Vol. 35 (2015)
No. 1

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

k - 广义 Hermite 矩阵

刘花璐 [a], 陈 希 [b]

(湖北理工学院 a. 数理学院; b. 经济与管理学院, 湖北 黄石 435003)

摘 要: 本文给出了 k - 广义 (反)Hermite 矩阵的概念, 研究了它的性质及其与 k - 广义酉矩阵之间的联系, 推广了酉矩阵和 (反)Hermite 矩阵的相应结果.

关 键 词: 次转置矩阵; k - 广义酉矩阵; k - 广义 (反)Hermite 矩阵

MR(2010) **主题分类号**: 15B57 **中 图 分 类 号**: O151.21

文献标识码: A **文 章 编 号**: 0255-7797(2015)01-0149-05

1 引言

近年来 (反) Hermite 矩阵的研究已取得了丰富的成果, 在优化理论、计算数学、信号分析等诸多领域中都有着举足轻重的地位, 随着应用的需要和研究的深入, (反) Hermite 矩阵已经有多种推广 [8−13]. 文献 [11] 对次 Hermite 矩阵作了研究; 文献 [12] 对拟 (次) Hermite 矩阵作了探讨; 文献 [8, 13] 给出了更为一般的广义 (反) Hermite 矩阵的概念, 并推广了以往的各种情形, 研究了它们的一些性质; 文献 [3, 4] 兼顾了矩阵的主对角线与次对角线方向的研究, 提出了 k - 广义酉矩阵的概念, 研究了它的性质及其与 (次、拟) 酉矩阵、(共轭) 辛矩阵、Householder 矩阵之间的联系. 本文进一步给出了 k - 广义 (反) Hermite 矩阵的概念, 研究了它的性质及其与 k - 广义酉矩阵之间的联系, 推广了酉矩阵和 (反) Hermite 矩阵的相应结果. 这无论是对于深入研究矩阵理论, 还是对于应用 (如辛几何、信号分析、量子理论、Hamilton 力学等 [5−9]), 无疑都是很有价值的.

本文中用 $J = J_n$ 表示次对角线元素全为 1, 其余元素全为 0 的 n 阶方阵; $I = I_n$ 表示 n 阶单位阵, 显然, $J^T = J$, $J^2 = I$, $J^{-1} = J$, $\mathrm{tr}A$, A^{ST} , A^* , $A^{(*)}$ 与 $|A|$ 分别表示矩阵 A 的迹, 次转置矩阵, 共轭转置矩阵, 共轭次转置矩阵与行列式; $C^{m\times n}$ 表示 $m \times n$ 复矩阵; C_n^n 表示 n 阶复可逆矩阵集; $\mathrm{Re}(a)$ 与 $\mathrm{Im}(a)$ 分别表示复数 a 的实部与虚部.

定义 1.1 [1] 设 $m \times n$ 矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \cdots & a_{m-1,n-1} & a_{m-1,n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{m,n-1} & a_{mn} \end{bmatrix},$$

*收稿日期: 2013-01-07 接收日期: 2013-05-08
基金项目: 湖北理工学院科研项目基金资助 (11yjz37B); 湖北省教育厅重点项目 (D20144401).
作者简介: 刘花璐 (1981–), 男, 湖北荆州, 讲师, 主要研究方向: 矩阵论, 代数编码.

则称如下的 $n \times m$ 矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{mn} & a_{m-1,n} & \cdots & a_{2n} & a_{1n} \\ a_{m,n-1} & a_{m-1,n-1} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{1,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m2} & a_{m-1,2} & \cdots & a_{22} & a_{12} \\ a_{m1} & a_{m-1,1} & \cdots & a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

为矩阵 A 的次转置, 记为 A^{ST}, 若记 $A^{ST}=(b_{ij})$, 则 $(b_{ij})=a_{m-j+1,n-i+1}\,(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m)$.

定义 1.2 [2] 如果一个 n 阶方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 满足 $A^{ST}=A$, 即 $a_{ij}=a_{n-j+1,n-i+1}$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$, 则称 A 为次对称的.

显然, 如果 E 是 n 阶单位矩阵, 则 $E^{ST}=E$.

定义 1.3 [3] 设 $A\in C^{n\times n}$, 若 $\exists P\in C_n^n$, $k>0$ 使 $A^*PA=kP$, 则称 A 为 n 阶 $k-P$ - 广义酉矩阵, 简称 k - 广义酉矩阵, 记为 $A\in U_P^k=\{A\in C^{n\times n}|A^*PA=kP\}$.

显然, 当 $k=1$, $P=I$ 时, $U_I=U_I^1=\{A\in C^{n\times n}|A^*A=I\}$ 为 n 阶酉矩阵集.

当 $k=1$, $P=J$ 时, $U_J=U_J^1=\{A\in C^{n\times n}|A^*JA=J,\text{即}A^{(*)}A=I\}$ 为 n 阶次酉矩阵集.

当 $k=1$, $P^{(*)}=P$ 时, $U_P=U_P^1=\{A\in C^{n\times n}|A^*PA=P\}$ 为 n 阶拟酉矩阵集.

当 $k=1$, JP 为实对称正定矩阵时, $U_{JP}=U_{JP}^1=\{A\in R^{n\times n}|A^*JPA=JP,\text{即}A^{(*)}PA=P\}$ 为 n 阶广义次正交矩阵集.

当 $k=1$, P 为正定 Hermite 矩阵时, $U_P=U_P^1=\{A\in C^{n\times n}|A^*PA=P\}$ 为 n 阶准酉矩阵集.

当 $k=1$, $P=\begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix}=K$ 时, $U_K=\{A\in C^{2m\times 2m}|A^*KA=K\}$ 为 $2m$ 阶共轭辛矩阵集.

当 $k=1$ 时, $U_P=U_P^1=\{A\in C^{n\times n}|A^*PA=P\}$ 为 n 阶广义酉矩阵集.

2 k - 广义 Hermite 矩阵

定义 2.1 设 $A\in C^{n\times n}$, 若 $\exists P\in C_n^n$, $k>0$ 使 $A^*P=kPA(A^*P=-kPA)$, 则称 A 为 n 阶 $k-P$ - 广义 Hermite 矩阵 ($k-P$ - 广义反 Hermite 矩阵), 简称 k - 广义 (反)Hermite 矩阵, 记为 $A\in H_P^k=\{A\in C^{n\times n}|A^*P=kPA\}(A\in\overline{H_P^k}=\{A\in C^{n\times n}|A^*P=-kPA\})$.

显然当 $k=1$, $P=I$ 时, $H_I=H_I^1=\{A\in C^{n\times n}|A^*=A\}$ 为 n 阶 Hermite 矩阵集; $\overline{H_I}=\overline{H_I^1}=\{A\in C^{n\times n}|A^*=-A\}$ 为 n 阶反 Hermite 矩阵集.

当 $k=1$, $P=J$ 时, $H_J=H_J^1=\{A\in C^{n\times n}|A^*J=JA,\text{即}A^{(*)}=A\}$ 为 n 阶次 Hermite 矩阵集; $\overline{H_J}=\overline{H_J^1}=\{A\in C^{n\times n}|A^*J=-JA,\text{即}A^{(*)}=-A\}$ 为 n 阶反次 Hermite 矩阵集.

当 $k=1$, $P^{(*)}=P$ 时, $H_P=H_P^1=\{A\in C^{n\times n}|A^*P=PA\}$ 为 n 阶拟 Hermite 矩阵集; $\overline{H_P}=\overline{H_P^1}=\{A\in C^{n\times n}|A^*P=-PA\}$ 为 n 阶拟反 Hermite 矩阵集.

当 $k=1$, $P=\begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix}=K$ 时, $H_K=H_K^1=\{A\in C^{2m\times 2m}|A^*K=KA\}$ 为 $2m$

阶 k -Hermite 矩阵集, $\overline{H_K} = \overline{H_K^1} = \{A \in C^{2m\times 2m} | A^*K = -KA\}$ 为 $2m$ 阶 Hamilton 矩阵集.

定理 2.2 设 $P \in C_n^n$, $A, B \in H_P^k$, l 为实数, 则

(1) $lA, A \pm B \in H_P^k$;

(2) $AB - BA \in \overline{H_P^{k^2}}, AB + BA \in H_P^{k^2}$;

(3) $AB \in H_P^{k^2}$ 当且仅当 $AB = BA$.

证 因 $A^*P = kPA, B^*P = kPB$, 所以

(1) $(lA)^*P = \bar{l}A^*P = lA^*P = lkPA = kP(lA)$, 故 $lA \in H_P^k$; 又

$$(A+B)^*P = A^*P + B^*P = kPA + kPB = kP(A+B),$$

故 $A + B \in H_P^k$, 同理可证 $A - B \in H_P^k$.

(2)

$$\begin{aligned} & (AB-BA)^*P = B^*A^*P - A^*B^*P \\ = \; & B^*kPA - A^*kPB = kB^*PA - kA^*PB = kkPBA - kkPAB = -k^2P(AB-BA). \end{aligned}$$

故 $AB - BA \in \overline{H_P^{k^2}}$; 同理可证 $AB + BA \in H_P^{k^2}$.

(3)

$$\begin{aligned} & AB \in H_P^{k^2} \Leftrightarrow k^2P(BA) = kkPBA = B^*kPA = B^*A^*P \\ = \; & (AB)^*P = k^2P(AB) \Leftrightarrow AB = BA. \end{aligned}$$

定理 2.3 设 $P \in C_n^n$, $A, B \in \overline{H_P^k}$, l 为实数, 则

(1) $lA, A \pm B \in \overline{H_P^k}$;

(2) $AB - BA \in \overline{H_P^{k^2}}, AB + BA \in H_P^{k^2}$;

(3) $AB \in \overline{H_P^{k^2}}$ 当且仅当 $AB = -BA$.

证 仿照定理 2.2 可证, (1)–(3) 成立.

定理 2.4 设 $P \in C_n^n, A \in C^{n\times n}$, α 为 A 的属于特征值 λ 的特征向量, 则

(1) 若 $A \in H_P^k$, 则 $\lambda = 0$ 或 λ 为非零实数且 $k = 1$ 或 $\alpha^*P\alpha = 0$;

(2) 若 $A \in \overline{H_P^k}$, 则 $\lambda = 0$ 或 λ 为纯虚数且 $k = 1$ 或 $\alpha^*P\alpha = 0$.

证 (1) 因 $A^*P = kPA, A\alpha = \lambda\alpha$, 后式两边取共轭转置得 $\overline{\lambda}\alpha^* = \alpha^*A^*$, 于是

$$\overline{\lambda}\alpha^*P\alpha = \alpha^*A^*P\alpha = \alpha^*kPA\alpha = \lambda k\alpha^*P\alpha,$$

即 $(\overline{\lambda} - \lambda k)\alpha^*P\alpha = 0$, 故 $(\overline{\lambda} - \lambda k) = 0$ 或 $\alpha^*P\alpha = 0$. 同理可证 (2).

在定理 2.4 中, 取 $k = 1, P = I, \alpha^*I\alpha = \alpha^*\alpha > 0$, 便得 (反)Hermite 矩阵的重要性质:

推论 2.5 (反)Hermite 矩阵的特征值均为 (零或纯虚数) 实数.

推论 2.6 若 $P \in C_n^n$, $A \in \overline{H_P^k}$, 则 $\forall c \in R, c \neq 0$, 有 $cI - A$ 均可逆. 特别地, $I \pm A$ 均可逆.

证 由定理 2.4(2) 可知, 非零实数 c 不是 A 的特征值, 故 $|cI - A| \neq 0$, 因而 $cI - A$ 可逆.

定理 2.7 设 $P \in C_n^n, A \in C^{n\times n}$, α 与 β 为 A 的属于特征值 λ 与 μ 的特征向量, 则

(1) 若 $A\in H_P^k$, $\overline{\lambda}\neq k\mu$, 则 $\alpha^*P\beta=0$;

(2) 若 $A\in \overline{H_P^k}$, $\overline{\lambda}\neq -k\mu$, 则 $\alpha^*P\beta=0$.

证 (1) 因 $A\alpha=\lambda\alpha$, 两边取共轭转置得 $\overline{\lambda}\alpha^*=\alpha^*A^*$, 又 $A^*P=kPA, A\beta=\mu\beta$, 故 $\overline{\lambda}\alpha^*P\beta=\alpha^*A^*P\beta=\alpha^*kPA\beta=k\alpha^*P\mu\beta=k\mu\alpha^*P\beta$. 即 $(\overline{\lambda}-k\mu)\alpha^*P\beta=0$, 而 $\overline{\lambda}\neq k\mu$, 故 $\alpha^*P\beta=0$. 同理可证 (2).

在定理 2.7 中, 取 $k=1, P=I$, 由 $\alpha^*I\beta=\alpha^*\beta$ 故有

推论 2.8 (1) Hermite 矩阵 A 的属于不同特征值的特征向量 α,β 满足 $\alpha^*\beta=0$.

(2) 反 Hermite 矩阵 A 的属于两个不同特征值 $\lambda,\mu(\lambda\neq-\mu)$ 的特征向量 α,β 满足 $\alpha^*\beta=0$.

定理 2.2 至定理 2.7 显然大大推广了 Hermite 矩阵与反 Hermite 矩阵的相关结果.

3 k - 广义酉矩阵与 k - 广义 (反)Hermite 矩阵的联系

定理 3.1 设 $P\in C_n^n, A\in C^{n\times n}$, 若下列三条件中的任二成立, 则第三个必成立

(1) $A\in U_P^k$; (2) $A\in H_P^m$; (3) $A^2=\frac{k}{m}I$.

证 若 (1)、(2) 成立, 则 $A^*PA=kP, A^*P=mPA$, 故

$$A^{-1}=k^{-1}P^{-1}A^*P=k^{-1}P^{-1}mPA=k^{-1}mA,$$

故 $A^2=\frac{k}{m}I$, 即 (3) 成立.

若 (1)、(3) 成立, 则 $A^*PA=kP, A^2=\frac{k}{m}I$. 于是 $A^*P=kPA^{-1}=kPk^{-1}mA=mPA$, 故 $A\in H_P^m$, 即 (2) 成立.

若 (2)、(3) 成立, 则 $A^*P=mPA, A^2=\frac{k}{m}I$. 于是 $A^*PA=mPA^2=mP\cdot\frac{k}{m}I=kP$, 故 $A\in U_P^k$, 即 (1) 成立.

与定理 3.1 平行, 有

定理 3.2 设 $P\in C_n^n, A\in C^{n\times n}$, 若下列三条件中的任二成立, 则第三个必成立:

(1) $A\in U_P^k$; (2) $A\in\overline{H_P^m}$; (3) $A^2=-\frac{k}{m}I$.

定理 3.3 设 $P\in C_n^n, A\in U_P^k$, 则

(1) $A^{-1}BA\in H_P^k\Leftrightarrow B\in H_P^k$, (2) $A^{-1}BA\in\overline{H_P^k}\Leftrightarrow B\in\overline{H_P^k}$.

证 因 $A^*PA=kP$, 所以

$$A^*=kPA^{-1}P^{-1}, (A^{-1}BA)^*=A^*B^*(A^*)^{-1}=kPA^{-1}P^{-1}B^*\frac{1}{k}PAP^{-1}.$$

(1)

$$\begin{aligned}&A^{-1}BA\in H_P^k\Leftrightarrow(A^{-1}BA)^*P=kPA^{-1}BA\Leftrightarrow(PA^{-1}P^{-1}B^*PAP^{-1})P=kPA^{-1}BA\\\Leftrightarrow\ &P^{-1}B^*P=kB\Leftrightarrow B^*P=kPB\Leftrightarrow B\in H_P^k.\end{aligned}$$

同理可证 (2).

定理 3.4 设 $P\in C_n^n, A\in H_P^k, B\in\overline{H_P^k}, AB=BA$, 则

(1) 若 $A+B$ 可逆, 则 $(A-B)(A+B)^{-1}\in U_P^1$;

(2) 若 $A-B$ 可逆, 则 $(A+B)(A-B)^{-1}\in U_P^1$.

证 (1) 因 $A^*P = kPA, B^*P = -kPB, AB = BA$, 故

$$A^* - B^*)P = kP(A + B), kP(A - B) = (A^* + B^*)P, (A - B)(A + B) = (A + B)(A - B),$$

$$\begin{aligned}
& [(A - B)(A + B)^{-1}]^*P[(A - B)(A + B)^{-1}] = (A^* + B^*)^{-1}(A^* - B^*)P(A - B)(A + B)^{-1} \\
= \quad & (A^* + B^*)^{-1}kP(A + B)(A - B)(A + B)^{-1} = (A^* + B^*)^{-1}kP(A - B)(A + B)(A + B)^{-1} \\
= \quad & (A^* + B^*)^{-1}(A^* + B^*)P = P,
\end{aligned}$$

故 $(A - B)(A + B)^{-1} \in U_P^1$. 同理可证 (2).

推论 3.5 设 $P \in C_n^n, B \in \overline{H_P^k}$, 则 $(I - B)(I + B)^{-1}, (I + B)(I - B)^{-1} \in U_P^1$.

证 由条件可知 $I + B, I - B$ 均可逆, 又 $I \in H_P^1$, 故由定理 3.4 知, 结论成立.

参 考 文 献

[1] 秦兆华. 矩阵的次转置及实次对称矩阵的次正定性 [J]. 渝州大学学报 (自然科学版), 1994, 11(1): 14–18.

[2] 秦兆华. 关于次对称矩阵与反次对称矩阵 [J]. 西南师范学院学报 (自然科学版), 1985, (1): 100–110.

[3] 袁晖坪. k - 广义酉矩阵 [J]. 东北师大学报 (自然科学版), 2007, 39(3): 22–26.

[4] 袁晖坪, 李庆玉, 郭伟. 关于 k - 广义酉矩阵 [J]. 数学杂志, 2007, 27(4): 471–475.

[5] Lin W W, Volker M. Canonical forms for Hamiltonian and symplectic matrices and pencils[J]. Linear Algebra Appl. , 1999, (302-303): 469–533.

[6] 陈景良, 陈向辉. 特殊矩阵 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2001: 673–676.

[7] 袁晖坪. 次酉矩阵与次镜像阵 [J]. 东北师大学报 (自然科学版), 2001, 33(1): 26–29.

[8] 袁晖坪. 广义酉矩阵与广义 Hermite 阵 [J]. 数学杂志, 2003, 23(3): 375–380.

[9] 袁晖坪. 拟酉矩阵与拟 Hermite 阵 [J]. 数学理论与应用, 2001, 21(2): 21–25.

[10] 李珍珠. 准酉阵与准 Hermite 阵 [J]. 重庆师范学院学报 (自然科学版), 1999, 16(1): 48–50.

[11] 袁晖坪. 关于次酉矩阵与次 Hermite 阵 [J]. 数学杂志, 2002, 22(3): 314–318.

[12] 郭伟. 拟次酉阵与拟次 Hermite 阵 [J]. 数学理论与应用, 2003, 23(2): 16–19.

[13] 王社宽. 广义 Hermite 阵及广义酉矩阵 [J]. 陕西科技大学学报, 2004, 22(1): 117–120.

THE k-GENERALIZED HERMITE MATRICES

LIU Hua-lu[a] , CHEN Xi[b]

(*a. School of Mathematics and Physics; b.School of Economy and Management,*

Hubei Polytechnic University, Huangshi 435003, China)

Abstract: In this paper, we propose the definition of k-generalized (skew) Hermite matrices, and then discusses its properties and relations between them and k-generalized unitary matrices. Moreover, the corresponding results among unitary matrices and (skew) Hermite matrices are generalized.

Keywords: sub-transpose matrices; k-generalized unitary matrices; k-generalized (skew) Hermite matrices

2010 MR Subject Classification: 15B57