

一些积图的点可区别均匀边色数

马 刚

(西北民族大学数学与计算机科学学院, 甘肃 兰州 730124)

摘 要: 本文研究了积图的点可区别均匀边染色问题. 利用构造法得到了积图 $G \times G$ 的点可区别均匀边染色的一个结论, 并且获得了等阶的完全图与完全图、星与星、轮与轮的积图的点可区别均匀边色数, 验证了它们满足点可区别均匀边染色猜想 (VDEEC).

关键词: 积图; 点可区别均匀边染色; 点可区别均匀边色数

MR(2010) 主题分类号: 05C15

中图分类号: O157.5

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2014)05-1005-05

1 引言

由信息科学、计算机科学、生物学等提出的点可区别边染色 (或强边染色)^[1, 2] 是一个十分困难的问题, 文 [3] 提出了距离不超过 β 的任意两点可区别的边染色概念及相关猜想, 文 [4] 提出了图的邻强边染色概念, 得到了若干结果, 并提出了有关猜想. 张忠辅等人于 2008 年在文 [5] 中又提出了图的点可区别均匀边染色概念和猜想, 得到了星、完全图、扇、轮和完全二部图等简单图的点可区别均匀边色数.

最近, 图的在新染色概念下的染色问题是非常活跃的课题, 但要确定其相应的染色数是非常困难的. 文 [6] 探讨了一些倍图的邻点可区别均匀全色数, 文 [7] 研究了一些 Mycielski 图的点可区别均匀全染色问题, 给出了路、圈、星和扇的 Mycielski 图的点可区别均匀全色数. 文 [8] 得到了路和圈的 Mycielski 图的点可区别边色数, 文 [9] 给出了路、圈和星的 Mycielski 图的 Smarandchely- 邻点可区别边色数. 文 [10, 11] 研究了一些图的点可区别均匀边染色问题, 分别给出了星、扇和轮的倍图的点可区别均匀边色数, 以及等阶的路和路、路和圈、圈和圈的联图的点可区别均匀边色数. 本文给出了积图 $G \times G$ 的点可区别均匀边色数的一个结论, 得到了 $K_n \times K_n$ 、 $S_n \times S_n$ 和 $W_n \times W_n$ 的点可区别均匀边色数.

2 相关定义及引理

定义 2.1 ^[12,13] 设有简单图 G 和正整数 k , 若存在映射 $f: E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, 满足任意相邻的边 e, e' 有 $f(e) \neq f(e')$, 则称 f 为 G 的一个正常边染色法 (简记为 k -PEC). 而称

$$\chi'(G) = \min\{k | G \text{ 存在一个 } k\text{-PEC}\}$$

为 G 的边色数.

*收稿日期: 2013-04-02

接收日期: 2013-10-14

基金项目: 国家自然科学基金资助 (61163037); 甘肃省自然科学基金资助 (145RJZA158) 西北民族大学中央高校基本科研业务费专项资金资助 (ZYZ2011082).

作者简介: 马刚 (1975-), 男, 回族, 甘肃定西, 副教授, 研究方向: 图论.

定义 2.2 ^[1-3] 对 $|V(G)| \geq 3$ 的连通图 $G(V, E)$ 的 k -正常边染色法 f , 若满足 $\forall u, v \in V(G), u \neq v, C(u) \neq C(v)$, 则称 f 为 G 的一个 k -点可区别边染色法 (简记为 k -VDEC). 而

$$\chi'_{\text{vd}}(G) = \min\{k | G \text{ 存在一个 } k\text{-VDEC}\}$$

称为 G 的点可区别边色数. 其中 $C(u) = \{f(uv) | uv \in E(G)\}$ 称为点 u 在 f 下的关联边色集, $C(u)$ 在色全集合 $C = \{1, 2, \dots, k\}$ 中的补集记为 $\overline{C}(u) = C \setminus C(u)$.

定义 2.3 ^[5,10,11] 对 $|V(G)| \geq 3$ 的连通图 $G(V, E)$ 的 k -点可区别边染色法 f , 若满足 $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, k\}, ||E_i| - |E_j|| \leq 1$, 则称 f 为 G 的一个 k -点可区别均匀边染色法 (简记为 k -VDEEC). 而

$$\chi'_{\text{vde}}(G) = \min\{k | G \text{ 存在一个 } k\text{-VDEEC}\}$$

称为 G 的点可区别均匀边色数. 其中 $E_i = \{e | e \in E(G), f(e) = i\}, i = 1, 2, \dots, k$.

定义 2.4 对简单图 G , $\delta(G)$ 和 $\Delta(G)$ 分别表示 G 的最小度和最大度, n_i 表示 G 中度为 i 的点数, $\binom{n}{m}$ 表示 n 个元素中取 m 个元素的组合数, 则称 $\mu(G) = \max\{\min\{\theta | \binom{\theta}{i} \geq n_i\}, \delta(G) \leq i \leq \Delta(G)\}$ 为 G 的组合度.

猜想 2.1(VDECC) ^[1-3] 对 $|V(G)| \geq 3$ 的简单连通图 G , 有

$$\chi'_{\text{vd}}(G) \leq \mu(G) + 1.$$

猜想 2.2(VDEECC) ^[5,10,11] 对 $|V(G)| \geq 3$ 的简单连通图 G , 有

$$\chi'_{\text{vde}}(G) \leq \mu(G) + 1 \text{ 且 } \chi'_{\text{vde}}(G) = \chi'_{\text{vd}}(G).$$

定义 2.5 ^[13] 设 G 和 H 是两个简单图, 记 G 和 H 的顶点集分别为 $V(G) = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$, $V(H) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. 若满足 $V(G \times H) = \{w_{ij} | w_{ij} = (u_i, v_j), 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$, $E(G \times H) = \{w_{ij}w_{lk} | i = l \text{ 且 } v_jv_k \in E(H), \text{ 或 } j = k \text{ 且 } u_iu_l \in E(G), 1 \leq i, l \leq m, 1 \leq j, k \leq n\}$, 则称 $G \times H$ 为 G 与 H 的积图.

由定义 2.2 和定义 2.3 知, 下述引理 2.1 显然成立.

引理 2.1 对 $|V(G)| \geq 3$ 的简单连通图 G , 有

$$\chi'_{\text{vde}}(G) \geq \chi'_{\text{vd}}(G) \geq \mu(G).$$

引理 2.2 ^[5] 当 $n \geq 3$ 时, 对 n 阶的完全图 K_n , 有

$$\chi'_{\text{vde}}(K_n) = \begin{cases} n, & n \equiv 1(\text{mod } 2); \\ n + 1, & n \equiv 0(\text{mod } 2). \end{cases}$$

引理 2.3 ^[13] 当 $n \geq 2$ 时, 对 n 阶的完全图 K_n , 有

$$\chi'(K_n) = \begin{cases} n, & n \equiv 1(\text{mod } 2); \\ n - 1, & n \equiv 0(\text{mod } 2). \end{cases}$$

引理 2.4 ^[5] 当 $n \geq 2$ 时, 对 $n + 1$ 阶的星 S_n , 有

$$\chi'_{\text{vde}}(S_n) = n.$$

引理 2.5 ^[5] 当 $n \geq 3$ 时, 对 $n+1$ 阶的轮 W_n , 有

$$\chi'_{\text{vde}}(W_n) = \begin{cases} 5, & n = 3; \\ n, & n \geq 4. \end{cases}$$

文中未加述及的术语、记号可参见文献 [12, 13].

3 主要结果

定理 3.1 若简单图 G 的 $\chi'_{\text{vde}}(G) = \Delta(G)$, 且 $|E(G)| \equiv 0 \pmod{\Delta(G)}$, 则

$$\chi'_{\text{vde}}(G \times G) = 2\Delta(G).$$

证 由于 $\chi'_{\text{vde}}(G) = \Delta(G)$, 所以 G 有唯一最大度点, 否则 $\chi'_{\text{vde}}(G) \geq \Delta(G) + 1$, 这与已知相矛盾. 从而 $G \times G$ 有唯一最大度点, 且 $\Delta(G \times G) = 2\Delta(G)$. 又因

$$\min\{\theta|(\binom{\theta}{2\Delta(G)} \geq 1\} = 2\Delta(G),$$

所以由组合度定义知 $\mu(G \times G) \geq 2\Delta(G)$. 所以由引理 2.1 知 $\chi'_{\text{vde}}(G \times G) \geq 2\Delta(G)$, 要证定理为真, 仅需给出 $G \times G$ 的一个 $(2\Delta(G))$ -VDEEC.

为了便于区别, 下面将 $G \times G$ 表示为 $G_1 \times G_2$. 在 $G_1 \times G_2$ 中, G_1 的所有拷贝是两两不交的, 记它们的并集为 H_1 , 同样, G_2 的所有拷贝是两两不交的, 它们的并集记为 H_2 . 则 H_1 与 H_2 是边不交的, 且 $G_1 \times G_2 = H_1 \cup H_2$. 因为 $\chi'_{\text{vde}}(G_1) = \chi'_{\text{vde}}(G_2) = \Delta(G)$, 设色全集合 $C = \{1, 2, \dots, 2\Delta(G)\}$, 分两步构造染色 f 如下.

第一步 用色集 $\{1, 2, \dots, \Delta(G)\}$ 对 G_1 的每一拷贝 $G_1 \times \{v_j\}$, $v_j \in V(G_2)$ 进行点可区别均匀边染色, 且让每一拷贝对应 G_1 的同一边的边都着以同一色.

第二步 用色集 $\{\Delta(G) + 1, \Delta(G) + 2, \dots, 2\Delta(G)\}$ 对 G_2 的每一拷贝 $\{u_i\} \times G_2$, $u_i \in V(G_1)$ 进行点可区别均匀边染色, 且让每一拷贝对应 G_2 的同一边的边都着以同一色.

显然, 上述染色法 f 对 $G \times G$ (即 $G_1 \times G_2$) 是点可区别的. 由于 G 的 $(\Delta(G))$ -VDEEC 法中每一色使用了 $\frac{|E(G)|}{\Delta(G)}$ 次, 又 $G_1 \times G_2$ 中 G_1 和 G_2 分别被拷贝了 $|V(G)|$ 次, 从而 f 对 $G \times G$, 有

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, 2\Delta(G)\}, |E_i| = \frac{|E(G)| \cdot |V(G)|}{\Delta(G)}.$$

即 f 是均匀的. 总之, f 是 $G \times G$ 的 $(2\Delta(G))$ -VDEEC. 因此, 定理为真.

定理 3.2 当 $n \geq 2$ 时, 对两个 n 阶的完全图 K_n 与 K'_n 的积图 $K_n \times K'_n$, 有

$$\chi'_{\text{vde}}(K_n \times K'_n) = 2n.$$

证 记 n 阶完全图 K_n 与 K'_n 的顶点集分别为

$$V(K_n) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}, V(K'_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}.$$

显然 $K_n \times K'_n$ 为 $(2n-2)$ -正则图, 且 $|V(K_n \times K'_n)| = n^2$, 组合度

$$\mu(K_n \times K'_n) = \min\{\theta|(\binom{\theta}{2n-2} \geq n^2\} = 2n.$$

由引理 2.1 知 $\chi'_{\text{vde}}(K_n \times K'_n) \geq 2n$, 要证定理为真, 仅需给出 $K_n \times K'_n$ 的一个 $(2n)$ -VDEEC. 设色全集合 $C = \{1, 2, \dots, 2n\}$, 以下分两种情况予以证明.

情形 1 当 $n \equiv 1(\text{mod } 2)$ 时, 由引理 2.2 知此时 $\chi'_{\text{vde}}(K_n) = n$. 分两步构造染色 f 如下.

第一步 用色集 $\{1, 2, \dots, n\}$ 对 K_n 的每一拷贝 $K_n \times \{v_j\}$, $v_j \in V(K'_n)$ ($j = 1, 2, \dots, n$) 进行点可区别均匀边染色, 且让每一拷贝对应 K_n 的同一边的边都着以同一色.

第二步 用色集 $\{n+1, n+2, \dots, 2n\}$ 对 K'_n 的每一拷贝 $\{u_i\} \times K'_n$, $u_i \in V(K_n)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 进行点可区别均匀边染色, 让每一拷贝对应 K'_n 的同一边的边都着以同一色. 则 f 对 $K_n \times K'_n$, 有

$$\forall i \in C, |E_i| = \frac{n(n-1)}{2}.$$

自然, f 是 $K_n \times K'_n$ 的 $(2n)$ -VDEEC.

情形 2 当 $n \equiv 0(\text{mod } 2)$ 时, 由引理 2.3 知此时 $\chi'(K_n) = n-1$. 分两步构造染色 f 如下.

第一步 用色集 $\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{j\}$ 对 K_n 的每一拷贝 $K_n \times \{v_j\}$, $v_j \in V(K'_n)$ 进行正常边染色, $j = 1, 2, \dots, n$.

第二步 用色集 $\{n+1, n+2, \dots, 2n\} \setminus \{n+i\}$ 对 K'_n 的每一拷贝 $\{u_i\} \times K'_n$, $u_i \in V(K_n)$ 进行正常边染色, $i = 1, 2, \dots, n$.

由于 n 阶完全图的每个顶点关联边数恰好是 $n-1$, 则 f 对 $K_n \times K'_n$, 有

$$\overline{C}(w_{ij}) = \{j, n+i\}, i, j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, 2n\}, |E_i| = \frac{n(n-1)}{2}.$$

所以, f 是 $K_n \times K'_n$ 的 $(2n)$ -VDEEC.

总之, 定理为真.

推论 3.1 当 $n \geq 2$ 时, 对 $n+1$ 阶的星 S_n , 有

$$\chi'_{\text{vde}}(S_n \times S_n) = 2n.$$

证 由引理 2.4 知 $\chi'_{\text{vde}}(S_n) = n = \Delta(S_n)$, 又 $|E(S_n)| = n$, 所以 $|E(S_n)| \equiv 0(\text{mod } \Delta(S_n))$, 由定理 3.1 知结论成立.

推论 3.2 当 $n \geq 3$ 时, 对 $n+1$ 阶的轮 W_n , 有

$$\chi'_{\text{vde}}(W_n \times W_n) = \begin{cases} 8, & n = 3; \\ 2n, & n \geq 4. \end{cases}$$

证 当 $n = 3$ 时, 显然 $W_3 \times W_3 \cong K_4 \times K_4$, 由定理 3.2 知此时结论成立. 当 $n \geq 4$ 时, 由引理 2.5 知 $\chi'_{\text{vde}}(W_n) = n = \Delta(W_n)$, 又 $|E(W_n)| = 2n$, 所以 $|E(W_n)| \equiv 0(\text{mod } \Delta(W_n))$, 由定理 3.1 知结论成立.

由此可见, 等阶的完全图与完全图、星与星、轮与轮的积图对点可区别边染色猜想 2.1 和点可区别均匀边染色猜想 2.2(即 VDECC 和 VDEECC) 成立.

参 考 文 献

- [1] Bazgan C, Harkat-Benhamdine A, Li H, et al. On the vertex-distinguishing proper edge-colorings of graphs [J]. J. Combin. Theory Ser. B, 1999, 75(2): 288–301.
- [2] Burriss A C, Schelp R H. Vertex-distinguishing proper edge-colorings [J]. J. Graph Theory, 1997, 26(2): 73–82.
- [3] 张忠辅, 李敬文, 陈祥恩等. 图的距离不大于 β 的任意两点可区别的边染色 [J]. 数学学报 (中文版), 2006, 49(3): 703–708.
- [4] Zhang Zhongfu, Liu Linzhong, Wang Jianfang. Adjacent strong edge coloring of graphs [J]. Applied Mathematics Letters, 2002, 15(5): 623–626.
- [5] Zhang Zhongfu, Li Muchun, Yao Bing, et al. On the vertex distinguishing equitable edge-coloring of graphs [J]. ARS Combinatoria, 2008, 86: 193–200.
- [6] 马刚, 张忠辅. 若干倍图的邻点可区别均匀全染色 [J]. 吉林大学学报 (理学版), 2009, 47(6): 1160–1164.
- [7] 马刚, 冶建华. 关于 Mycielski 图的点可区别均匀全染色 [J]. 山东大学学报 (理学版), 2012, 47(12): 25–30.
- [8] 王继顺. 图 $M(P_m)$ 和 $M(C_m)$ 的点可区别边色数 [J]. 数学杂志, 2012, 32(2): 363–368.
- [9] 田京京. 几类 Mycielske 图的 Smarandchely 邻点可区别染色 [J]. 数学杂志, 2012, 32(4): 723–728.
- [10] 马刚, 马少仙, 张忠辅. 一些倍图的点可区别均匀边色数 [J]. 经济数学, 2008, 25(4): 437–441.
- [11] 张忠辅, 李敬文, 赵传成等. 若干联图的点可区别均匀边色数 [J]. 数学学报 (中文版), 2007, 50(1): 197–204.
- [12] Yap H P. Total colorings of graphs [M]. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1623, Berlin: Springer, 1996.
- [13] Bondy J A, Murty U S R. Graph theory with applications[M]. New York: The Macmillan Press Ltd., 1976.

ON THE VERTEX-DISTINGUISHING-EQUITABLE EDGE CHROMATIC NUMBER OF SOME PRODUCT GRAPHS

MA Gang

(College of Mathematics and Computer Science, Northwest University for Nationalities,
Lanzhou 730124, China)

Abstract: In this paper, we discuss the problem of the vertex-distinguishing-equitable edge coloring on product graph. We get a conclusion of vertex-distinguishing-equitable edge coloring of product graph by using constructive method, and present the vertex-distinguishing-equitable edge chromatic numbers of product graphs of complete graph and complete graph, star and star, wheel and wheel, which satisfy the conjecture on VDEECC.

Keywords: product graph; vertex-distinguishing-equitable edge coloring; vertex-distinguishing-equitable edge chromatic number

2010 MR Subject Classification: 05C15