

$N(2, 2, 0)$ 代数的 E - 反演半群

邓方安

(陕西理工学院数学与计算机科学学院, 陕西 汉中 723001)

摘要: 本文研究了 $N(2, 2, 0)$ 代数 $(S, *, \Delta, 0)$ 的 E - 反演半群. 利用 $N(2, 2, 0)$ 代数的幂等元, 弱逆元, 中间单位元的性质和同字关系, 得到了 $N(2, 2, 0)$ 代数的半群 $(S, *)$ 构成 E - 反演半群的条件及元素 a 的右伴随非零零因子唯一, 且为 a 的弱逆元等结论, 这些结果进一步刻画了 $N(2, 2, 0)$ 代数的结构.

关键词: $N(2, 2, 0)$ 代数; E - 反演半群; 弱逆元; 中间单位元; 非零零因子

MR(2010) 主题分类号: 20M07

中图分类号: O152.7

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2014)05-0977-08

1 引言

半群代数理论是一门重要的代数学分支, 它在自动化控制、密码学和计算机安全系统设置等方面都有重要的实践意义. 1955 年, Thierin 首次引入了 E - 反演半群的概念^[1]. 1990 年, Mitsch 又重新给出了 E - 反演半群的一个定义, 研究了 E - 反演半群的基本性质及 E - 反演半群的子直积^[2]. 2010 年, Siripitukdet 研究了 E - 反演 E - 半群的带同余, 得到了类似于纯正半群上的同余的若干结果^[3]. 文献 [11–12] 分别讨论了 E - 可逆 $*$ - 半群的性质和具有中间幂等元的正则半群的性质. 1996 年作者从代数学的角度对模糊蕴含算子作了进一步抽象, 建立了与著名的 Hilbert 第十问题 H10 有关的、比 DA 重写系统更广泛的 $N(2, 2, 0)$ 代数^[4], 记为 $(S, *, \Delta, 0)$, 这个新的代数系统带的两个半群 $(S, *)$ 和 (S, Δ) 是相互对偶. 文献 [5] 证明了半群 $(S, *)$ 和 (S, Δ) 还是纯正半群. 文献 [6] 研究了 $N(2, 2, 0)$ 代数的 RC 半群及其性质. 2011 年陈露教授研究了 $N(2, 2, 0)$ 代数的中间幂等元性质^[13]; 2012 年李旭东教授研究了 $N(2, 2, 0)$ 代数的子代数与理想^[14–15]. 本文将讨论 $N(2, 2, 0)$ 代数的 E - 反演半群 $(S, *)$ 及其性质, 研究 $N(2, 2, 0)$ 代数的 $(S, *)$ 元素的弱逆元与中间单位元的关系.

2 预备知识

定义 2.1^[4] 设 S 是含常元 0 的集合. 若在 S 中定义二元运算 $*$ 和 Δ 满足以下公理:
 $\forall x, y, z \in S$,

$$(F_1) \quad x * (y \Delta z) = z * (x * y),$$

$$(F_1) \quad (x \Delta y) * z = y * (x * z),$$

$$(F_1) \quad 0 * x = x.$$

则称 $(S, *, \Delta, 0)$ 是一个 $N(2, 2, 0)$ 代数.

*收稿日期: 2013-05-02

接收日期: 2013-05-29

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (81160183).

作者简介: 邓方安 (1963–), 男, 教授, 主要研究方向: 粗糙集理论及半群理论.

定理 2.1^[4] 若 $(S, *, \Delta, 0)$ 是一个 $N(2, 2, 0)$ 代数, 则 $\forall x, y, z \in S$, 恒有下列等式成立:

- (1) $x * y = y \Delta x$;
- (2) $(x * y) * z = x * (y * z), (x \Delta y) \Delta z = x \Delta (y \Delta z)$;
- (3) $x * y * z = y * x * z, x \Delta y \Delta z = x \Delta z \Delta y$.

推论^[4] 若 $(S, *, \Delta, 0)$ 是一个 $N(2, 2, 0)$ 代数, 则 $(S, *)$ 和 (S, Δ) 都是半群.

因此, $N(2, 2, 0)$ 代数是带有一对对偶半群的代数系统.

定理 2.2^[4] 设集合 S 含有常元 $0, *, \Delta : S \times S \rightarrow S$, 且 $\forall x, y \in S, 0 * x = x, x * y = y \Delta x$, 则 $\forall x, y, z \in S$, 有下列一些等价形式:

- (1) $(x \Delta y) * z = y * (x * z) \iff (2) (x * y) * z = x * (y * z)$;
- (3) $x * (y * z) = y * (x * z) \iff (4) (x \Delta y) \Delta z = (x \Delta z) \Delta y \iff (5) x * (y \Delta z) = z * (x * y)$.

定义 2.2 $\forall a \in S, \exists b \in S$, 使得 $a * b * a = a$, 则称 a 是 S 的正则元. 记 S 的全体正则元集合为 $\text{Reg}(S)$.

对于 $a, b \in S$, 若 $a * b * a = a, b * a * b = b$, 则称 b 是 a 的逆元. 如果 S 的每个元素都是正则元, 则称 S 是一个正则半群; 如果 S 的每个元素都有惟一的逆元素, 则称 S 是一个逆半群, 记逆半群的元素 a 的逆元为 a^{-1} , S 中 a 的全体逆元的集合为 $V(a)$.

定义 2.3^[3] 如果一个半群 S 中的每一个元素都是幂等元, 则称 S 是一个带; 若一个带 S 中的任何元素 a, b 都满足 $a = aba$, 则称该带为矩形带.

定义 2.4^[3] 如果对于一个半群 S 中的一个元素 a , 存在 S 中的元素 x , 使得 ax 是 S 的一个幂等元, 则称 a 是 E -反演的; 如果一个半群 S 中的每一个元素都是 E -反演的, 则称该半群 S 是 E -反演半群; 如果半群 S 的幂等元集合 E_S 形成一个子半群, 则称 S 是一个 E -半群.

上述 E -反演半群的定义是 1955 年 Thierrin 提出的. 事实上, 如果 $xy \in E_S$, 则 $a = yxy$, 满足 $xa, ax \in E_S$, 从而得到: S 是 E -反演半群的充分必要条件是^[8]

$$(\forall x \in S), I(x) = \{a \in S \mid xa, ax \in E_S\} \neq \emptyset.$$

由定理 2.1 及推论知: $N(2, 2, 0)$ 代数带有一对对偶半群. 下面将给出带有一对对偶 E -反演半群的 $N(2, 2, 0)$ 代数的例子.

例 设 $S = \{0, a, b, c, d, e, f, g\}$, 在 S 上定义两个二元运算 $*, \Delta$ 如下表:

*	0	a	b	c	d	e	f	g
0	0	a	b	c	d	e	f	g
a	0	a	b	c	d	e	f	g
b	b	b	b	b	b	b	b	b
c	c	c	b	b	b	b	c	c
d	d	d	b	b	d	e	d	d
e	b	b	b	b	b	b	b	b
f	0	a	b	c	d	e	f	g
g	0	a	b	c	d	e	f	g

Δ	0	a	b	c	d	e	f	g
0	0	0	b	c	d	b	0	0
a	a	a	b	c	d	b	a	a
b	b	b	b	b	b	b	b	b
c	c	c	b	b	b	b	c	c
d	d	d	b	b	d	b	d	d
e	e	e	b	b	e	b	e	e
f	f	f	b	c	d	b	f	f
g	g	g	b	c	d	b	g	g

可以验证 $(S, *, \Delta, 0)$ 是一个 $N(2, 2, 0)$ 代数, 且 $(S, *)$ 是一个 E - 反演半群.

事实上, 对于 0, 存在 f , 使得 $(0 * f)^2 = 0 * f = f$, 类似的有: 对于 a , 存在 f , 使得 $(a * f)^2 = a * f$, 对于 b , 存在 e , 使得 $(b * e)^2 = b * e$, 对于 c , 存在 e , 使得 $(c * e)^2 = c * e$, 对于 d , 存在 f , 使得 $(d * f)^2 = d * f$, 对于 e , 存在 e , 使得 $(e * e)^2 = e * e$, 对于 f , 存在 f , 使得 $(f * f)^2 = f * f$, 对于 g , 存在 f , 使得 $(g * f)^2 = g * f$. 因此, 由定义 2.4 知 $(S, *,)$ 是一个 E - 反演半群. 显然, $E_S = \{0, a, b, d, f, g\}$.

对偶的可以得到: (S, Δ) 也是一个 E - 反演半群.

定义 2.5 ^[9] 设 S 是一个半群, 对于 $a \in S$, 定义集合

$$W(a) = \{x \in S \mid xax = x\},$$

称 $W(a)$ 中的元素为 a 的弱逆元.

定义 2.6 ^[10] 称一个半群 S 的子半群 T 是正规的, 如果 $\forall a, b, c, d \in T$, 有 $abcd = acbd$ 成立.

由 $N(2, 2, 0)$ 代数的半群 $(S, *)$ 的运算性质易得

定理 2.3 一个 $N(2, 2, 0)$ 代数 $(S, *, \Delta, 0)$ 的半群 $(S, *)$ 的任意子半群都是正规半群.

3 主要结果

定理 3.1 给定一个 $N(2, 2, 0)$ 代数 $(S, *, \Delta, 0)$, 若 $a \in E_S$, 有 $W(a) \neq \emptyset$, 则 $(W(a), *, \Delta, 0)$ 是 $(S, *, \Delta, 0)$ 的一个子代数.

证 由假设 $W(a) \neq \emptyset$, 则 $\forall x, y \in W(a)$, 有 $x * a * x = x, y * a * y = y$, 于是 $x * y = x * a * x * y * a * y = x * y * a * a * x * y = x * y * a * x * y$, 因此 $x * y \in W(a)$, 由对偶性, $x \Delta y \in W(a)$. 所以 $(W(a), *, \Delta, 0)$ 是 $(S, *, \Delta, 0)$ 的一个子代数.

定理 3.2 在 $N(2, 2, 0)$ 代数 $(S, *, \Delta, 0)$ 中, 若 $E_S \neq \emptyset$, 则 $(S, *, \Delta, 0)$ 的半群 $(S, *)$ 和 (S, Δ) 都是 E - 半群.

证 设 S 是一个 $N(2, 2, 0)$ 代数, 显然 $0 \in E_S$, 故 $E_S \neq \emptyset$. 若 $\forall a, b \in E_S$, 则由 $*$ 运算性质, 得

$$(a * b)^2 = a * b * a * b = a^2 * b^2 = a * b,$$

即 E_S 关于 $*$ 运算封闭, 而结合律显然成立, 因此 E_S 构成 $(S, *)$ 的子半群, 由定义 2.4 知: $(S, *)$ 是一个 E - 半群. 同理可得 (S, Δ) 也是 E - 半群.

由文献 [2] 知, 在纯正半群 S 上, 关系

$$\gamma = \{(a, b) \in S \times S : V(a) = V(b)\}$$

是一个最小逆同余. 而由文献 [5] 知: 任意一个 $N(2, 2, 0)$ 代数 $(S, *, \Delta, 0)$ 的半群 $(S, *)$ 和 (S, Δ) 都是纯正半群, 因此, 上述关系 γ 也是 $(S, *)$ 和 (S, Δ) 的最小逆同余.

由文献 [2] 知一个 E -半群 S 的幂等元集合 E_S 是一个矩形带时, 其关系

$$\sigma = \{(a, b) \in S \times S : W(a) = W(b)\}$$

是群 S 的一个最小群同余. 由定理 3.1 知任意一个 $N(2, 2, 0)$ 代数 $(S, *, \Delta, 0)$ 的半群 $(S, *)$ 和 (S, Δ) 都是 E -半群, 且 E_S 是一个矩形带, 上述关系 σ 也是 $(S, *)$ 和 (S, Δ) 的最小群同余.

定理 3.3 如果 $N(2, 2, 0)$ 代数 $(S, *, \Delta, 0)$ 的半群 $(S, *)$ 是正则半群, 则有

(1) $(S, *)$ 是 E -反演半群;

(2) $(S, *)$ 是 E -半群.

证 (1) $\forall a \in S$, 由 a 是正则元知, $\exists x \in S$, 使得 $a * x * a = a$, 于是

$$(a * x) * (a * x) = (a * x * a) * x = a * x,$$

所以 $a * x \in E_S$. 因此, $(S, *)$ 是 E -反演半群.

(2) $\forall a, b \in E_S$, 有

$$a * b * a * b = a^2 * b^2 = a * b,$$

所以 $a * b \in E_S$, 即 E_S 构成 S 是子半群, 因此, $(S, *)$ 是 E -半群.

定理 3.4 在 $N(2, 2, 0)$ 代数 $(S, *, \Delta, 0)$ 的半群 $(S, *)$ 中, 若 $\forall a \in S$, 都存在 $x \in W(a)$, 则半群 $(S, *)$ 是 E -反演半群.

证 由题设, 对于 $\forall a \in S$, 都存在 $x \in W(a)$, 即 $x * a * x = x$, 所以 $a * x * a * x = a * x$, 即有 $a * x \in E_S$, 所以 $(S, *)$ 是 E -反演半群.

定义 3.1 在 $N(2, 2, 0)$ 代数 $(S, *, \Delta, 0)$ 的半群 $(S, *)$ 中, $\forall x, y \in S$, 如果存在 $u \in S$, 使得

$$x * u * y = x * y,$$

则称 u 是 S 的一个中间单位, 记 S 的全体中间单位的集合为 $M(S)$.

显然 0 是 S 的一个中间单位元, 称其为平凡中间单位元.

定理 3.5 $(M(S), *, \Delta, 0)$ 是 $N(2, 2, 0)$ 代数 $(S, *, \Delta, 0)$ 的一个子代数.

证 显然 $0 \in M(S)$, 因此 $M(S)$ 是一个非空集, 则 $\forall u, v \in M(S)$, 有

$$x * u * y = x * y, x * v * y = x * y,$$

于是

$$x * (u * v) * y = u * (x * v * y) = u * (x * y) = x * u * y = x * y,$$

因此 $u * v \in M(S)$, 由对偶性, $x \Delta y \in M(S)$. 所以 $(M(S), *, \Delta, 0)$ 是 $(S, *, \Delta, 0)$ 的一个子代数.

定理 3.6 在 $N(2, 2, 0)$ 代数 $(S, *, \triangle, 0)$ 中构造关系 σ :

$$\forall x, y \in S, (x, y) \in \sigma \Leftrightarrow \exists u_1, u_2 \in M(S), \quad s.t. \quad u_1 * x = u_2 * y,$$

则 σ 是 S 上的一个同余关系.

证 显然 σ 是具有自反性和对称性.

下面验证 σ 的传递性.

事实上, 若 $\forall x, y, z \in S, (x, y) \in \sigma, (y, z) \in \sigma$, 则 $\exists u_1, u_2, u_3, u_4 \in S$, 使得

$$u_1 * x = u_2 * y, u_3 * y = u_4 * z,$$

于是

$$(u_1 * u_3) * x = u_3 * (u_1 * x) = u_3 * (u_2 * y) = u_2 * (u_3 * y) = u_2 * (u_4 * z) = (u_2 * u_4) * z,$$

由定理 3.5 $(M(S), *, \triangle, 0)$ 是 $(S, *, \triangle, 0)$ 的一个子代数知 $u_1 * u_3, u_2 * u_4 \in M(S)$, 故 $(x, z) \in \sigma$, 于是 σ 是 S 上的一个等价关系.

若 $x_1, x_2, y_1, y_2 \in S, (x_1, y_1) \in \sigma, (x_2, y_2) \in \sigma$, 那么 $\exists a, b, c, d \in M(S)$, 使

$$a * x_1 = b * y_1, c * x_2 = d * y_2,$$

因此,

$$(a * c) * (x_1 * x_2) = (a * x_1) * (c * x_2) = (b * y_1) * (d * y_2) = (b * d) * (y_1 * y_2),$$

即 σ 是 S 上的一个同余关系.

将 x 所在的同余类记为 $[x]$, $S/\sigma = \{[x] | x \in S\}$, $\forall [x], [y] \in S/\sigma$, 规定

$$[x] * [y] = [x * y], [x] \triangle [y] = [x \triangle y],$$

则有

定理 3.7 $(S/\sigma, *, \triangle, [0])$ 构成 $N(2, 2, 0)$ 代数.

定理 3.8 在 $N(2, 2, 0)$ 代数 $(S, *, \triangle, 0)$ 中, $\forall x \in S, u \in M(S)$, 构造映射 $g_u(x) = u * x$, 则 g_u 是半群 $(S, *)$ 上的自同态映射.

证 由 $g_u(x) = u * x$ 知

$$g_u(x * y) = u * (x * y),$$

又由 $u \in M(S)$ 得, $\forall x, y \in S$, 有 $x * u * y = x * y$, 于是

$$g_u(x * y) = u * (x * y) = u * (x * u * y) = (u * x) * (u * y) = g_u(x) * g_u(y),$$

因此, g_u 是半群 $(S, *)$ 上的自同态映射.

定理 3.9 若 $N(2, 2, 0)$ 代数 $(S, *, \triangle, 0)$ 的中间单位元集 $M(S) \neq \emptyset$, 则半群 $(S, *)$ 的每一个中间单位元都是左单位元.

证 由题设, $M(S) \neq \emptyset$, 即 $\forall x, y \in S, \exists u \in S$, 使得 $x * u * y = x * y$, 也即是 $u * (x * y) = x * y$, 于是 u 是 $(S, *)$ 的左单位元.

定理 3.10 在 $N(2, 2, 0)$ 代数 $(S, *, \Delta, 0)$ 的半群 $(S, *)$ 中, 若 $a \in M(S)$, 则有 $W(a) = E_S$.

证 $\forall x \in W(a)$, 由 $a \in M(S)$ 知: $x * a * x = x^2 = x$, 于是 $x \in E_S$. 因此 $W(a) = E_S$.

定义 3.2 在 $N(2, 2, 0)$ 代数 $(S, *, \Delta, 0)$ 的半群 $(S, *)$ 中, 称半群 $(S, *)$ 是左 (右) 可约化的, 若 $\forall a, b, c \in S, a * b = a * c \Rightarrow b = c (b * a = c * a \Rightarrow b = c)$.

显然, 半群 $(S, *)$ 可约化的充要条件是 $(S, *)$ 左可约且右可约.

定理 3.11 (1) 若 $N(2, 2, 0)$ 代数 $(S, *, \Delta, 0)$ 的半群 $(S, *)$ 是左可约的, 则 $(S, *)$ 的中间单位一定是左单位元;

(2) $N(2, 2, 0)$ 代数的半群 $(S, *)$ 是右可约的, 则 $(S, *)$ 的中间单位一定是右单位元.

证 (1) 由中间单位的定义, 若 u 是 S 的一个中间单位, $\forall x, y \in S$, 有 $x * u * y = x * y$ 成立, 又 $(S, *)$ 是左可约的, 故有 $u * y = y$, 因此 u 是 S 的一个左单位. 类似可证 (2) 成立.

定理 3.12 若 $N(2, 2, 0)$ 代数 $(S, *, \Delta, 0)$ 的半群 $(S, *)$ 是左可约的, a 是 E -反演的, 则 $W(a) \neq \emptyset$. 进一步, 如果 $N(2, 2, 0)$ 代数的半群 $(S, *)$ 是可约化半群, 则 $W(a) = V(a)$.

证 由定义 2.3 知: a 是 E -反演的, 则存在 $x \in S$, 使得 $(a * x)^2 = a * x$, 即

$$(a * x) * (a * x) = a * (x * a * x) = a * x,$$

又半群 $(S, *)$ 是左可约的, 故有 $x * a * x = x$, 因此 $W(a) \neq \emptyset$. 当 $N(2, 2, 0)$ 代数的半群 $(S, *)$ 是可约化半群时, 则也有

$$(a * x) * (a * x) = (a * x * a) * x = a * x,$$

由右可约化条件可得: $a * x * a = a$. 于是有 a 和 x 互为逆元, 即 $W(a) = V(a)$.

定义 3.3 给定一个 $N(2, 2, 0)$ 代数 $(S, *, \Delta, 0)$, 若 $a \in S (a \neq 0)$, 存在 $b \in S (b \neq 0)$, 使得 $a * b = 0$, 则称 a 是 $(S, *, \Delta, 0)$ 的一个非零零因子, b 是 a 的右伴随非零零因子. 记

$$N_a = \{x \in S \mid a * x = 0\},$$

称 N_a 为 a 的右伴随非零零因子集.

定理 3.13 在 $N(2, 2, 0)$ 代数 $(S, *, \Delta, 0)$ 的半群 $(S, *)$ 中, $a \in S$, 若 a 存在右伴随非零零因子, 则其右伴随非零零因子是惟一的.

证 对于 $a \in S$, 若 a 存在右非零零因子, 则不妨设 $x \in N_a$, 则有

$$a * x = 0, x * 0 = x * a * x = a * x * x = 0 * x = x,$$

假定 N_a 中另有 $y \in N_a$, 则有

$$y = 0 * y = a * x * y = x * a * y = x * 0 = x,$$

因此 N_a 只有惟一一个元素.

定理 3.14 在 $N(2, 2, 0)$ 代数 $(S, *, \Delta, 0)$ 的半群 $(S, *)$ 中, $a \in S$, 则有 $N_a \subseteq W(a)$, 即元素 a 的右伴随非零零因子必为 a 的弱逆元.

证 $\forall x \in N_a$, 则有 $a * x = 0$, 于是, $x * a * x = a * x * x = 0 * x = x$, 因此 $x \in W(a)$. 所以 $N_a \subseteq W(a)$.

定理 3.15 在 $N(2, 2, 0)$ 代数 $(S, *, \Delta, 0)$ 的半群 $(S, *)$ 中, 若 $x \in W(a), y \in W(b)$, 则有 $x * y \in W(a * b)$.

证 $\forall x \in W(a), \forall y \in W(b)$ 知: $x * a * x = x, y * a * y = y$, 于是

$$x * y = (x * a * x) * (y * b * y) = (x * y) * (a * b) * (x * y),$$

因此 $x * y \in W(a * b)$.

定义 3.4 半群 S 被称为是右零半群, 如果 $\forall a, b \in S$, 有 $a * b = b$.

定理 3.16 在 $N(2, 2, 0)$ 代数 $(S, *, \Delta, 0)$ 中, 若半群 $(S, *)$ 是右零半群, 则

- (1) $\forall a \in S$, 有 $E_S = W(a)$;
- (2) $\forall a, b \in S$, 有 $b \in W(a)$ 且 $a \in W(b)$;
- (3) 若 $b \in S, \exists x \in N_b$, 则 $\forall a \in S$, 有 $x \in N_a$.

证 由题设, 半群 $(S, *)$ 是右零半群, 则 $\forall a, b \in S$, 有 $a * b = b$, 因此,

(1) $\forall x \in E_S$, 有 $x^2 = x$, 于是 $x * a * x = a * x^2 = a * x = x$, 即 $x \in W(a)$, 从而 $E_S \subseteq W(a)$, 反过来, 若 $x \in W(a)$, 则 $x = x * a * x = a * x^2 = x^2$, 即 $x \in E_S$, 所以 $E_S \supseteq W(a)$. 于是 $E_S = W(a)$.

(2) 由于 $\forall a, b \in S$, 有 $a * b = b, b * a * b = a * b * b = b * b = b$, 故 $b \in W(a)$.

同理可证 $a \in W(b)$.

(3) 由 $b \in S, \exists x \in N_b$ 知: $b * x = 0$, 又由右零半群定义, $\forall a \in S$, 都有 $a * b = b$, 于是

$$a * b * x = b * x = 0 \Rightarrow b * a * x = b * (a * x) = a * x = 0,$$

因此 $x \in N_a$.

注 由 (3) 知, 如果 $N(2, 2, 0)$ 代数 $(S, *, \Delta, 0)$ 的半群 $(S, *)$ 是右零半群, 则它们的所有元素有相同的右伴随非零零因子.

参 考 文 献

- [1] Thierrin G. Demi-groups inverses rectangulaires [J]. Bull. Cl. Sci. Acad. R. Belg., 1955, 41: 83–92.
- [2] Mitsch H. Subdirect products of E -semigroups [J]. Austral. Math. Soc., 1990, 48(A): 66–78.
- [3] Siripitukdet M, Sattayaporn S. Band congruences on E -inversive E -semigroups [J]. International Journal of Algebra, 2010, 19: 923–929.
- [4] 邓方安, 徐扬. 关于 $N(2, 2, 0)$ 代数 [J]. 西南交通大学学报 (自然科学版), 1996, 31(4): 457–463.
- [5] 邓方安, 雍龙泉. $N(2, 2, 0)$ 代数的正则半群 [J]. 数学进展, 2012, 41(6): 665–671.
- [6] 邓方安. $N(2, 2, 0)$ 代数的 RC 半群 [J]. 山东大学学报 (理学版), 2011, 46(6): 8–11.
- [7] Siripitukdet M, Sattayaporn S. Semilattice congruence on E -inversive semigroups [J]. NU Sci., 2007, 4(S1): 40–44.
- [8] Blyth T S, Almeida Santos M H. E -inversive Dubreil-Jacotin semigroups [J]. Semigroup Forum, 2009, 78: 511–527.
- [9] Mills J E. Matrix congruence on orthodox semigroups [J]. Semigroup Forum, 1985, 31: 87–97.
- [10] Siripitukdet M, Sattayaporn S. The maximum idempotent separating congruence on E -inversive E -semigroups [J]. International Journal of Algebra, 2008, 2: 925–931.

- [11] Wang Shoufeng, Li Yinghui. E -inverse $*$ -semigroups[J]. Commun. Korean Math. Soc., 2012, 27(4): 689–699.
- [12] Hussain S, Anwer T, Chien H. Some properties of regular semigroups possess a medial idempotent [J]. International Journal of Algebra, 2010, 4(9): 433–438.
- [13] 陈露. 关于 $N(2, 2, 0)$ 代数的中间幂等元 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2011, 27(4): 433–436.
- [14] 李旭东, 宋雪梅. 一个 $N(2, 2, 0)$ 代数的子代数 [J]. 南开大学学报 (自然科学版), 2012, 45(3): 57–61.
- [15] 李旭东, 宋雪梅. $N(2, 2, 0)$ 代数的一个理想 [J]. 华中师范大学学报 (自然科学版), 2012, 46(1): 1–4.

E -INVERSIVE SEMIGROUPS OF $N(2, 2, 0)$ ALGEBRA

DENG Fang-an

(School of Mathematics and Computer Science, Shaanxi University of Technology,
Hanzhong 723001, China)

Abstract: We study E -inverse semigroups of $N(S, *, \delta, 0)$ on $N(2, 2, 2, 0)$ algebra. Using the properties of idempotents element, weak inverse element and middle unit, and congruence relations, we obtain the following results: if the idempotents set of $N(2, 2, 0)$ algebra is nonempty, then its two dual semigroups $(S, *)$ and (S, Δ) of $N(2, 2, 0)$ algebra are E -inverse semigroups. Moreover, right adjoint non-zero divisor of element a on semigroup $(S, *)$ of $N(2, 2, 0)$ algebra is unique and is weak inverse of a . Some other conclusions are also discussed, which further characterize structure of $N(2, 2, 0)$ algebra.

Keywords: $N(2, 2, 0)$ algebra; E -inverse semigroup; weak inverses element; middle unit; non-zero divisor

2010 MR Subject Classification: 20M07