Vol. 34 (2014)
No. 5

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

又一类三阶中立型分布时滞微分方程的振动定理

赵临龙 [1], 俞元洪 [2]
(1. 安康学院数学与应用数学研究所, 陕西 安康 725000)
(2. 中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100190)

摘 要: 本文研究三阶中立型分布时滞微分方程的振动问题. 利用 Riccati 变换技巧和积分平均方法, 获得了方程每一解振动或者收敛到零点的新准则, 最后, 给出了说明所得结果应用的例子.

关 键 词: 三阶; 中立型时滞微分方程; 分布时滞; Riccati 变换; 积分平均; 振动
MR(2010) 主题分类号: 34K11; 34C10 **中 图 分 类 号**: O175.12
文 献 标 识 码: A **文 章 编 号**: 0255-7797(2014)05-0959-09

1 引言

考虑三阶中立型分布时滞微分方程

$$(r(t)(c(t)[x(t)+\int_a^b p(t,\xi)x[\tau(t,\xi)]d\xi]')')'+\int_a^b q(t,\xi)f(x[g(t,\xi)])d\xi=0, t\geq t_0. \tag{1.1}$$

本文中总假设下列条件成立

(H_1) $r(t),c(t)\in C([t_0,\infty),(0,\infty)),\displaystyle\int_{t_0}^{\infty}\frac{dt}{r(t)}=\int_{t_0}^{\infty}\frac{dt}{c(t)}=\infty.$

(H_2) $p(t,\xi),q(t,\xi)\in C([t_0,\infty)\times[a,b],(0,\infty)),\displaystyle\int_a^b p(t,\xi)d\xi\leq p<1.$

(H_3) $\tau(t,\xi),g(t,\xi)\in C([t_0,\infty)\times[a,b],(0,\infty)),\tau(t,\xi)\leq t,g(t,\xi)\leq t,\xi\in[a,b],$

$$\lim_{t\to\infty}\inf_{\xi\in[a,b]}\tau(t,\xi)=\lim_{t\to\infty}\inf_{\xi\in[a,b]}g(t,\xi)=\infty,$$

$g(t,\xi)$ 关于 t 和 ξ 均为增函数.

(H_4) $f(u)\in C(R,R),\frac{f(u)}{u}\geq\delta>0,u\neq0.$

我们仅限于考虑方程 (1.1) 的非平凡解, 即存在某一半直线 $[t_x,\infty]$ 使得对任意 $T\geq t_x$, 满足不等式 $\sup|x(t)|:t>T>0$ 的解 $x(t)$. 方程 (1.1) 的解称为振动, 如果它有任意大的零点, 否则, 成为非振动.

当今, 时滞微分方程解的振动性, 为人们讨论的热点问题, 有关三阶泛函微分方程解的振动性的研究, 有文献 [1–15], 尤其 1978 年, Schot [15] 在《美国物理杂志》上, 发表了题为《急动度 – 加速度的时间变率的论文》, 介绍了位移对时间的三阶导数 – 急动度的历史背景, 并

*收稿日期: 2012-05-14 接收日期: 2013-07-05
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (61152003); 陕西省特色专业建设项目 (2011–59); 安康学院重点学科建设项目 (ZDXKZX012).

作者简介: 赵临龙 (1960–), 男, 陕西西安, 教授, 主要研究方向: 微分方程.

且考虑了它在凸轮和星形轮等间歇运动机械设计等方面的应用. 急动度作为加速度随时间的变化率是力学中的基本概念, 具有重要理论意义. 因此, 近年来, 三阶泛函微分方程解的振动性和渐进性研究日益受到重视, 并且取得不少重要成果. 例如最新结果可以参看文 [1–12]. 但是, 其中多数结果是三阶时滞微分方程的, 而关于三阶中立型的振动结果很少. 最近文 [10] 研究三阶时滞微分方程

$$(b(t)(a(t)x'(t))')' + q(t)f(x(t-\sigma)) = 0. \tag{1.2}$$

文中证明了方程 (1.2) 每一解振动或者收敛到零的若干充分条件. 显然, 当方程 (1.1) 中 $p(t,\xi)\equiv 0, q(t,\xi)$ 与 ξ 无关, $g(t,\xi)=t-\sigma, b-a=1$ 时, 即为方程 (1.2). 我们也注意到文 [13] 研究了与方程 (1.1) 相应的下列二阶方程的特例

$$(r(t)[x(t)+c(t)x(t-\tau)]')' + \int_a^b p(t,\xi)x[g(t,\xi)]d\xi = 0, \tag{1.3}$$

给出了方程 (1.3) 解的振动准则. 本文目的是建立三阶中立型方程 (1.1) 每一解振动或者收敛到零的充分条件. 我们将文 [13] 关于二阶方程 (1.3) 的结果推广到三阶方程. 我们也给出例子说明本文定理的应用.

2 主要结果

引理 1 设 $x(t)$ 是 (1.1) 式最终正解, 定义函数

$$z(t) = x(t) + \int_a^b p(t,\xi)x[\tau(t,\xi)]d\xi, \tag{2.1}$$

则 $z(t)$ 只能有下列两种可能

(I) $z(t)>0, z'(t)>0, (c(t)z'(t))'>0$,

(II) $z(t)>0, z'(t)<0, (c(t)z'(t))'>0$.

记作 $z(t)\in \mathrm{I}$ 或者 $z(t)\in \mathrm{II}$.

证 设 $x(t)$ 是 (1.1) 式最终正解, 故存在 $t_1 \ge t_0$, 当 $t > t_1$ 时, 使得 $x[\tau(t,\xi)] > 0, x[g(t,\xi)]>0, \xi\in[a,b], t>t_1$. 由 (2.1) 式知方程 (1.1) 为

$$(r(t)(c(t)z^{'}(t))^{'})^{'} + \int_a^b q(t,\xi)f(x[g(t,\xi)])d\xi = 0,$$

由 $q(t,\xi)\ge 0, x[g(t,\xi)]>0$ 及 (H_4), 得到 $z(t)>0, (r(t)(c(t)z'(t))')'\le 0, t\ge t_1$. 因 $((r(t)(c(t)z'(t))')'<0$, 故 $r(t)(c(t)z'(t))'$ 单调减小且最终定号, 则 $(c(t)z'(t))'$ 最终定号. 我们断言

$$(c(t)z'(t))'>0, t\ge t_2\ge t_1. \tag{2.2}$$

否则, 若 $(c(t)z'(t))'\le 0$, 则存在 $t_3\ge t_2$, 当 $t>t_3$ 时, 使得 $r(t)(c(t)z'(t))'\le r(t_3)(c(t_3)z'(t_3))'\le 0, t\ge t_3$. 用 $r(t)$ 除上式, 并从 t_3 到 t 对其积分产生

$$c(t)z'(t)-c(t_3)z'(t_3)\le r(t_3)(c(t_3)z'(t_3))'\int_{t_3}^t \frac{ds}{r(s)}.$$

在上式中, 令 $t\to\infty$, 利用 (H_1), 我们有 $c(t)z'(t)\to-\infty$. 因此存在 $t_4\geq t_3$, 当 $t>t_4$ 时, 使得

$$c(t)z'(t)\leq c(t_4)z'(t_4)<0,t\geq t_4.$$

用 $c(t)$ 除上式, 再从 t_4 到 t 积分, 利用假设 (H_1), 我们得到 $z(t)\to-\infty,t\to\infty$. 因此与 $z(t)>0$ 矛盾. 因此, (2.2) 式成立. 引理 1 证毕.

引理 2 设 $x(t)$ 是 (1.1) 式的最终正解, $z(t)\in$I, 则存在 $T\geq t_0$ 使得

$$z'[g_2(t)]\geq\frac{R[g_2(t)]r(t)}{c[g_2(t)]}(c(t)z'(t))',t\geq T,$$

其中

$$R(t)=\int_T^t\frac{1}{r(s)}ds,g_2(t)=g(t,a).\tag{2.3}$$

证 设 $z(t)\in$I, 由引理 1, 有

$$z(t)>0,c(t)z'(t)>0,r(t)(c(t)z'(t))'>0,(r(t)(c(t)z'(t))')'\leq0,t\geq T.$$

因此

$$c(t)z'(t)=c(T)z'(T)+\int_T^t\frac{r(s)(c(s)z'(s))'}{r(s)}ds\geq r(t)(c(t)z'(t))'R(t),t\geq T.$$

由 $(r(t)(c(t)z'(t))')'\leq0$, 我们得到 $z'[g_2(t)]\geq\frac{R[g_2(t)]r(t)}{c[g_2(t)]}(c(t)z'(t))',t\geq T$. 引理 2 证毕.

引理 3 设 $x(t)$ 是 (1.1) 式的最终正解, $z(t)\in$ II. 若

$$\int_{t_0}^\infty\frac{1}{c(v)}\int_v^\infty\frac{1}{r(u)}\int_u^\infty\int_a^b q(s,\xi)d\xi dsdudv=\infty,\tag{2.4}$$

则 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=\lim\limits_{t\to\infty}z(t)=0$.

证 设 $z(t)\in$ II, 则 $z(t)>0,z'(t)<0$, 故有 $\lim\limits_{t\to\infty}z(t)=l\geq0$. 我们断言 $l=0$. 事实上, 若 $l>0$, 则对任意 $\varepsilon>0$, 最终有 $l<z(t)<l+\varepsilon$, 取 $\varepsilon<\frac{l(1-p)}{p}$, 利用 (H_2) 和 (H_3), 有

$$\begin{aligned}x(t)&=z(t)-\int_a^b p(t,\xi)x[\tau(t,\xi)]d\xi\geq z(t)-\int_a^b p(t,\xi)z[\tau(t,\xi)]d\xi\\&>l-z[\tau(t,a)]\int_a^b p(t,\xi)d\xi>l-pz[\tau(t,a)]>l-p(l+\varepsilon)=k(l+\varepsilon)>kz(t)\end{aligned}$$

最终成立, 其中 $k=\frac{l-p(l+\varepsilon)}{l+\varepsilon}>0$.

利用 (H_4) 和 (1.1) 式, 产生

$$\begin{aligned}(r(t)(c(t)z'(t))')'&\leq-k\delta\int_a^b q(t,\xi)z[g(t,\xi)]d\xi\\&\leq-k\delta z[g(t,b)]\int_a^b q(t,\xi)d\xi=-k\delta q(t)z[g_1(t)],t\geq T,\end{aligned}$$

其中利用

$$z'(t) < 0, q(t) = \int_a^b q(t,\xi)d\xi, g_1(t) = g(t,b). \tag{2.5}$$

从 t 到 ∞ 对 (2.5) 式积分产生

$$r(t)(c(t)z'(t))' \geq \int_t^\infty k\delta q(s)z[g_1(s)]ds \geq k\delta l \int_t^\infty q(s)ds.$$

用 $r(t)$ 除上式, 从 t 到 ∞ 积分, 有

$$-c(t)z'(t) \geq k\delta l \int_t^\infty \frac{1}{r(u)} \int_u^\infty q(s)dsdu, t \geq T.$$

在上式中双边除 $c(t)$, 从 T 到 ∞ 积分, 得到

$$z(T) \geq k\delta l \int_T^\infty \frac{1}{c(v)} \int_v^\infty \frac{1}{r(u)} \int_u^\infty q(s)dsdudv, t \geq T.$$

此与条件 (2.4) 式矛盾, 故 $l = 0$, 因 $0 < x(t) \leq z(t)$, 则 $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$. 引理 3 证毕.

现在, 我们利用 Philos 型积分平均条件 [14] 给出方程 (1.1) 新的振动结果. 为此, 引进函数类 X.

令 $D_0 = \{(t,s) : t > s \geq t_0\}, D = \{(t,s) : t \geq s \geq t_0\}$. 函数 $H \in C(D,R)$ 称为属于 X, 如果

(i) $H(t,t) = 0, t \geq t_0, H(t,s) > 0, (t,s) \in D_0$;

(ii) H 在 D_0 上关于第二变量有连续非正偏导数, 且 $-\frac{\partial H(t,s)}{\partial s} = h(t,s)\sqrt{H(t,s)}, (t,s) \in D_0$.

定理 1 设 $(\mathrm{H}_1) - (\mathrm{H}_4)$ 和 (2.4) 式成立且存在 $\rho(t) \in C'([t_0,\infty], R^+)$ 和 $H \in X$, 使得

$$\lim_{t\to\infty}\sup \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^t H(t,s)[\delta(1-p)\rho(s)q(s) - \frac{\rho(s)c[g_2(s)]}{4R[g_2(s)][g_2'(s)]}Q^2(t,s)]ds = \infty, \tag{2.6}$$

其中 $g_2(t), q(t)$ 由 (2.3) 和 (2.5) 式定义,

$$Q(t,s) = \frac{h(t,s)}{\sqrt{H(t,s)}} - \frac{\rho'(s)}{\rho(s)}, \tag{2.7}$$

则方程 (1.1) 的每一解 $x(t)$ 振动或者收敛到零.

证 设 $x(t)$ 是方程 (1.1) 的非振动解, 不失一般, 设 $x(t)$ 最终为正, 则有 $x(t) > 0, t \geq t_1, x[\tau(t,\xi)] > 0, x[g(t,\xi)] > 0, (t,\xi) \in [t_1,\infty) \times [a,b]$. 当 $x(t)$ 最终为负时, 可以类似地处理. 令 $z(t)$ 由 (2.1) 式定义, 则利用引理 1 知 $z(t) \in$ Ⅰ或者 $z(t) \in$ Ⅱ.

首先, 设 $z(t) \in$ Ⅰ, 即 $z'(t) > 0, t \geq t_1$. 由 (H_3) 知, $\exists t_2 \geq t_1$ 使得 $\tau(t,\xi) > t_1, (t,\xi) \in [t_2,\infty) \times [a,b]$, 则当 $t > t_2$ 时, $z(\tau(t,\xi)) < z(t)$. 故有

$$x(t) = z(t) - \int_a^b P(t,\xi)x[\tau(t,\xi)]d\xi \geq z(t) - \int_a^b P(t,\xi)z[\tau(t,\xi)]d\xi \geq (1-p)z(t), t \geq t_2.$$

故由上式和 (H_4), (H_3) 和方程 (1.1) 产生

$$(r(t)(c(t)z'(t))')'+\delta(1-p)q(t)z[g_2(t)]\leq 0, t\geq t_2, \tag{2.8}$$

其中 $g_2(t)$ 和 $q(t)$ 分别由 (2.3) 和 (2.5) 式定义, 令

$$W(t)=\rho(t)\frac{r(t)(c(t)z'(t))'}{z[g_2(t)]}, t\geq t_2, \tag{2.9}$$

则由 (2.8) 式和引理 2, 有

$$W'(t)\leq -\delta(1-p)\rho(t)q(t)+\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}W(t)-\frac{R[g_2(t)]g_2'(t)}{\rho(t)c[g_2(t)]}W^2(t). \tag{2.10}$$

作 Riccati 变换 $A_1(s)=\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}, A_2(s)=\frac{R[g_2(s)]g_2'(s)}{\rho(s)c[g_2(t)]}$. 则从 (2.10) 式得到

$$\begin{aligned}
& \int_{t_2}^{t} H(t,s)\delta(1-p)\rho(s)q(s)ds \\
\leq\ & \int_{t_2}^{t} H(t,s)[-W'(s)+A_1(s)W(s)-A_2(s)W^2(s)]ds \\
=\ & -H(t,s)W(s)\mid_{t_2}^{t}+\int_{t_2}^{t}\{\frac{\partial H(t,s)}{\partial s}W(s)+H(t,s)[A_1(s)W(s)-A_2(s)W^2(s)]\}ds \\
=\ & H(t,t_2)W(t_2)-\int_{t_2}^{t}[\sqrt{H(t,s)}(h(t,s)-\sqrt{H(t,s)}A_1(s))W(s)+H(t,s)A_2(s)W^2(s)]ds \\
=\ & H(t,t_2)W(t_2)-\int_{t_2}^{t}[\sqrt{H(t,s)A_2(s)}W(s)+\frac{1}{2}\frac{Q_1(t,s)}{\sqrt{A_2(s)}}]^2ds+\int_{t_2}^{t}\frac{Q_1^2(t,s)}{4A_2(s)}ds,
\end{aligned} \tag{2.11}$$

其中

$$Q_1(t,s)=h(t,s)-\sqrt{H(t,s)}A_1(s). \tag{2.12}$$

因此 $\frac{1}{H(t,t_2)}\int_{t_2}^{t}[H(t,s)\delta(1-p)\rho(s)q(s)-\frac{Q_1^2(t,s)}{4A_2(s)}]ds\leq W(t_2)$.

此即

$$\frac{1}{H(t,t_2)}\int_{t_2}^{t}[H(t,s)\delta(1-p)\rho(s)q(s)-\frac{\rho(s)c[g_2(s)]}{4R[g_2(t)]g_2'(t)}Q^2(t,s)]ds\leq W(t_2). \tag{2.13}$$

上式与条件 (2.6) 矛盾. 其次, 若 $z(t)\in$ II, 注意到条件 (2.4) 成立, 故由引理 3 知 $x(t)$ 收敛到零. 定理 1 证毕.

推论 1 设定理 1 的条件 (2.6) 用下列条件代替

$$\lim_{t\to\infty}\sup\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t}H(t,s)\rho(s)q(s)ds=\infty, \tag{$2.6)_1$$$

$$\lim_{t\to\infty}\sup\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t}\frac{\rho(s)c[g_2(s)]}{R[g_2(s)]g_2'(s)}Q^2(t,s)ds<\infty. \tag{$2.6)_2$$$

其它条件不变, 则定理 1 的结论不变.

当定理 1 中的条件 (2.6) 不易验证时, 我们有下面的定理. 我们将使用定理 1 的符号和证明.

定理 2 设除 (2.6) 以外定理 1 的假设均成立, 又设

$$0<\inf_{s\geq t_0}[\liminf_{t\to\infty}\frac{H(t,s)}{H(t,t_0)}]\leq\infty \tag{2.14}$$

且

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t}\frac{Q^2(t,s)}{H(t,t_0)}ds<\infty. \tag{2.15}$$

令 $\phi(t)\in C([t_0,\infty),R)$ 使得

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t}\phi_+^2(s)A_2(s)ds<\infty, \tag{2.16}$$

其中 $\phi_+(t)=\max\{\phi(t),0\}$, 且

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t}(\delta(1-p)H(t,s)\rho(s)q(s)-\frac{Q_1^2(t,s)}{4A_2(s)})ds\geq\sup_{t\geq t_0}\phi(t), \tag{2.17}$$

则方程 (1.1) 的每一个解振动或者收敛到零.

证 设 $x(t)$ 是 (1.1) 的最终正解, $z(t)$ 由 (2.1) 式定义, 首先, 设 $z(t)\in$ I, 则在定理 1 的证明中, 有 (2.11) 式成立, 即

$$\begin{aligned}&\int_{t_2}^{t}H(t,s)\delta(1-p)\rho(s)q(s)ds\\ \leq\ &H(t,t_2)W(t_2)-\int_{t_2}^{t}[\sqrt{H(t,s)A_2(s)}W(s)+\frac{1}{2}\frac{Q_1(t,s)}{\sqrt{A_2(s)}}]^2ds+\int_{t_2}^{t}\frac{Q_1^2(t,s)}{4A_2(s)}ds.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_2)}\int_{t_2}^{t}[\delta(1-p)H(t,s)\rho(s)q(s)-\frac{Q_1^2(t,s)}{4A_2(s)}]ds\\ \leq\ &W(t_2)-\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_2)}\int_{t_2}^{t}[\sqrt{H(t,s)A_2(s)}W(s)+\frac{1}{2}\frac{Q_1(t,s)}{\sqrt{A_2(s)}}]^2ds.\end{aligned}$$

利用 (2.17) 式, 上式产生

$$W(t_2)\geq\phi(t_2)+\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_2)}\int_{t_2}^{t}[\sqrt{H(t,s)A_2(s)}W(s)+\frac{1}{2}\frac{Q_1(t,s)}{\sqrt{A_2(s)}}]^2ds.$$

故有

$$0\leq\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_2)}\int_{t_2}^{t}[\sqrt{H(t,s)A_2(s)}W(s)+\frac{1}{2}\frac{Q_1(t,s)}{\sqrt{A_2(s)}}]^2ds<\infty. \tag{2.18}$$

定义函数

$$\alpha(t) = \frac{1}{H(t,t_1)}\int_{t_1}^{t} H(t,s)A_2(s)W^2(s)ds,$$
$$\beta(t) = \frac{1}{H(t,t_1)}\int_{t_1}^{t} \sqrt{H(t,s)}Q_1(t,s)W(s)ds,$$

则由 (2.18) 式知

$$\lim_{t\to\infty}\inf[\alpha(t)+\beta(t)] < \infty.$$

我们断言

$$\int_{t_1}^{\infty} A_2(t,s)W^2(s)ds < \infty. \tag{2.19}$$

否则, 如果相反, 则有

$$\int_{t_1}^{\infty} A_2(t,s)W^2(s)ds = \infty. \tag{2.20}$$

利用条件 (2.14), 存在 $\eta > 0$, 使得

$$\inf_{s\ge t_0}[\lim_{t\to\infty}\inf\frac{H(t,s)}{H(t,t_0)}] > \eta. \tag{2.21}$$

令 μ 是任意正数, 则由 (2.20) 式知存在 $t_2 \ge t_1$, 使得 $\int_{t_1}^{t} A_2(t,s)W^2(s)ds > \frac{\mu}{\eta}, t \ge t_2$. 因此对 $t \ge t_2$, 有

$$\begin{aligned}
\alpha(t) &= \frac{1}{H(t,t_1)}\int_{t_1}^{t} H(t,s)\frac{d}{ds}[\int_{t_1}^{s} A_2(u)W^2(u)du] \\
&= \frac{1}{H(t,t_1)}\int_{t_1}^{t} -\frac{\partial H(t,s)}{\partial s}[\int_{t_1}^{s} A_2(u)W^2(u)du]ds \\
&\ge \frac{1}{H(t,t_1)}\int_{t_2}^{t} -\frac{\partial H(t,s)}{\partial s}[\int_{t_1}^{s} A_2(u)W^2(u)du]ds \\
&\ge \frac{\mu}{\eta}\frac{1}{H(t,t_1)}\int_{t_2}^{t} -\frac{\partial H(t,s)}{\partial s}ds = \frac{\mu}{\eta}\frac{H(t,t_2)}{H(t,t_1)}.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

此时, 由于函数类 X 的函数 H 在 D_0 上, 关于第二个变量有连续非正偏导数, 故函数 H 关于第二个变量是减函数. 利用 (2.21) 式, 存在 $t_3 \ge t_2$, 使得

$$\frac{H(t,t_2)}{H(t,t_1)} \ge \frac{H(t,t_2)}{H(t,t_0)} \ge \mu, t \ge t \ge t_3. \tag{2.23}$$

联合 (2.22), (2.23) 式, 我们得到 $\alpha(t) \ge \mu, t \ge t_3$. 因 μ 是任意的, 有

$$\lim_{t\to\infty}\alpha(t) = \infty. \tag{2.24}$$

这一情况的证明的剩余部分是类似于文 [11] 和 [13] 中的定理 2. 因此, 我们省略.

其次, 设 $z(t) \in \text{II}$, 注意到条件 (2.4) 成立, 则由引理 3 知 $x(t)$ 收敛到零. 定理 2 证毕.

定理 3 设定理 2 的全部条件成立, 除了将条件 (2.15) 改为

$$\lim_{t\to\infty}\sup\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t}H(t,s)p(s)q(s)ds<\infty, \tag{2.25}$$

则方程 (1.1) 的每一个振动或者收敛到零.

证 定理 3 的证明类似于定理 2 的证明. 因此, 我们省略.

下面的例子说明我们结果的应用.

例 考虑三阶中立型分布时滞微分方程

$$(\frac{1}{(t+1)^\alpha}[x(t)+\int_{-1}^{0}(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}e^{-2t}+\xi)x(t+\frac{\xi}{2})d\xi]')''+\int_{-1}^{0}e^{t+\xi}[2+sinx(t+\xi)]x(t+\xi)d\xi=0,t>1. \tag{2.26}$$

此时

$$\begin{aligned}&r(t)=1,c(t)=\frac{1}{(t+1)^\alpha},p(t,\xi)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}e^{-2t}+\xi,\\&\int_{-1}^{0}p(t,\xi)d\xi\le\frac{1}{3}<1,q(t,\xi)=e^{t+2\xi}\ge 0,q(t)=\int_{-1}^{0}q(t,\xi)d\xi=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{e^2})e^t,\\&\tau(t,\xi)=t+\frac{\xi}{2}\le t,g(t,\xi)=t+\xi\le t,\xi\in[-1,0],f(u)=[2+\sin u]u\ge u,\delta=1,\end{aligned}$$

则对于任意 $t\ge 1$, 有

$$\int_1^\infty\frac{1}{r(t)}ds=\int_1^\infty\frac{1}{c(t)}ds=\infty,R(t)=\int_1^t\frac{1}{r(t)}ds=t-1,\int_1^\infty q(s)ds=\infty.$$

因此, (H_1)–(H_4) 和 (2.4) 式成立. 为应用推论 1, 剩下只需验证条件 $(2.6)_1$ 和 $(2.6)_2$ 满足即可. 我们取 $H(t,s)=(t-s)^2,\rho(t)=1,t\ge s\ge 1$, 有

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to\infty}\sup\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t}H(t,s)\rho(s)q(s)ds\ge\lim_{t\to\infty}\sup\frac{1}{t^2}\int_1^t(t-s)^2\frac{1}{2}(1-\frac{1}{e^2})e^sds=\infty,\\&\lim_{t\to\infty}\sup\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t}\frac{\rho(s)c[g_2(s)]}{R[g_2(s)]g_2'(s)}Q^2(t,s)ds\ge\lim_{t\to\infty}\sup\frac{1}{t^2}\int_1^t\frac{4}{(s-2)s^\alpha}ds<\infty.\end{aligned}$$

故 $(2.6)_1$ 和 $(2.6)_2$ 满足, 由推论 1 知方程 (2.26) 的每一解振动或者收敛到零.

注 1 文 [10] 中的定理 1–3 是本文相应结果中, 当 $p(t,\xi)\equiv 0,q(t,\xi)\equiv q(t),g(t,\xi)=t-\sigma,[a,b]=[-1,0]$ 时的特例.

注 2 本文的定理 1–3 是三阶中立型方程 (1.1) 的 Philos 型振动定理, 它们将文 [13] 关于二阶三阶中立型方程的振动结果推广到相应的三阶方程.

注 3 参考文献中的振动结果均不能适用本文例子.

参 考 文 献

[1] Agarwal R P, Grace S R, O’ Regan D. Oscition theory for difference and functional differential equations [M]. Dordeecht: Kluwer, 2000.

[2] Agarwal R P, Grace S R, O' Regan D. Oscition theory for second order dynamic equations [M]. Lonlon: Taylor & Francis, 2003.
[3] Aktas M F, Tiryki A, Zafer A. Oscillation criteria for third order nonlinear functional differential equations [J]. Appl. Math, Letters, 2010, 23: 756–762.
[4] Dzurina J, Kotorova R. Properties of the third order trinomial differential equations with delay argument[J]. Nonlinear Analysis, 2009, 71: 1995–2002.
[5] Dzurina J, Kotorova R. Comparison theorems for the third order trinomial differential equations with delay argument[J]. Czech. Math. J., 2009, 59: 353–370.
[6] Grace S R, Agarwal R P, Pavani R et al. On the oscillation of certain third order nonlinear functional differential equations [J]. Appl. Math., Comput., 2008, 202: 102–112.
[7] Grace S R, Agarwal R P, Aktas M F. On the oscillation of third order functional differential equations [J]. Indian J. Pure Appl. Math., 2008, 39: 491–507.
[8] Parhi N, Parhi S. Asymptotic behavial of solntions of third order delay differential equations [J]. Indian J. Pure Appl. Math., 2002, 33: 1609–1620.
[9] Pablo Figureoa, Manuel Pinto. Riaccti equations and nonoscillatory solutions of third order differential equations [J]. Dynamic Systems and Appl., 2008, 17: 459–476.
[10] Saker S H. Oscition criteria for third order nonlinear delay differential equations [J]. Math. Slovaca, 2006, 56: 433–450.
[11] Tiryaki A, Yaman S. Asymptotic behavior of a class of nonlinear functional differential equations of third order [J]. Appl. Math, Letters, 2001, 14: 327–332.
[12] Tiryaki A, Aktas M F. Oscillation criera of a certain class of third order nonlinear delay differential equations [J]. J. Math. Anal. Appl., 2007, 325: 54–68.
[13] Wang P G. Oscillation criteria for second order neutral equations with distribnted argnments[J]. Comput. Math. Appl., 2004, 47: 1935–1946.
[14] Philos CH G. Oscillation theorems for linear differential equations of second order[J]. Arch. Math., 1989, 53: 482–492.
[15] Schot S H Jerk. The time rate of change of acceleratim[J]. Amer. J. Phys., 1978, 46: 1090–1094.

OSCILLATION THEOREMS FOR ANOTHER THIRD ORDER NEUTRAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DISTRIBUTED DELAYS

ZHAO Lin-long [1], YU Yuan-hong [2]

(*1. Institute of Mathematics and Applied Mathematics, Ankang University, Ankang 725000, China*)

(*2.Academy of Mathematics & System Sciences, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China*)

Abstract: In this paper, we study the vibration problem of third order neutral differential equations with distributed delays. By using Riccati transform technique and integral averaging method, we obtain a criterion for equations with all solutions oscillating or converging to zero. An example is given to illustrate the application of the example.

Keywords: third order; neutral differential equations; distributed delay; Riccati transformation; integral averaging; oscillation

2010 MR Subject Classification: 34K11; 34C10