点个数必将减少, 从而 $\max\{EBI(C_{3^3} \times P_{3^3})\} = 27$.

引理 3.3 若 $m \equiv 3(\text{mod}4)$ 即 $m = 3 + 4t$ 时, 那么幂圈嵌套图 $C_{3^m} \times P_{m_3} (m \geq 3)$ 的最大边 - 平衡指数为 3^m .

证 当 $m = 3$ 时, 由引理 3.2 知公式成立.

下证 $m > 3$ 时公式成立.

首先, 给出最大边 - 平衡指数对应标号图的构造方法.

由引理 3.1 知, 当 $m = 3 + 4t$ 时带齿套圈子图 $T_i (i = 1, 2, \dots, \frac{m-3}{4})$ 的起点所在圈为 $\partial = 3+4(i-1)$, 故其最大的边 - 平衡指数为 $3^{3+4i} - 3^{3+4(i-1)}$. 将引理 3.2 中 $m = 3$ 时得到的最大边 - 平衡指数标号图作为基础图. 依次按照引理 3.2 中带齿套圈子图 $T_i (i = 1, 2, \dots, \frac{m-3}{4})$ 的最大边 - 平衡指数标号图从里到外进行标号, 即可得到 $C_{3^m} \times P_{m_3} (m \geq 3)$ 的最大边 - 平衡指数标号图.

事实上, 在标号过程中图中点的特征均未发生变化, 依然满足友好标号, 故

$$\begin{aligned} \max\{EBI(C_{3^m} \times P_{m_3})\} &= \max\{EBI(C_{3^3} \times P_{3^3})\} + \sum_{i=1}^t \max\{EBI(T_i)\} \\ &= 3^3 + (3^7 - 3^3) + (3^{11} - 3^7) + \dots + (3^m - 3^{m-4}) \\ &= 3^m (m > 3), \end{aligned}$$

即若 $m \equiv 3(\text{mod}4)$ 时, 那么 $\max\{EBI(C_{3^m} \times P_{m_3})\} = 3^m$.

引理 3.4 在幂圈嵌套图 $C_{3^4} \times P_{4_3}$ 中, 最大的边 - 平衡指数为 3^4 即 81.

证 首先, 构造具有最大边 - 平衡指数的标号图.

由于幂圈嵌套图由路形图和幂圈图嵌套得到, 方便起见, 我们在路形图和幂圈套图中分别标号.

在路形图中, 将路径 $(2)_b(3)_c(4)_d (b = 1, 2, 3, 4, 5, 6; c = 3, 4, \dots, 17; d = 7, 8, \dots, 51)$ 中的边和边 $(1)_1(2)_2, (1)_1(2)_3, (1)_2(2)_4, (1)_2(2)_5, (1)_3(2)_7, (1)_3(2)_9$ 为 0 - 边, 其余各边均为 1 - 边.

在幂圈套图中, 将第 2 圈上除边 $(2)_9(2)_1, (2)_6(2)_7$ 外其他标号为 0, 第三圈上边均为 0- 边, 第 4 圈上的边 $(4)_i(4)_{i+1} (i = 1 + 2r, 1 \leq i \leq 5)$ 和 $(4)_i(4)_{i+1} (i = 81 - 2r, 52 \leq i \leq 81)$ 标号为 0, 其它边则都标号为 1.

经计算上述构造图满足边友好标号, 在图中 $(2)_i (i = 2, 3, 4, 5), (3)_i (i = 3, 4, \dots, 17)$ 为 0- 点, 点 $(2)_6$ 为无定义点, 其它顶点都为 1- 点, 通过计算可得在图中共有 19 个 0- 点, 1 个无定义点, 而图中共有 120 个点, 这样就得到 $|v(0) - v(1)| = 81$.

在上述构造图中, 第一圈上的点均为 5 度点, 第 4 圈上的点均为 3 度点, 其他圈上的点均为 6 度点. 图中所有点均为饱和点, 且 0- 点均为 6 度点, 若要图中 0- 点变为 1- 点或不定义点, 至少需去掉 3 条 0- 边, 而将其放在任何位置, 0- 点个数必将增加, 1- 点个数必将减少, 从而 $\max\{EBI(C_{3^4} \times P_{4_3})\} = 81$.

引理 3.5 若 $m \equiv 0(\text{mod } 4)$ 即 $m = 4 + 4t$ 时, 那么幂圈嵌套图 $C_{3^m} \times P_{m_3} (m \geq 3)$ 的最大边 - 平衡指数为 3^m .

证 当 $m = 4$ 时, 由引理 3.4 知公式成立.

下证 $m > 4$ 时公式成立.

首先, 给出最大边 - 平衡指数对应的标号图的构造方法.

由引理 3.1 知, 当 $m = 4 + 4t$ 时带齿套圈子图 $T_i (i = 1, 2, \dots, \frac{m-4}{4})$ 的起点所在圈为 $\partial = 4+4(i-1)$, 故其最大的边 - 平衡指数为 $3^{4+4i} - 3^{4+4(i-1)}$. 将引理 3.4 中 $m = 4$ 时得到的最大边 - 平衡指数标号图作为基础图. 依次按照引理 3.1 中带齿套圈子图 $T_i (i = 1, 2, \dots, \frac{m-4}{4})$ 的最大边 - 平衡指数标号图从里到外进行标号, 即可得到 $C_{3^m} \times P_{m_3} (m \geq 3)$ 的最大边 - 平衡指数标号图.

事实上, 在标号过程中图中点的特征均未发生变化, 依然满足友好标号, 故

$$\begin{aligned} \max\{EBI(C_{3^m} \times P_{m_3})\} &= \max\{EBI(C_{3^4} \times P_{4_3})\} + \sum_{i=1}^t \max\{EBI(T_i)\} \\ &= 3^4 + (3^8 - 3^4) + (3^{12} - 3^8) + \dots + (3^m - 3^{m-4}) \\ &= 3^m (m > 4). \end{aligned}$$

即若 $m \equiv 0(\text{mod } 4)$ 时, 那么 $\max\{EBI(C_{3^m} \times P_{m_3})\} = 3^m$.

引理 3.6 在幂圈嵌套图 $C_{3^5} \times P_{5_3}$ 中, 最大的边 - 平衡指数为 3^5 即 243.

证 首先, 对图 $C_{3^5} \times P_{5_3}$ 按照带齿套圈子图的定义, 将第一圈的边分离出可从中得到一个以第一圈上点作为起始点, 第 5 圈上点作为终点的套圈子图, 记作 T_0 . 按照引理 3.1 中对于带齿套圈子图的标号方法, 将 T_0 进行标号, 再将第 1 圈上边 $(1)_1(1)_2$ 标号为 0, 其它边则都标号为 1.

经计算上述构造图满足边友好标号, 其中所有的 0- 点均在 T_0 中, 经过计算可知共有 60 个 0- 点, 而图 $C_{3^5} \times P_{5_3}$ 共有 363 个点, 这样就得到 $|v(0) - v(1)| = 243$.

在上述构造的标号图中, 第一圈上的点均为 5 度点, 第 5 圈上的点均为 3 度点, 其他圈上的点均为 6 度点. 在上述标号下, 图中所有点均为饱和点, 且 0- 点均为 6 度点, 若要图中 0- 点变为 1- 点或不定义点, 至少需去掉 3 条 0- 边, 而将其放在任何位置, 0- 点个数必将增加, 1- 点个数必将减少, 从而 $\max\{EBI(C_{3^4} \times P_{4_3})\} = 243$.

引理 3.7 若 $m \equiv 1(\text{mod } 4)$ 即 $m = 5 + 4t$ 时, 那么幂圈嵌套图 $C_{3^m} \times P_{m_3} (m \geq 3)$ 的最大边 - 平衡指数为 3^m .

证 当 $m = 5$ 时, 由引理 3.6 知公式成立.

下证 $m > 5$ 时公式成立.

首先, 给出最大边 - 平衡指数对应标号图的构造方法.

由引理 3.1 知, 当 $m = 5 + 4t$ 时带齿套圈子图 $T_i (i = 1, 2, \dots, \frac{m-5}{4})$ 的起点所在圈为 $\partial = 5+4(i-1)$, 故其最大的边 - 平衡指数为 $3^{5+4i} - 3^{5+4(i-1)}$. 将引理 3.6 中 $m = 5$ 时得到的最大边 - 平衡指数标号图作为基础图. 依次按照引理 3.1 中带齿套圈子图 $T_i (i = 1, 2, \dots, \frac{m-5}{4})$

的最大边 - 平衡指数标号图从里到外进行标号, 即可得到 $C_{3^m} \times P_{m_3} (m \geq 3)$ 的最大边 - 平衡指数标号图.

事实上, 在标号过程中图中点的特征均未发生变化, 依然满足友好标号, 故

$$\begin{aligned} \max\{EBI(C_{3^m} \times P_{m_3})\} &= \max\{EBI(C_{3^5} \times P_{5_3})\} + \sum_{i=1}^t \max\{EBI(T_i)\} \\ &= 3^5 + (3^9 - 3^5) + (3^{13} - 3^9) + \cdots + (3^m - 3^{m-4}) \\ &= 3^m (m > 5). \end{aligned}$$

即若 $m \equiv 1 \pmod{4}$ 时, 那么 $\max\{EBI(C_{3^m} \times P_{m_3})\} = 3^m$.

引理 3.8 在幂圈嵌套图 $C_{3^6} \times P_{6_3}$ 中, 最大的边 - 平衡指数为 3^6 即 729.

证 首先, 构造具有最大边 - 平衡指数的图形:

由于幂圈嵌套图由路形图和幂圈套图嵌套得到, 方便起见, 我们在路形图和幂圈套图中分别标号.

在路形图中, 将路径

$$\begin{aligned} &(2)_a(3)_b(4)_c(5)_d(6)_e (1 \leq a \leq 9; \\ &b = 2 + 3r, 1 \leq b \leq 27; \\ &c = 4 + r + 9s, r = 0, 1, 2, 1 \leq c \leq 81; d = 10 + r + 27s, r = 0, 1, \cdots, 8, 1 \leq d \leq 243; \\ &e = 28 + r + 81s, r = 0, 1, \cdots, 26, 1 \leq e \leq 729) \end{aligned}$$

和路径

$$\begin{aligned} &(3)_b(4)_c(5)_d(6)_e (b = 1 + 3r, 4 \leq b \leq 9; \\ &c = 3 + 9s, 12 \leq c \leq 81; d = 7 + r + 27s, r = 0, 1, 2, 34 \leq d \leq 243; \\ &e = 19 + r + 81s, r = 0, 1, \cdots, 8, 100 \leq e \leq 729) \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} &(3)_b(4)_c(5)_d(6)_e (b = 3 + 3r, 1 \leq b \leq 8; \\ &c = 7 + 9s, 1 \leq c \leq 78; d = 19 + r + 27s, r = 0, 1, 2, 1 \leq d \leq 243; \\ &e = 55 + r + 81s, r = 0, 1, \cdots, 8, 100 \leq e \leq 702) \end{aligned}$$

中的边和边 $(1)_1(2)_2, (1)_2(2)_5, (1)_3(2)_8, (1)_3(2)_9$ 标为 0 - 边, 其余各边均为 1 - 边.

在幂圈套图中, 第 6 圈上

$$\begin{aligned} &(6)_i(6)_i + 1 (i = 2 + 2r, 2 \leq i \leq 27), \\ &(6)_i(6)_{i+1} (i = 64 + 2r + 81s, r = 0, 1, \cdots, 17, 27 \leq i \leq 702), \\ &(6)_i(6)_{i-1} (i = 728 - 2r, 702 \leq i \leq 729) \end{aligned}$$

和 $(6)_{729}(6)_1$ 为 0 - 边. 第四圈和第五圈上的边均为 0- 边. 另外, 将第 1 圈上的边 $(1)_1(1)_2$ 和第 2 圈上的边 $(2)_3(2)_4, (2)_6(2)_7$ 标号为 0, 其它边则都标号为 1.

经计算上述构造图满足边友好标号, 其中顶点

$$\begin{aligned}(3)_i (i = 2 + 3r, 1 \leq i \leq 27), \\ (4)_i (i = 12 + s + 9t, s = 0, 1, 2, 3, 4, 1 \leq i \leq 81), \\ (4)_i (i = 4 + s + 71t, s = 0, 1, 2, 3, t = 0, 1)\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}(5)_{3i-r} (i = 12 + s + 9t, s = 0, 1, 2, 3, 4, t = 0, 1, \dots, 6; r = 0, 1, 2), \\ (5)_{3i-r} (i = 4 + s + 71t, s = 0, 1, 2, 3, t = 0, 1; r = 0, 1, 2)\end{aligned}$$

为 0 - 点, 仅有 $(2)_9$ 一个为无定义点, 其它顶点都为 1 - 点. 通过计算可得在图中共有 181 个 0 - 点, 1 个无定义点, 而图中共有 1092 个点, 这样就得到 $|v(0) - v(1)| = 729$.

在上述构造图中, 第一圈上的点均为 5 度点, 第 6 圈上的点均为 3 度点, 其他圈上的点均为 6 度点. 图中所有点均为饱和点, 且 0 - 点均为 6 度点, 若要图中 0 - 点变为 1 - 点或无定义点, 至少需去掉 3 条 0 - 边, 而将其放在任何位置, 0 - 点个数必将增加, 1 - 点个数必将减少, 从而 $\max\{EBI(C_{3^4} \times P_{4_3})\} = 729$.

引理 3.9 若 $m \equiv 2(\text{mod } 4)$ 即 $m = 6 + 4t$ 时, 那么幂圈嵌套图 $C_{3^m} \times P_{m_3} (m \geq 3)$ 的最大边 - 平衡指数为 3^m .

证 当 $m = 6$ 时, 由引理 3.8 知公式成立.

下证 $m > 6$ 时公式成立.

首先, 给出最大边 - 平衡指数对应标号图的构造方法

由引理 3.1 知, 当 $m = 6 + 4t$ 时套圈子图 $T_i (i = 1, 2, \dots, \frac{m-6}{4})$ 的起点所在圈为 $\partial = 6 + 4(i-1)$, 故其最大的边 - 平衡指数为 $3^{6+4i} - 3^{6+4(i-1)}$. 将引理 3.8 中 $m = 6$ 时得到的最大边 - 平衡指数标号图作为基础图. 依次按照引理 3.1 中带齿套圈子图 $T_i (i = 1, 2, \dots, \frac{m-6}{4})$ 的最大边 - 平衡指数标号图从里到外进行标号, 即可得到的最大边 - 平衡指数标号图.

事实上, 在标号过程中图中点的特征均未发生变化, 依然满足友好标号, 故

$$\begin{aligned}\max\{EBI(C_{3^m} \times P_{m_3})\} &= \max\{EBI(C_{3^6} \times P_{6_3})\} + \sum_{i=1}^t \max\{EBI(T_i)\} \\ &= 3^6 + (3^{10} - 3^6) + (3^{14} - 3^{10}) + \dots + (3^m - 3^{m-4}) \\ &= 3^m (m > 6),\end{aligned}$$

即若 $m \equiv 2(\text{mod } 4)$ 时, 那么

$$\max\{EBI(C_{3^m} \times P_{m_3})\} = 3^m.$$

由引理 3.3, 引理 3.5, 引理 3.7, 引理 3.9 可得:

定理 3.1 无限路幂圈嵌套图 $C_{3^m} \times P_{m_3} (m \geq 3)$ 的最大边 - 平衡指数为 3^m .

4 图 $C_{3^m} \times P_{m_3} (m \geq 3)$ 边 - 平衡指数集

引理 4.1 在图 $C_{3^m} \times P_{m_3} (m \geq 3)$ 中, 任意给定的带齿套圈子图 $T_t (t = 1, 2, \dots, \frac{m-i}{4}) (i = 3, 4, 5, 6)$ 中, 若路形图的起点记作第 ∂ 圈上的点, 从内到外依次经过的圈记为称为第 $\partial + 1$ 圈, 第 $\partial + 2$ 圈, 第 $\partial + 3$ 圈, 第 $\partial + 4$ 圈, 则该带齿套圈子图边 - 平衡指数可经过变换得到 $\{3^{\partial+4} - 3^\partial - 2, 3^{\partial+4} - 3^\partial - 4, 3^{\partial+4} - 3^\partial - 6, \dots, 6, 4, 2, 0\}$.

证 将引理 3.1 中给出的标号图作为原始图, 依次在其基础上进行变换可以达到相应指数对应的标号图形.

第 1 步 依次将

$$\begin{aligned} & (\partial + 3)_a(\partial + 4)_b \\ & \leftrightarrow (\partial + 4)_b(\partial + 4)_{b+1} (a = 7 + s + 27t + 81u, s = 0, 1, \dots, 14, t = 0, 1, 1 \leq a \leq 3^{\partial+3}; \\ & b = 19 + r + 3s + 81t + 243u, r = 0, 1, s = 0, 1, \dots, 14, t = 0, 1, 1 \leq b \leq 3^{\partial+4}), \end{aligned}$$

这样我们依次得到指数分别为 $\{3^{\partial+4}3^\partial - 2, 3^{\partial+4}3^\partial - 4, \dots, 40 \times 3^\partial\}$ 的标号图.

第 2 步 依次将

$$\begin{aligned} & (\partial + 3)_a(\partial + 4)_b \\ & \leftrightarrow (\partial + 4)_b(\partial + 4)_{b+1} (a = 61 + s + 81u, s = 0, 1, \dots, 12, 1 \leq a \leq 3^{\partial+3}; \\ & b = 181 + r + 3s + 243u, r = 0, 1, s = 0, 1, \dots, 12, 1 \leq b \leq 3^{\partial+4}), \end{aligned}$$

这样我们依次得到指数分别为 $\{40 \times 3^\partial - 2, 40 \times 3^\partial - 4, \dots, 68 \times 3^{\partial-1}\}$ 的标号图.

第 3 步 依次将

$$\begin{aligned} & (\partial + 3)_a(\partial + 3)_{a+1} \\ & \leftrightarrow (\partial + 3)_a(\partial + 4)_{b+1} (a = 1 + r + 21s + 27t, r = 0, 1, 2, 3, 4, s = 0, 1, 1 \leq a \leq 3^{\partial+3}; \\ & b = 3 + 3r + 64s + 81t, r = 0, 1, 2, 3, 4, s = 0, 1, 1 \leq b \leq 3^{\partial+4}), \end{aligned}$$

这样我们依次得到指数分别为 $\{68 \times 3^{\partial-1} - 2, 68 \times 3^{\partial-1} - 4, \dots, 8 \times 3^{\partial-1}\}$ 的标号图.

第 4 步 依次将

$$\begin{aligned} & (\partial + 3)_a(\partial + 3)_{a+1} \\ & \leftrightarrow (\partial + 3)_a(\partial + 4)_{b+1} (a = 74 + r + 81s, r = 0, 1, 2, 1 \leq a \leq 3^{\partial+3}; \\ & b = 222 + r + 243s, r = 0, 1, 1 \leq b \leq 3^{\partial+4}), \end{aligned}$$

这样我们依次得到指数分别为 $\{8 \times 3^{\partial-1} - 2, 68 \times 3^{\partial-1} - 4, \dots, 4 \times 3^{\partial-1}\}$ 的标号图.

第 5 步 依次将

$$(\partial + 4)_b(\partial + 4)_{b+1} \leftrightarrow (\partial + 4)_b(\partial + 4)_{b-1} (b = 220 + 243s, 1 \leq b \leq 3^{\partial+4}),$$

这样我们依次得到指数分别为 $\{4 \times 3^{\partial-1} - 2, 4 \times 3^{\partial-1} - 4, \dots, 2 \times 3^{\partial-1}\}$ 的标号图.

第 6 步 依次将

$$(\partial + 4)_b(\partial + 4)_{b+1} \leftrightarrow (\partial + 4)_{b+1}(\partial + 4)_{b+2} (b = 224 + 243s, 1 \leq b \leq 3^{\partial+4}),$$

这样我们依次得到指数分别为 $\{2 \times 3^{\partial-1} - 2, 2 \times 3^{\partial-1} - 4, \dots, 2, 0\}$ 的标号图.

由于在上述变换中每条边的变换均增加一个 1- 点, 而 0- 点个数不变, 故每次变换使指数减少 2, 每一步都是在上一步的基础上进行变换, 综上即可证明.

推论 4.1 带齿套圈子图 $T_t(t = \frac{m-i}{4})(i = 3, 4, 5, 6)$ 的边 - 平衡指数可以依次变换至 0.

证 在带齿套圈子图 $T_t(t = \frac{m-i}{4})(i = 3, 4, 5, 6)$ 中嵌套不改变点性质, 在带齿套圈子图中总可以找到一个变换后产生一个不定义点, 使指数减少 1, 再由引理 3.10 可将其平衡指数变换至 0.

引理 4.2 在无限路幂圈嵌套图 $C_{3^m} \times P_{m_3}(m \geq 3)$ 中, 当 $m \equiv 3(\text{mod}4)$ 时,

$$\{3^m - 1, 3^m - 2, \dots, 2, 1, 0\} \subset EBI(C_{3^m} \times P_{m_3}).$$

证 当 $m = 3$ 时, 将引理 3.2 中构造的最大边 - 平衡指数对应的标号图作为原始图.

先对偶数指数集进行构造:

第 1 步 将 $(1)_1(1)_2 \leftrightarrow (1)_1(2)_1$ 得到指数为 26 的标号图.

第 2 步 将 $(2)_1(2)_2 \leftrightarrow (2)_1(3)_3$, $(2)_8(2)_9 \leftrightarrow (2)_8(3)_{24}$ 和 $(2)_9(2)_1 \leftrightarrow (2)_9(2)_{27}$ 依次得到 3 个标号图, 边 - 平衡指数分别为 $\{24, 22, 20\}$.

第 3 步 依次将

$$(2)_a(3)_b \leftrightarrow (3)_b(3)_{b+1} (a = 3, 4, 5, 6, 7; b = 7 + r + 3s, r = 0, 1, 7 \leq b \leq 21)$$

得到 10 个偶数指数的标号图, 指数分别为 $\{18, 16, \dots, 2, 0\}$.

另外奇数指数集构造如下:

省去第一步, 重复偶数指数构造中 2,3 步即可得到指数为 $\{25, 23, \dots, 3, 1\}$ 的标号图.

即证公式成立.

当 $m > 3$ 时, 下面变换是将引理 3.3 中构造的最大边 - 平衡指数对应的标号图作为原始图.

第 1 步 依次将图中套圈子图 $T_t(t = \frac{m-3}{4})$ 中的边 $(\partial+1)_b(\partial+1)_{b+1} \leftrightarrow (\partial)_a(\partial+1)_b (1 \leq a \leq 3^\partial; b = 1 + 3r, 1 \leq b \leq 3^{\partial+1})$ 每次将一个 1 - 点变为不定义点, 0 - 点个数不变, 经计算共有 3^{m-4} 次变换, 故将得到指数分别为 $\{3^m - 1, 3^m - 2, \dots, 3^m - 3^{m-4}\}$ 的标号图.

第 2 步 根据推论 4.1, 依次将图中套圈子图 $T_t(t = \frac{m-3}{4})$ 中边进行变换, 可以得到指数分别为 $\{3^m - 3^{m-4} - 1, \dots, 1, 0\}$ 的标号图.

综上即可证明

$$\{3^m - 1, 3^m - 2, \dots, 2, 1, 0\} \subset EBI(C_{3^m} \times P_{m_3}).$$

引理 4.3 在无限路幂圈嵌套图 $C_{3^m} \times P_{m_3}(m \geq 3)$ 中, 当 $m \equiv 0(\text{mod}4)$ 时,

$$\{3^m - 1, 3^m - 2, \dots, 2, 1, 0\} \subset EBI(C_{3^m} \times P_{m_3}).$$

证 当 $m = 4$ 时, 将引理 3.4 中构造的最大边 - 平衡指数对应的标号图作为原始图. 首先对偶数指数集进行构造:

第 1 步 将 $(1)_1(2)_2 \leftrightarrow (1)_1(2)_1$ 得到指数为 80 的标号图.

第 2 步 将 $(3)_1(3)_2 \leftrightarrow (3)_1(4)_1$ 可得到指数为 78 的标号图.

第 3 步 依次将 $(3)_a(3)_{a+1} \leftrightarrow (3)_a(4)_b (a = 18 + r; b = 52 + 3r, r = 0, 1, \dots, 8)$ 得到 9 个偶数指数的标号图, 指数分别为 $\{76, 74, \dots, 62, 60\}$.

第 4 步 依次将 $(3)_a(4)_b \leftrightarrow (4)_b(4)_{b+1} (a = 3 + r; b = 7 + r + 3s, r = 0, 1, s = 0, 1, \dots, 14)$ 得到 30 个偶数指数的标号图, 指数分别为 $\{58, 56, \dots, 2, 0\}$.

奇数指数集构造如下:

省去第一步, 重复偶数指数构造中 2, 3, 4 步即可得到指数为 $\{79, 78, \dots, 3, 1\}$ 的标号图.

即证公式成立.

当证 $m > 4$ 时, 下面变换是将引理 3.5 中构造的最大边 - 平衡指数对应的标号图作为原始图.

第 1 步 依次将图中套圈子图 $T_t(t = \frac{m-4}{4})$ 中的边

$$(\partial + 1)_b(\partial + 1)_{b+1} \leftrightarrow (\partial)_a(\partial + 1)_b (1 \leq a \leq 3^\partial; b = 1 + 3r, 1 \leq b \leq 3^{\partial+1}),$$

每次将一个 1- 点变为不定义点, 0- 点个数不变, 经计算共有 3^{m-4} 次变换, 故将得到指数分别为 $\{3^m - 1, 3^m - 2, \dots, 3^m - 3^{m-4}\}$ 的标号图.

第 2 步 根据推论 3.1, 依次将图中套圈子图 $T_t(t = \frac{m-4}{4})$ 中边进行变换, 可以得到指数分别为 $\{3^m - 3^{m-4} - 1, \dots, 1, 0\}$ 的标号图.

综上所述即可证明

$$\{3^m - 1, 3^m - 2, \dots, 2, 1, 0\} \subset EBI(C_{3^m} \times P_{m_3}).$$

引理 4.4 在无限路幂圈嵌套图 $C_{3^m} \times P_{m_3} (m \geq 3)$ 中, 当 $m \equiv 1(\text{mod}4)$ 时,

$$\{3^m - 1, 3^m - 2, \dots, 2, 1, 0\} \subset EBI(C_{3^m} \times P_{m_3}).$$

证 当 $m = 5$ 时, 将引理 3.6 中构造的最大边 - 平衡指数对应的标号图作为原始图.

首先对偶数指数集进行构造:

第 1 步 将 $(1)_1(1)_2 \leftrightarrow (1)_1(2)_1$ 得到指数为 242 的标号图.

第 2 步 将 $(1)_3(2)_8 \leftrightarrow (1)_3(1)_1$ 得到指数为 240 的标号图.

第 3 步 由引理 3.10, 令 $\partial = 2$ 得到一个带齿套圈子图, 按照引理 3.10 依次变换可以得到指数分别为 $\{238, 236, \dots, 2, 0\}$ 的标号图.

奇数指数集构造如下:

省去第一步, 重复偶数指数构造中 2, 3, 4 步即可得到指数为 $\{241, 239, \dots, 3, 1\}$ 的标号图.

即证公式成立.

当 $m > 5$ 时, 下面变换是将引理 3.7 中构造的最大边 - 平衡指数对应的标号图作为原始图.

第 1 步 依次将图中套圈子图 $T_t(t = \frac{m-5}{4})$ 中的边

$$(\partial + 1)_b(\partial + 1)_{b+1} \leftrightarrow (\partial)_a(\partial + 1)_b (1 \leq a \leq 3^\partial; b = 1 + 3r, 1 \leq b \leq 3^{\partial+1}),$$

每次将一个 1- 点变为不定义点, 0- 点个数不变, 经计算共有 3^{m-4} 次变换, 故将得到指数分别为 $\{3^m - 1, 3^m - 2, \dots, 3^m - 3^{m-4}\}$ 的标号图.

第 2 步 根据推论 3.1, 依次将图中套圈子图 $T_t(t = \frac{m-5}{4})$ 中边进行变换, 可以得到指数分别为 $\{3^m - 3^{m-4} - 1, \dots, 1, 0\}$ 的标号图.

综上所述即可证明

$$\{3^m - 1, 3^m - 2, \dots, 2, 1, 0\} \subset EBI(C_{3^m} \times P_{m_3}).$$

引理 4.5 在无限路幂圈嵌套图 $C_{3^m} \times P_{m_3}(m \geq 3)$ 中, 当 $m \equiv 2(\text{mod}4)$ 时,

$$\{3^m - 1, 3^m - 2, \dots, 2, 1, 0\} \subset EBI(C_{3^m} \times P_{m_3}).$$

证 当 $m = 6$ 时, 将引理 3.8 中构造的最大边 - 平衡指数对应的标号图作为原始图.

首先对偶数指数集进行构造:

第 1 步 将 $(1)_1(1)_2 \leftrightarrow (1)_1(2)_1$ 得到指数为 728 的标号图.

第 2 步 $(1)_2(2)_5 \leftrightarrow (1)_2(1)_3$ 和 $(2)_3(2)_4 \leftrightarrow (2)_3(1)_1$, 依次得到 2 个标号图, 边 - 平衡指数分别为 $\{726, 724\}$.

第 3 步 依次将

$$(5)_a(5)_{a+1} \leftrightarrow (5)_a(6)_b(a = 1 + r + 213s; b = 1 + 3r + 639s, r = 0, 1, \dots, 7, s = 0, 1)$$

得到 16 个偶数指数的标号图, 指数分别为 $\{722, 720, \dots, 694, 692\}$.

第 4 步 依次将

$$(5)_a(5)_{a+1} \leftrightarrow (5)_a(6)_b(a = 64 + r + 81s; b = 190 + 3r + 243s, r = 0, 1, \dots, 10, s = 0, 1, \dots, 7),$$

这样就可分别得到 88 个指数为 $\{690, 688, \dots, 518, 516\}$ 的标号图.

第 5 步 依次将

$$(5)_a(6)_b \leftrightarrow (5)_a(6)_b(a = 10 + s + 213t; b = 28 + r + 2s + 639t, r = 0, 1, s = 0, 1, \dots, 11, t = 0, 1),$$

这样得到 48 个指数分别为 $\{514, 512, \dots, 422, 420\}$ 的标号图.

第 6 步 依次将

$$(5)_a(6)_b \leftrightarrow (5)_a(6)_b(a = 34 + s + 213t; b = 100 + r + 2s + 243t, r = 0, 1, s = 0, 1, \dots, 11, t = 0, 1),$$

这样得到 210 个指数分别为 $\{418, 416, \dots, 2, 0\}$ 的标号图.

奇数指数集构造如下:

省去第一步, 重复偶数指数构造中 2, 3, 4, 5, 6 步即可得到指数为 $\{727, 726, \dots, 3, 1\}$ 的标号图.

即证公式成立.

当证 $m > 6$ 时, 下面变换是将引理 3.9 中构造的最大边 - 平衡指数对应的标号图作为原始图.

第 1 步 依次将图中套圈子图 $T_t(t = \frac{m-6}{4})$ 中的边

$$(\partial + 1)_b(\partial + 1)_{b+1} \leftrightarrow (\partial)_a(\partial + 1)_b(1 \leq a \leq 3^\partial; b = 1 + 3r, 1 \leq b \leq 3^{\partial+1}),$$

每次将一个 1- 点变为不定义点, 0- 点个数不变, 经计算共有 3^{m-4} 次变换, 故将得到指数分别为 $\{3^m - 1, 3^m - 2, \dots, 3^m - 3^{m-4}\}$ 的标号图.

第 2 步 根据推论 3.1, 依次将图中套圈子图 $T_t(t = \frac{m-6}{4})$ 中边进行变换, 可以得到指数分别为 $\{3^m - 3^{m-4} - 1, \dots, 1, 0\}$ 的标号图.

综上所述即可证明

$$\{3^m - 1, 3^m - 2, \dots, 2, 1, 0\} \subset EBI(C_{3^m} \times P_{m_3}).$$

由引理 4.2, 引理 4.3, 引理 4.4, 引理 4.5 得

定理 4.1 在无限路幂圈嵌套图 $C_{3^m} \times P_{m_3}(m \geq 3)$ 中,

$$\{3^m - 1, 3^m - 2, \dots, 2, 1, 0\} \subset EBI(C_{3^m} \times P_{m_3}).$$

5 结论

由定理 3.1 和定理 4.1 得到如下定理:

定理 5.1 在无限路幂圈嵌套图 $C_{3^m} \times P_{m_3}(m \geq 3)$,

$$EBI(C_{2^m} \times P_{m_2}) = \{3^m, 3^m - 1, \dots, 2, 1, 0\}.$$

参 考 文 献

- [1] Yu Guangming, Zeng Qun, Yang Shan, Hu Limei, Li Xiaowei, Che Yi, Zheng Yuge. On the intensity and type transition of land use at the basin scale using RS/GIS: A case study of the Hanjiang River Basin[J]. *Envir. Monit. Assessment*, 2010, 160(1-4): 169–179.
- [2] Harris Kwong, Ng H K. On friendly index sets of 2-regular graphs[J]. *Discrete Math.*, 2008, 308: 5522–5532.
- [3] Ebrahim Salehi, Lee Sin-min. Friendly index sets of trees[J]. *Congressus Numerantium*, 2006, 178: 173–183.
- [4] Kim Suh-Ryung, Lee Sin-Min, Ng Ho Kuen. On balancedness of some graph constructions[J]. *J. Combinatorial Math. Comb. Comp.*, 2008, 66: 3–16.
- [5] Chen B L, Huang K C, Liu Shi-Shen. On edge-balanced multigraphs[J]. *J. Comb. Math. Comb. Comp.*, 2002, 42: 177–185.
- [6] Alexander Nien-Tsu Lee, Sin-Min Lee, Ho Kuen Ng. On The balance index set of graphs[J]. *J. Comb. Math. Comb. Comp.*, 2008, 66: 133–150.
- [7] Lee Sin-Min. On edge-balanced graphs[J]. *Graph Theory, Combinatorics Algorithms*, 1995, 1: 711–722.
- [8] Chopra D, Su H H, Lee Sin-Min. On edge-balance index sets of wheels[J]. *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, 2010, 53(5): 2605–2620.
- [9] Lee Sin-Min, Chou C C, Galiardi M, Kong M, Perry D, Su H H. On edge-balance index sets of L-product of cycles with stars[J]. Part 1, *JCMCC*, 2011, 78: 195–211
- [10] Lu Juan, Zheng Yuge. On the edge-balance index sets $B(n)$ [J]. *Proceedings of the Jangjeon Mathematics Society*, 2009, 1: 37–44.

- [11] Wang Ying, Zheng Yu-ge, Adiga C, Shrikanth A S. On edge-balance index sets of N cycles there nested graph[J]. Advanced Studied in Contemporary Mathematics (Kyungshang), 2011: 21(1): 85–93.
- [12] Tian Hongjuan, Zheng Yuge. On the quick construction of the edge-balance index sets of a classes of nested network graph[J]. Inter. J. Infor. Technology computer Sci., 2012, 4(7): 26–32.
- [13] 郑玉歌, 姚景景. 无限路等圈嵌套图边 - 平衡指数集的完全确定 (1)[J]. 上海交通大学学报 (自然科学版), 2013, 47(7): 1160–1163.

RESEARCH ON THE EDGE-BALANCE INDEX SETS OF A NESTED GRAPH WITH THE INFINITE PATHS AND POWER CIRCLES

CHENG Jun-xiang¹, CHEN Gang¹, TIAN Hong-juan^{1,2}, Zheng Yu-ge¹

(1. School of Mathematics and Information Science, Henan Polytechnic University,
Jiaozuo 454950, China)

(2. The Foundation Department, Henan Information and Statistics Vocational College,
Zhengzhou 450000, China)

Abstract: We research the problem of the edge-balance index sets of the nested graph with infinite paths and power circles $C_{3^m} \times P_{m_3} (m \geq 3)$. Then, using ring calculation methods to get the calculation formula of the maximum edge-balance index set of $C_{3^m} \times P_{m_3} (m \geq 3)$ and to give the structure proof of the graph's edge-balance index. It completely solves such edge-balance index set problem.

Keywords: edge-friendly labeling; edge-balance index; the nested graph with the infinite paths and power circles; the nested-cycle subgraph with clawed

2010 MR Subject Classification: 05C38; 05C78