

p - 仿紧空间

佟 鑫, 斯钦孟克

(内蒙古师范大学数学科学学院, 内蒙古 呼和浩特 010022)

摘 要: 本文研究了 p - 仿紧空间和 p - 可数仿紧空间的相关问题. 利用预开集和覆盖性质理论, 得到了 p - 仿紧空间和 p - 可数仿紧空间的定义、等价刻画及 αp - 仿紧子集的性质, 推广了一般拓扑学中仿紧空间的部分结果.

关键词: 预开集; p - 仿紧空间; p - 可数仿紧空间

MR(2010) 主题分类号: 54D20

中图分类号: O189.1

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2015)01-0141-08

1 引言与预备

仿紧性是紧性的一种重要推广. 自 1944 年, 文献 [1] 引进仿紧空间的概念, 仿紧空间得到了各种形式的推广. 2006 年, 文献 [2] 利用半开集给出 s - 仿紧空间的概念并研究了其性质, 文献 [3] 利用强半开集提出强 S - 仿紧空间的定义, 并给出其在 Hausdorff 空间下的等价刻画, 同时探讨了它的相对性质. 受这些启发, 本文利用预开集推广了仿紧空间和可数仿紧空间的概念, 得到了 p - 仿紧空间和 p - 可数仿紧空间的概念, 刻画了它们的特征, 定义了 αp - 仿紧子集并讨论了它在 p - 仿紧空间下与其它子集的等价性, 从而丰富了拓扑空间中的仿紧理论.

设 $(X, \mathcal{T})$ 为拓扑空间, 记 $A \subset X$ 的内部、闭包和补集分别为 A° 、 A^- 和 A' .

定义 1.1 [4] 设 $(X, \mathcal{T})$ 是拓扑空间, $A \subset X$. 称 A 为预开集, 若 $A \subset A^{-\circ}$; 称 A 为预闭集, 若 A' 是预开集. X 中全体预开集构成的族记为 $PO(X)$.

注 1.1 由定义可知, 开集是预开集, 反之不一定. 两个预开集的交不一定是预开集, 开集与预开集的交是预开集, 任意多个预开集的并仍是预开集 [5], 从而族 $PO(X)$ 不构成 X 上的拓扑.

显然, A 是预闭集当且仅当 $A^{-\circ} \subset A$.

定义 1.2 [6] 设 $(X, \mathcal{T})$ 是拓扑空间, $A \subset X$, 称 A 是 α - 集, 若 $A \subset A^{\circ-\circ}$. 记 $(X, \mathcal{T})$ 中所有 α - 集为 $\mathcal{T}^\alpha$, 构成 X 上的一个拓扑.

注 1.2 [7] $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}^\alpha \subset PO(X, \mathcal{T})$ 且 $PO(X, \mathcal{T}^\alpha) = PO(X, \mathcal{T})$.

定义 1.3 [4] 设 $(X, \mathcal{T})$ 是拓扑空间, $A \subset X$,

(1) $A_p^\circ = \bigcup \{ B \mid B \subset A, B \text{ 是预开集} \}$, 称为 A 的预内部;

(2) $A_p^- = \bigcap \{ B \mid A \subset B, B \text{ 是预闭集} \}$, 称为 A 的预闭包.

*收稿日期: 2013-06-01

接收日期: 2013-12-03

基金项目: 内蒙古自然科学基金资助 (2010MSO118); 内蒙古自治区研究生教育创新计划项目基金资助 (S201310135010).

作者简介: 佟鑫 (1988-), 女, 满族, 辽宁凤城, 硕士, 主要研究方向: 拓扑与模糊拓扑.

通讯简介: 斯钦孟克

易证 $A^\circ \subset A_p^\circ \subset A \subset A_p^- \subset A^-$, $A_p^\circ = ((A')_p^-)'$, $A_p^- = ((A')_p^\circ)'$.

定义 1.4 设 $\mathcal{F} = \{F_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ 是拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$ 的一个子集族,

(1) ^[8] 称 $\mathcal{F}$ 为局部有限集族, 若对任意 $x \in X$, 存在开集 U , 使得 $x \in U$ 且 U 仅与 $\mathcal{F}$ 中有限个元素有非空交;

(2) 称 $\mathcal{F}$ 为 p -局部有限集族, 若对任意 $x \in X$, 存在预开集 U , 使得 $x \in U$ 且 U 仅与 $\mathcal{F}$ 中有限个元素有非空交.

注 1.3 由注 1.1 知, 局部有限集族 $\Rightarrow p$ -局部有限集族.

定义 1.5 ^[8] 称拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$ 的子集族 $\mathcal{U}$ 为 σ -局部有限集族, 若 $\mathcal{U}$ 是可数个局部有限集族的并, 即 $\mathcal{U} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{U}_i$, 其中每一个 $\mathcal{U}_i$ 是局部有限的.

定义 1.6 ^[8] X 的覆盖 $\mathcal{V} = \{V_\beta | \beta \in B\}$ 称为是 X 的覆盖 $\mathcal{U} = \{U_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ 的加细覆盖, 如果 $\mathcal{V}$ 中的每一个元素总包含于 $\mathcal{U}$ 中的某一元素 U_α 内.

定义 1.7 ^[9] 称集族 $\mathcal{F} = \{F_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ 是 p -闭包保持的, 若对任意的 $\Lambda_1 \subset \Lambda$, 有 $(\bigcup_{\alpha \in \Lambda_1} F_\alpha)_p^- = \bigcup_{\alpha \in \Lambda_1} (F_\alpha)_p^-$.

定义 1.8 ^[10] 拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$ 称为 p -正则空间, 若对任意 $x \in X$ 及 X 的闭集 F , $x \notin F$, 存在 $U, V \in PO(X)$, 使得 $x \in U$, $F \subset V$ 且 $U \cap V = \emptyset$.

引理 1.1 ^[8] 设 $\mathcal{F} = \{F_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ 是拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$ 的一个子集族, 则

(1) $\mathcal{F} = \{F_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ 是局部有限的当且仅当 $\{F_\alpha^- | \alpha \in \Lambda\}$ 是局部有限的;

(2) 若 $\mathcal{F}$ 是局部有限的, 那么 $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} F_\alpha^- = (\bigcup_{\alpha \in \Lambda} F_\alpha)^-$.

引理 1.2 ^[9] 设 $\mathcal{F} = \{F_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ 是拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$ 的一个子集族, 则 $\mathcal{F} = \{F_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ 是 p -局部有限的当且仅当 $\{(F_\alpha)_p^- | \alpha \in \Lambda\}$ 是 p -局部有限的.

引理 1.3 ^[11] 设 $\mathcal{F} = \{F_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$, $\mathcal{B} = \{B_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ 是拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$ 的子集族, 且对任意的 $\alpha \in \Lambda$, 有 $B_\alpha \subset F_\alpha$, 若 $\mathcal{F}$ 是局部有限集族, 则 $\mathcal{B}$ 也是局部有限集族.

注 1.4 将引理中的局部有限集族改成 p -局部有限集族仍成立.

定理 1.1 ^[8] 设 $(X, \mathcal{T})$ 是正则空间, 则下列论断等价:

- (1) X 是仿紧空间;
- (2) X 的每一开覆盖具有 σ -局部有限开加细覆盖;
- (3) X 的每一开覆盖具有局部有限加细覆盖;
- (4) X 的每一开覆盖具有局部有限闭加细覆盖.

定理 1.2 ^[9] 拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$ 是 p -(可数)可膨胀空间当且仅当对 X 中每一 p -局部有限的(可数)预闭集族 $\mathcal{F} = \{F_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$, 都存在 X 中的局部有限开集族 $\mathcal{G} = \{G_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$, 使得对任意 $\alpha \in \Lambda$, 有 $F_\alpha \subset G_\alpha$.

定理 1.3 ^[9] 设拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$ 中的任意集族是 p -闭包保持的, 则 X 是 p -可数可膨胀空间当且仅当 X 的每一可数预开覆盖都存在局部有限的可数预开加细覆盖.

定理 1.4 ^[5] 设 $(X, \mathcal{T})$ 为拓扑空间, $Y \subset X$, 则

- (1) 若 A 为 X 中的预开集, 则 $A \cap Y$ 为子空间 Y 中的预开集;
- (2) 若 Y 为 X 的开子空间, $A \subset Y$, 则: A 为 X 中的预开集当且仅当 A 为 Y 中的预开集.

2 p -(可数)仿紧空间的定义及刻画

定义 2.1 称拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$ 为 p -(可数) 仿紧空间, 若对 X 的每一个(可数) 开覆盖都存在局部有限的预开加细覆盖. 称 $A \subset X$ 为 p -(可数) 仿紧的, 若 A 作为 X 的子空间是 p -(可数) 仿紧空间.

注 2.1 由定义可知, p -仿紧空间是 p -可数仿紧空间, 反之不一定成立. 由注 1.1 知, 仿紧空间是 p -仿紧空间, 可数仿紧空间是 p -可数仿紧空间, 反之不一定成立.

由定义 2.1, 显然可得

推论 2.1 若 X 是 p -仿紧空间, 则 X 的每一个开覆盖都有 σ -局部有限的预开加细覆盖.

定理 2.1 设 p -可数可膨胀空间 $(X, \mathcal{T})$ 中的任意集族是 p -闭包保持的, 若对 X 的任意开覆盖都存在 σ -局部有限的预开加细覆盖, 则 X 是 p -仿紧空间.

证 $\mathcal{U} = \{U_s | s \in S\}$ 是 X 的开覆盖, $\mathcal{V} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{V}_i$ 是 $\mathcal{U}$ 的 σ -局部有限的预开加细覆盖, 其中每一个 $\mathcal{V}_i = \{V_{s,i} | s \in S_i\}$ 是局部有限的预开集族. 令 $W_i = \bigcup_{s \in S_i} V_{s,i}, i = 1, 2, \dots$, 则 $\mathcal{W} = \{W_i | i = 1, 2, \dots\}$ 是 X 的可数预开覆盖. 由定理 1.3 知, 存在局部有限的可数预开覆盖 $\mathcal{H} = \{H_j | j = 1, 2, \dots\}$ 加细 $\mathcal{W}$. 因为 H_j 是预开集, 所以 $H_j \subset H_j^{-\circ} \subset H_j^-$. 由引理 1.1(1) 和引理 1.3 知, $\{H_j^{-\circ} | j = 1, 2, \dots\}$ 是局部有限的开集族, 于是

$$\mathcal{G} = \{H_j^{-\circ} \cap V_{s,i} | s \in S_i, i = 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots\}$$

是 X 的局部有限的预开覆盖, 且对任意 $V_{s,i}$, 存在 U_s , 使得 $H_j^{-\circ} \cap V_{s,i} \subset V_{s,i} \subset U_s$, 即 $\mathcal{G}$ 是 $\mathcal{U}$ 的局部有限的预开加细覆盖, 所以 X 是 p -仿紧空间.

定理 2.2 若 X 是 p -仿紧空间, 则 X 的每一个开覆盖都有 p -局部有限加细覆盖.

证 设 $\mathcal{U}$ 是 p -仿紧空间 X 的开覆盖. 由推论 2.1 知, 存在 $\mathcal{U}$ 的 σ -局部有限的预开加细覆盖 $\mathcal{V}$. 设 $\mathcal{V} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{V}_i$, 其中每一个 $\mathcal{V}_i$ 是局部有限的预开集族. 任意 i , 令 $H_i = \bigcup \mathcal{V}_i$, 则 H_i 为预开集. 令 $\mathcal{F}_i = \{V - \bigcup_{k < i} H_k, V \in \mathcal{V}_i\}$, $\mathcal{F} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$.

下面证明 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{U}$ 的一个 p -局部有限加细覆盖. 设 $x \in X$, 令

$$i(x) = \min\{i \in N | x \in \bigcup \mathcal{V}_i\}.$$

设 $V_x \in \mathcal{V}_{i(x)}$, 使得 $x \in V_x$, 则 $x \in \bigcup \mathcal{F}_{i(x)}$, 于是 $\bigcup \mathcal{F} = X$, 所以 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{U}$ 的加细覆盖.

任意 $i > i(x)$, 任意 $V \in \mathcal{V}_i$,

$$V_x \cap (V - \bigcup_{k < i} H_k) \subset (\bigcup \mathcal{V}_{i(x)}) \cap (X - \bigcup \mathcal{V}_{i(x)}) = \emptyset.$$

任意 $i \leq i(x)$, 存在 x 的开邻域 O_i 与 $\mathcal{V}_i$ 中有限个元素有非空交, 从而至多与 $\mathcal{F}_i$ 中有限个元素有非空交, 于是 $V_x \cap \bigcap_{i=1}^{i(x)} O_i$ 是包含 x 的预开集且至多与 $\mathcal{F}$ 中有限个元素有非空交, 所以 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{U}$ 的 p -局部有限加细覆盖.

定理 2.3 设 $(X, \mathcal{T})$ 是 p -仿紧的 Hausdorff 空间, 则对任意闭集 F 和 $x \notin F$, 存在开集 U 和预开集 V , 使得 $x \in U, F \subset V$, 且 $U \cap V = \emptyset$ (等价于对任意开集 U 及 $x \in U$, 存在开集 V , 使得 $x \in V \subset V_p^- \subset U$).

证 设 $y \in F$, 因为 X 是 Hausdorff 空间, 所以存在开集 U_y , 使得 $y \in U_y$ 且 $x \notin U_y^-$, 从而 $\mathcal{U} = \{U_y | y \in F\} \cup \{F'\}$ 是 X 的开覆盖, 于是存在局部有限的预开覆盖 $\mathcal{B}$ 加细 $\mathcal{U}$. 令 $V = \bigcup \{B \in \mathcal{B} | B \cap F \neq \emptyset\}$, 则 V 是包含 F 的预开集. 令 $U = X - V^-$, 则 U 是包含 x 的开

集 (事实上, 若 $x \notin U$, 则 $x \in V^-$, 由引理 1.1(2) 知, $V^- = \bigcup \{B^- \in \mathcal{B} | B \cap F \neq \emptyset\}$, 于是存在 $U_y \in \mathcal{U}$ 使得 $x \in B^- \subset U_y^-$, 矛盾) 且 $U \cap V = \emptyset$.

推论 2.2 设 $(X, \mathcal{T})$ 是 p -仿紧的 Hausdorff 空间, 则 X 是 p -正则空间.

定理 2.4 设 $(X, \mathcal{T})$ 是正则空间, X 是 p -仿紧的当且仅当 X 是仿紧的.

证 充分性. 显然成立.

必要性. 设 $\mathcal{U}$ 是 p -仿紧的正则空间 X 的开覆盖, 则存在局部有限的预开覆盖加细 $\mathcal{U}$, 即存在 $\mathcal{U}$ 的局部有限加细覆盖, 由定理 1.1 知, X 是仿紧的.

定理 2.5 设 Hausdorff 空间 $(X, \mathcal{T})$ 中的任意集族是 p -闭包保持的, 则 X 是 p -仿紧空间当且仅当对 X 的任意开覆盖都存在局部有限的预闭加细覆盖.

证 必要性. 设 $\mathcal{U}$ 是 p -仿紧空间 X 的开覆盖, 则对任意 $x \in X$, 存在 $U_x \in \mathcal{U}$, 使得 $x \in U_x$. 由定理 2.3 知, 存在开集 V_x , 使得 $x \in V_x \subset (V_x)_p^- \subset U_x$, 则 $\mathcal{V} = \{V_x | x \in X\}$ 是 X 的开覆盖, 于是存在局部有限的预开覆盖 $\mathcal{W} = \{W_\beta | \beta \in B\}$ 加细 $\mathcal{V}$, 由引理 1.1(1) 和引理 1.3 知, $\{(W_\beta)_p^- | \beta \in B\}$ 是 X 的局部有限的预闭覆盖, 且对任意 $\beta \in B$, 存在 $U_x \in \mathcal{U}$, 使得 $(W_\beta)_p^- \subset (V_x)_p^- \subset U_x$, 所以 $\{(W_\beta)_p^- | \beta \in B\}$ 是 $\mathcal{U}$ 的局部有限的预闭加细覆盖.

充分性. 设 $\mathcal{U}$ 是 X 的开覆盖, $\mathcal{A} = \{A_s | s \in S\}$ 是 $\mathcal{U}$ 的局部有限的预闭加细覆盖. 对任意 $x \in X$, 存在开集 V_x , 使得 $x \in V_x$ 且 V_x 仅与 $\mathcal{A}$ 中有限个元素有非空交, 则 $\mathcal{V} = \{V_x | x \in X\}$ 是 X 的开覆盖, 于是存在局部有限的预闭覆盖 $\mathcal{F}$ 加细 $\mathcal{V}$.

对每一 $s \in S$, 令 $W_s = X - \bigcup \{F \in \mathcal{F}, F \cap A_s = \emptyset\}$, 则 W_s 是包含 A_s 的预开集 (因为 $(X, \mathcal{T})$ 中的任意集族是 p -闭包保持的, 由定义 1.6 知, W_s 是预开集). 另外对每一 $s \in S$, 每一 $F \in \mathcal{F}$,

$$W_s \cap F \neq \emptyset \text{ 当且仅当 } A_s \cap F \neq \emptyset. \quad (1)$$

对每一 $s \in S$, 取 $U_s \in \mathcal{U}$, 使 $A_s \subset U_s$, 令 $H_s = U_s \cap W_s$. 由 $A_s \subset H_s$ 知, $\{H_s | s \in S\}$ 覆盖 X 从而是 $\mathcal{U}$ 的预开加细覆盖. 对任意 $x \in X$, 存在 x 的开邻域 G , G 仅与 $\mathcal{F}$ 中有限个元素有非空交, 设为 $\{F_1, F_2, \dots, F_n\}$, 则 $G \subset \bigcup_{i=1}^n F_i$. 对任意 $i \leq n$, $F_i \in \mathcal{F}$, 存在 $V_x \in \mathcal{V}$, 使得 $F_i \subset V_x$, 而 V_x 仅与 $\mathcal{A}$ 中有限个元素有非空交, 于是 F_i 仅与 $\mathcal{A}$ 中有限个元素有非空交. 由 (1) 式知, F_i 仅与有限个 W_s 有非空交, 从而 G 仅与有限个 H_s 有非空交, 于是 $\{H_s | s \in S\}$ 是 $\mathcal{U}$ 的局部有限的预开加细覆盖, 所以 X 是 p -仿紧空间.

定理 2.6 设 $(X, \mathcal{T})$ 是拓扑空间, 下列论断等价:

- (1) X 是 p -可数仿紧空间;
- (2) X 的每一个可数开覆盖 $\{U_i | i \in \mathbb{N}\}$ 存在局部有限的可数预开覆盖 $\{V_i | i \in \mathbb{N}\}$, 且对任意 $i \in \mathbb{N}$, 有 $V_i \subset U_i$;
- (3) X 的每一个递增的开覆盖 $\{U_i | i \in \mathbb{N}\}$ 存在开覆盖 $\{W_i | i \in \mathbb{N}\}$, 且对任意 $i \in \mathbb{N}$, 有 $(W_i)_p^- \subset U_i$.

证 (1) $\Rightarrow$ (2) 设 $\mathcal{U} = \{U_i | i \in \mathbb{N}\}$ 是 X 的可数开覆盖. 由 (1) 知, 存在 X 的局部有限的预开覆盖 $\mathcal{V}$ 加细 $\mathcal{U}$. 对任意的 $V \in \mathcal{V}$, 存在 $i(V) \in \mathbb{N}$, 使得 $V \subset U_{i(V)}$. 令 $V_i = \bigcup \{V | V \in \mathcal{V}, i(V) = i\}$, 则 $\{V_i | i \in \mathbb{N}\}$ 是局部有限的预开集族. 事实上, 若 $\{V_i | i \in \mathbb{N}\}$ 不是局部有限集族, 则存在 $x \in X$, 任意开集 G , G 与无限个 V_i 有非空交, 即 G 与 $\mathcal{V}$ 中无限个元素有非空交, 这与 $\mathcal{V}$ 是局部有限集族相矛盾. 显然 $\{V_i | i \in \mathbb{N}\}$ 是 X 的局部有限的可数预开覆盖且对任意 $i \in \mathbb{N}$, 有 $V_i \subset U_i$.

(2) $\Rightarrow$ (3) 设 $\mathcal{U} = \{U_i | i \in \mathbb{N}\}$ 是 X 的递增的开覆盖. 由 (2) 知, 存在局部有限的可数预

开覆盖 $\{V_i | i \in N\}$, 且对任意 $i \in N$, 有 $V_i \subset U_i$. 令 $W_i = X \setminus (\bigcup\{V_j | j > i\})^-$, 则 W_i 是开集. 下证 $\{W_i | i \in N\}$ 是 X 的覆盖. 对任意 $x \in X$, 令 $i(x) = \max\{i \in N | x \in V_i^-\}$, 则 $x \notin \bigcup\{V_j^- | j > i(x)\}$. 由引理 1.1(2) 知,

$$\bigcup\{V_j^- | j > i(x)\} = (\bigcup\{V_j | j > i(x)\})^-, x \notin (\bigcup\{V_j | j > i(x)\})^-,$$

即 $x \in W_{i(x)}$, 所以 $\{W_i | i \in N\}$ 是 X 的开覆盖. 对任意 $i \in N$, 有

$$(W_i)_p^- \subset W_i^- \subset X \setminus (\bigcup\{V_j | j > i\})^{-\circ} \subset X \setminus \bigcup\{V_j | j > i\},$$

又

$$X \setminus \bigcup\{V_j | j > i\} \subset \{V_j | j \leq i\} \subset \{U_j | j \leq i\} = U_i,$$

所以 $(W_i)_p^- \subset U_i$.

(3) $\Rightarrow$ (1) 设 $\mathcal{U} = \{U_i | i \in N\}$ 是 X 的可数开覆盖. 对任意 $i \in N$, 令 $V_i = \bigcup_{j \leq i} U_j$, 则 $\{V_i | i \in N\}$ 是 X 的递增的开覆盖. 由 (3) 知, 存在开覆盖 $\{W_i | i \in N\}$, 且对任意 $i \in N$, 有 $(W_i)_p^- \subset V_i$. 令 $G_1 = U_1$, $G_i = U_i \setminus \bigcup_{j < i} (W_j)_p^-$, $i > 1$. 预开集 $G_i \subset U_i$, $i \in N$. 由

$$\bigcup_{j < i} (W_j)_p^- \subset \bigcup_{j < i} V_j \subset \bigcup_{j < i} U_j,$$

从而

$$G_i = U_i \setminus \bigcup_{j < i} (W_j)_p^- \supset U_i \setminus \bigcup_{j < i} U_j,$$

所以 $\mathcal{G} = \{G_i | i \in N\}$ 是 $\mathcal{U}$ 的预开加细覆盖. 由 $\{W_i | i \in N\}$ 是 X 的开覆盖, 则对任意 $x \in X$, 存在 $j \in N$, 使得 $x \in W_j$. 当 $i > j$ 时, x 的开邻域 W_j 与所有 G_i 不相交, 于是 $\mathcal{G}$ 是局部有限集族. 故 $\mathcal{G}$ 是 $\mathcal{U}$ 的局部有限的预开加细覆盖, 所以 X 是 p -可数仿紧空间.

定理 2.7 若 $(X, \mathcal{T}^\alpha)$ 是 p -仿紧空间, 则 $(X, \mathcal{T})$ 是 p -仿紧空间.

证 设 $\mathcal{U}$ 是 $(X, \mathcal{T})$ 中的开覆盖, 因为 $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}^\alpha$, 所以 $\mathcal{U}$ 是 $(X, \mathcal{T}^\alpha)$ 中的开覆盖, 则存在 $(X, \mathcal{T}^\alpha)$ 中局部有限的预开集族 $\mathcal{V}$ 加细 $\mathcal{U}$. 由 $PO(X, \mathcal{T}^\alpha) = PO(X, \mathcal{T})$, 只需证明 $\mathcal{V}$ 在 $(X, \mathcal{T})$ 中是局部有限的. 任意 $x \in X$, 存在开集 $G \in \mathcal{T}^\alpha$, 使得 $x \in G$ 且 G 仅与 $\mathcal{V}$ 中有限个元素相交, 记为 $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$, 从而 $x \in G \subset G^{\circ-\circ} \in \mathcal{T}$ 且对任意 $V \in \mathcal{V} - \{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ 有 $G \cap V = \emptyset$, 则 $G^\circ \cap V = \emptyset$, 于是有 $G^\circ \cap V^- = \emptyset$, $G^\circ \cap V^{-\circ} = \emptyset$, 进而 $G^{\circ-} \cap V^{-\circ} = \emptyset$, 又因为 $V \in PO(X, \mathcal{T})$, $V \subset V^{-\circ}$, 所以 $G^{\circ-\circ} \cap V = \emptyset$, 即 $G^{\circ-\circ}$ 仅与 $\mathcal{V}$ 中至多有限个元素相交, 即 $\mathcal{V}$ 在 $(X, \mathcal{T})$ 中是局部有限的, 所以 $(X, \mathcal{T})$ 是 p -仿紧空间.

上述定理的逆命题不成立, 即存在 $(X, \mathcal{T})$ 是 p -仿紧空间, 但是 $(X, \mathcal{T}^\alpha)$ 不是 p -仿紧空间.

例 2.1 设 $X = R$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{1\}\}$. 显然, $(X, \mathcal{T})$ 是 p -仿紧空间. 易证非空集 $A \in \mathcal{T}^\alpha (A \in PO(X, \mathcal{T}))$ 当且仅当 $1 \in A$. 令 $\mathcal{T}^\alpha = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X | 1 \in U\}$, 则 $(X, \mathcal{T}^\alpha)$ 不是 p -仿紧空间. 因为集族 $\mathcal{U} = \{\{1, x\} | x \in X\}$ 是 $(X, \mathcal{T}^\alpha)$ 中的开覆盖, 但不存在 $(X, \mathcal{T}^\alpha)$ 中局部有限的预开覆盖 $\mathcal{V}$ 加细 $\mathcal{U}$. 分下列两种情况讨论:

(1) 若 $\mathcal{V} = \{\{1\}_\beta\}_{\beta \in B}$, 显然 $\mathcal{V}$ 不构成 X 的覆盖.

(2) 若 $\mathcal{V} = \{V_\beta | \beta \in B\}$ 是 $\mathcal{U} = \{\{1, x\} | x \in X\}$ 的预开加细覆盖, 则存在 $\beta \in B$, 有 $1 \in V_\beta$ 且存在 $x_\beta \in X$ 使得 $V_\beta \subset \{1, x_\beta\}$, 即 $V_\beta = \{1, x_\beta\}$. 令

$$B_0 = \{\beta \in B | V_\beta = \{1, x_\beta\}\}, \mathcal{V}_0 = \{\{1, x_\beta\} | \beta \in B_0\}, \mathcal{V}_1 = \{\{1\}_\beta | \beta \in B - B_0\},$$

则 $\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 \cup \mathcal{V}_1$. 假设 B_0 为有限集且 $\mathcal{V}_0 = \{\{1, x_{\beta_1}\}, \{1, x_{\beta_2}\}, \dots, \{1, x_{\beta_n}\}\}$, 显然

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 \cup \mathcal{V}_1 = \{\{1, x_{\beta_1}\}, \{1, x_{\beta_2}\}, \dots, \{1, x_{\beta_n}\}\} \cup \{\{1\}_\beta | \beta \in B - B_0\}$$

不构成 X 的覆盖, 所以 $\mathcal{V}_0$ 为无限集. 取 $x_0 = 1$, 则 $(X, \mathcal{T}^\alpha)$ 中任意包含 1 的开集 U 都与 $\mathcal{V}$ 中无限个元素相交, 所以 $\mathcal{V}$ 不是 $(X, \mathcal{T}^\alpha)$ 中的局部有限集族.

因此不存在 $(X, \mathcal{T}^\alpha)$ 中局部有限的预开覆盖 $\mathcal{V}$ 加细 $\mathcal{U}$, 故 $(X, \mathcal{T}^\alpha)$ 不是 p -仿紧空间.

定理 2.8 若 X 是 p -可数仿紧空间且 X 的任意开覆盖都存在 σ -局部有限的开加细覆盖, 则 X 是 p -仿紧空间.

证 设 $\mathcal{U}$ 是 p -可数仿紧空间 X 的开覆盖, $\mathcal{V} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{V}_i$ 是 $\mathcal{U}$ 的 σ -局部有限的开加细覆盖, 其中每一个 $\mathcal{V}_i = \{V_{s,i} | s \in S_i\}$ 是局部有限的开集族. 任意 i , 令 $W_i = \bigcup_{s \in S_i} V_{s,i}$, 则 $\{W_i | i \in N\}$ 是 X 的可数开覆盖. 由定理 2.6(2) 知, 存在局部有限的可数预开覆盖 $\{H_i | i \in N\}$, 且对任意 $i \in N$, 有 $H_i \subset W_i$, 于是 $\mathcal{G} = \{H_i \cap V_{s,i} | s \in S_i, i \in N\}$ 是 $\mathcal{U}$ 的局部有限的预开加细, 所以 X 是 p -仿紧空间.

定理 2.9 若 X 是 p -可数可膨胀空间, 则 X 是 p -可数仿紧空间.

证 设 $\mathcal{U} = \{U_i | i \in N\}$ 是 p -可数可膨胀空间 X 的可数开覆盖. 令 $V_1 = U_1$, $V_i = U_i \setminus \bigcup_{j < i} U_j$, $i > 1$. 任意 $x \in X$, 存在 $i \in N$, 使得 $x \in U_i$. 对任意 $k > i$, 有

$$U_i \cap V_k = U_i \cap (U_k \setminus \bigcup_{j < k} U_j) \subset U_i \cap (X \setminus U_i) = \emptyset,$$

所以 $\{V_i | i \in N\}$ 是局部有限的可数集族, 显然是 p -局部有限的可数集族. 由引理 1.2 知, $\{(V_i)_p^- | i \in N\}$ 是 p -局部有限的可数预闭集族. 因为 X 是 p -可数可膨胀空间, 由定理 1.2 知, 存在 X 中的局部有限的开集族 $\mathcal{W} = \{W_i | i \in N\}$, 使得对任意 $i \in N$, 有 $(V_i)_p^- \subset W_i$, 于是 $\mathcal{G} = \{U_i \cap W_i | i \in N\}$ 是 $\mathcal{U}$ 的局部有限开加细覆盖, 显然是 $\mathcal{U}$ 的局部有限的预开加细覆盖, 所以 X 是 p -可数仿紧空间.

推论 2.3 若 X 是 p -可膨胀空间, 则 X 是 p -可数仿紧空间.

3 αp -仿紧子集

定义 3.1 设 $(X, \mathcal{T})$ 是拓扑空间, $A \subset X$, 称 A 为 αp -仿紧子集, 若 $(X, \mathcal{T})$ 中 A 的任意开覆盖 $\mathcal{U}$, 存在 $(X, \mathcal{T})$ 中局部有限的预开覆盖 $\mathcal{V}$ 加细 $\mathcal{U}$.

定义 3.2 设 $(X, \mathcal{T})$ 是拓扑空间, $A \subset X$, 称 A 为 g 闭集, 若当 $A \subset U$ 且 U 是开集时, 有 $A^- \subset U$.

注 3.1 由定义知, 闭集是 g 闭集.

定理 3.1 p -仿紧空间 $(X, \mathcal{T})$ 中的每个 g 闭集 A 是 αp -仿紧子集.

证 设 $\mathcal{U} = \{U_s | s \in S\}$ 是 A 在 $(X, \mathcal{T})$ 中的任意开覆盖, 即 $A \subset \bigcup \{U_s | s \in S\}$. 因为 A 是 g 闭集, 所以 $A^- \subset \bigcup \{U_s | s \in S\}$. 对任意 $x \notin A^-$, 存在开集 W_x , 使得 $x \in W_x$ 且

$W_x \cap A = \emptyset$. 令 $\mathcal{W} = \{U_s | s \in S\} \cup \{W_x | x \notin A^-\}$, 则 $\mathcal{W}$ 是 X 的开覆盖, 由 X 是 p -仿紧空间, 则存在 $\mathcal{W}$ 的局部有限的预开加细覆盖 $\mathcal{H} = \{H_\beta | \beta \in B\}$, 从而对任意 $\beta \in B$, 或者存在 $s(\beta) \in S$ 使得 $H_\beta \subset U_{s(\beta)}$, 或者存在 $x(\beta) \notin A^-$ 使得 $H_\beta \subset W_{x(\beta)}$.

令 $B_0 = \{\beta \in B | H_\beta \subset U_{s(\beta)}\}$, 则 $\mathcal{V} = \{H_\beta | \beta \in B_0\}$ 是 $\mathcal{U}$ 的局部有限的预开加细覆盖且 $A \subset \bigcup \{H_\beta | \beta \in B_0\}$ (事实上, 若 $x \in A$, 则存在 $H_\beta \in \mathcal{H}$ 使得 $x \in H_\beta$, 假设 $H_\beta \subset W_{x(\beta)}$, 则 $x \in H_\beta \subset W_{x(\beta)} \subset A'$, 矛盾, 于是 $H_\beta \subset U_{s(\beta)}$), 所以 A 是 αp -仿紧子集.

推论 3.1 p -仿紧空间 $(X, \mathcal{T})$ 中每个闭集 A 都是 αp -仿紧子集; p -仿紧空间 $(X, \mathcal{T})$ 的闭子空间 A 是 p -仿紧的.

由定理 1.4 可得

定理 3.2 拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$ 中每个开的 αp -仿紧子集 A 是 p -仿紧的.

定理 3.3 设 A 是 $(X, \mathcal{T})$ 的既开又闭的子空间, 则 A 是 αp -仿紧子集当且仅当 A 是 p -仿紧的.

证 必要性由定理 3.2 显然成立.

充分性设 $\mathcal{U} = \{U_s | s \in S\}$ 是 $(X, \mathcal{T})$ 中子集 A 的任意开覆盖, 则 $\mathcal{U}_A = \{U_\alpha \cap A | \alpha \in \Lambda\}$ 是子空间 $(A, \mathcal{T}_A)$ 中的开覆盖. 由 A 是 p -仿紧的知, 存在 $(A, \mathcal{T}_A)$ 中局部有限的预开覆盖 $\mathcal{V}$ 加细 $\mathcal{U}$. 由定理 1.4 知, $\mathcal{V}$ 是 $(X, \mathcal{T})$ 中的预开集族. 下证 $\mathcal{V}$ 在 $(X, \mathcal{T})$ 中是局部有限的. 任意 $x \in X$, 若 $x \in A$, 存在开集 $O_x \in \mathcal{T}_A \subset \mathcal{T}$, 使得 $x \in O_x$ 且 O_x 仅与 $\mathcal{V}$ 中有限个元素相交; 若 $x \in X - A$, 显然 $X - A$ 是 $(X, \mathcal{T})$ 中的开集且 $X - A$ 不与 $\mathcal{V}$ 中的元素相交, 因此 $\mathcal{V}$ 在 $(X, \mathcal{T})$ 中是局部有限的. 对任意 $V \in \mathcal{V}$, 存在 $\alpha \in \Lambda$ 使得 $V \subset U_\alpha \cap A \subset U_\alpha$, 即 $\mathcal{V}$ 是 $(X, \mathcal{T})$ 中 $\mathcal{U}$ 的局部有限的预开加细覆盖, 所以 A 是 αp -仿紧子集.

推论 3.2 p -仿紧空间的既开又闭的子空间是 p -仿紧的.

定义 3.3 设 $(X, \mathcal{T})$ 是拓扑空间, $A \subset X$, 称 A 为 θ_p -开集, 若对任意 $x \in A$, 存在开集 U 使得 $x \in U \subset U_p^- \subset A$; 称 A 为 θ_p -闭集, 若 A' 为 θ_p -开集.

注 3.2 由定义知, θ_p -开集 $\implies$ 开集; θ_p -闭集 $\implies$ 闭集 $\implies g$ -闭集.

定理 3.4 设 Hausdorff 空间 $(X, \mathcal{T})$ 中任意集族是 p -闭包保持的, 若 A 为 αp -仿紧子集, 则 A 为 θ_p -闭集.

证 设 $x \in A'$, 任意 $y \in A$, 由 X 是 Hausdorff 空间知, 存在开集 U_y 使得 $y \in U_y$, $x \notin U_y^-$. 令 $\mathcal{U} = \{U_y | y \in A\}$, 则 $\mathcal{U}$ 是 $(X, \mathcal{T})$ 中 A 的开覆盖, 因为 A 是 αp -仿紧子集, 所以存在 $(X, \mathcal{T})$ 中局部有限的预开覆盖 $\mathcal{V}$ 加细 $\mathcal{U}$. 令 $W = \bigcup \{V | V \in \mathcal{V}\}$, 显然 W 是预开集且 $x \notin W$ (事实上, 任意 $V \in \mathcal{V}$, 存在 $U_y \in \mathcal{U}$ 使得 $V \subset U_y$, 则 $x \notin V^-$. 由定义 1.6 知 $W^- = \bigcup \{V^- | V \in \mathcal{V}\}$, 所以 $x \notin W$). 令 $G = W^-$, 则 G 是包含 x 的开集, 由

$$W \subset W^{-\circ} \subset (W_{p^\circ} \subset ((W^-)'_p)^- \subset (G_p^-)',$$

所以 $x \in G \subset G_p^- \subset A'$, 即 A' 是 θ_p -开集, 故 A 是 θ_p -闭集.

推论 3.3 设 Hausdorff 空间 $(X, \mathcal{T})$ 中任意集族是 p -闭包保持的, 若 $(X, \mathcal{T})$ 是 p -仿紧空间, 则下列条件等价:

- (1) A 为 αp -仿紧子集;
- (2) A 为 θ_p -闭集;
- (3) A 为闭集;
- (4) A 为 g -闭集.

参 考 文 献

- [1] Dieudonné J. Une généralisation des espaces compacts[J]. J. Math. Pures Appl., 1944, 23(9): 65–76.
- [2] Al-Zoubi K Y. S -paracompact spaces[J]. Acta Mathematica Hungarica, 2006, 110(1): 165–174.
- [3] 杨书娟. 膨胀空间和仿紧空间的研究 [D]. 内蒙古: 内蒙古师范大学硕士学位论文, 2011.
- [4] 古定桂. 与准开集有关的几个问题 [J]. 湛江师范学院学报 (自然科学版), 1997, 18(2): 20–21.
- [5] 黄荧. 预开集与仿紧空间 [J]. 河南师范大学学报 (自然科学版), 1991, (4): 121–126.
- [6] Nj&stad O. On some classes of nearly open sets[J]. Pacific Journal of Mathematics, 1965, 15(3): 961–970.
- [7] Dontchev J. Survey on preopen sets[J]. arXiv preprint math/9810177, 1998.
- [8] 高国士. 拓扑空间论 [M]. 北京: 科学出版社, 2008.
- [9] 佟鑫. p -可膨胀空间 [J]. 内蒙古师范大学学报, 2014, 43(1): 7–12.
- [10] 苏发慧, 严春旭, 魏喜凤. p -正则空间 [J]. 邯郸师专学报, 2002, 12(3): 11–13.
- [11] 李丕余. 关于 S -仿紧空间及 α -可膨胀空间性质的研究 [D]. 南京: 南京师范大学硕士学位论文, 2007.

ON p -PARACOMPACT SPACES

TONG Xin , SIQIN Meng-ke

(College of Mathematics Science, Inner Mongolia Normal University, Huhhot 010022 , China)

Abstract: The problems of p -paracompact spaces and p -countably paracompact spaces are studied in this paper. By using pre-open sets and covering property theory , we obtain the definitions and the equivalence conditions of p -paracompact spaces and p -countably paracompact spaces and some properties of αp -paracompact sets, which extend partial results of paracompact spaces in general topological spaces.

Keywords: pre-open set; p -paracompact spaces; p -countably paracompact spaces

2010 MR Subject Classification: 54D20