

关于可数点集的盒维数的一些探讨

吴 栩

(华南理工大学工商管理学院, 广东 广州 510640)

摘 要: 本文研究了一类可数点集的盒维数的计算问题. 通过构造双 Lipschitz 映射, 把原可数点集的盒维数的求解问题转化为求解一类相对简单的可数点集的盒维数. 获得了两个单调的可数点集在具有同阶间隔时具有相同的上盒维数和下盒维数的结论. 该结论为计算一类可数点集的盒维数提供了方便.

关键词: 盒维数; 可数点集; 单调

MR(2010) 主题分类号: 28A80

中图分类号: O174.11

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2014)05-0941-06

1 引言

盒维数或称计盒维数 (Box dimension 或 Box-counting) 是应用最广泛的维数之一, 它的普遍应用主要是由于这种维数的数学计算及经验估计相对容易一些. 这种简单仅仅是相对而言. 事实上, 要精确的计算盒维数并非是一件轻而易举的事情.

盒维数的研究可以追溯到 20 世纪 30 年代, 且有 Kolmogorov 熵维数、容度维数、度量维数、信息维数、对数密度、Minkowski 维数等众多称呼^[1,2]. 近年来, 一些学者对盒维数进行了卓有成效的研究. Feng 等^[3]指出上盒维数具有介值性, 并用此研究了有些集合的子集的盒维数. 王爱芹、夏家荣^[4]利用数项级数来分析点集的盒维数, 为盒维数的计算提供了一种新的方法. 王炳雪等^[5]提出了利用不同间隔时间内寻求最大离差的算法. 该算法避免了采用网格法计算盒维数时集合计数的问题, 有一定的可行性和优越性. 这些研究仅从集合自身出发来探讨其盒维数. 然而, 利用与之有某种关系的集合的盒维数来计数盒维数也是一种重要的思路, 这在现有文献中尚是空白. 基于此, 本文探讨了满足一定条件的可数点集的盒维数关系问题, 以期能为计算一些可数点集的盒维数带来方便.

定义 1 设 F 是 R^n 上任意非空的有界子集, $N_\delta(F)$ 是直径最大为 δ , 可以覆盖 F 的集合的最少个数, 则将下盒维数和上盒维数分别定义为 $\underline{\dim}_B F = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta}$ 和 $\overline{\dim}_B F = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta}$. 如果这两个值相等, 则称这共同的值为 F 的计盒维数, 记为

$$\dim_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta}.$$

*收稿日期: 2012-12-14

接收日期: 2013-06-03

基金项目: 国家社会科学青年基金资助 (12CJY006); 教育部人文社科规划基金资助 (10YJA630131); 中央高校基本科研业务费专项资金 (x2jimd2118850).

作者简介: 吴栩 (1986-), 男, 四川巴中, 博士, 主要研究方向: 证券投资分析与分形市场分析.

定理 1 若 $F_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$, $F_2 = \{b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\}$ 有界, 数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 自某一项 N_0 开始严格单调, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}} = 1$. 则

$$\underline{\dim}_B F_1 = \underline{\dim}_B F_2, \quad \overline{\dim}_B F_1 = \overline{\dim}_B F_2.$$

证 不妨设 $N_0 = 1$. 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}} = 1$ 知 $\exists N \in \mathbb{N}$, 对 $\forall n \geq N$ 有

$$0 < \frac{1}{2} < \frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}} < \frac{3}{2}. \quad (1.1)$$

因为数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 严格单调, 且容易知道, 数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 一个严格单调递减, 一个严格单调递增情形不可能成立. 故

情形 1 若数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 同时单调递减, 则由 (1.1) 式有

$$\frac{1}{2}(b_n - b_{n+1}) < a_n - a_{n+1} < \frac{3}{2}(b_n - b_{n+1}). \quad (1.2)$$

情形 2 若数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 同时单调递增, 则由 (1.1) 式有

$$\frac{1}{2}(b_n - b_{n+1}) > a_n - a_{n+1} > \frac{3}{2}(b_n - b_{n+1}). \quad (1.3)$$

如果数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 同时单调递减, 则对 $\forall n_2 > n_1 \geq N$, 由 (1.2) 式有

$$\frac{1}{2}(b_{n_1} - b_{n_2}) < a_{n_1} - a_{n_2} < \frac{3}{2}(b_{n_1} - b_{n_2}). \quad (1.4)$$

如果数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 同时单调递增, 则对 $\forall n_2 > n_1 \geq N$, 由 (1.3) 式有

$$\frac{1}{2}(b_{n_1} - b_{n_2}) > a_{n_1} - a_{n_2} > \frac{3}{2}(b_{n_1} - b_{n_2}). \quad (1.5)$$

从而对 $\forall n_2 > n_1 \geq N$, 总有

$$\frac{1}{2}|b_{n_1} - b_{n_2}| < |a_{n_1} - a_{n_2}| < \frac{3}{2}|b_{n_1} - b_{n_2}|. \quad (1.6)$$

记 $F_3 = \{a_N, a_{N+1}, \dots\} \subset F_1$, $F_4 = \{b_N, b_{N+1}, \dots\} \subset F_2$. 定义映射 $f: F_4 \rightarrow F_3$ 为 $f(b_m) = a_m$, $\forall m \geq N$. 那么对 $\forall m_2 > m_1 \geq N$, 由 (1.6) 式有

$$\frac{1}{2}|b_{m_1} - b_{m_2}| < |f(b_{m_1}) - f(b_{m_2})| < \frac{3}{2}|b_{m_1} - b_{m_2}|. \quad (1.7)$$

故 f 为从 F_4 到 F_3 的双 Lipschitz 映射.

又因为 $\underline{\dim}_B$ 和 $\overline{\dim}_B$ 是双 Lipschitz 不变的^[1], 从而有

$$\underline{\dim}_B F_3 = \underline{\dim}_B F_4, \quad \overline{\dim}_B F_3 = \overline{\dim}_B F_4. \quad (1.8)$$

由 $\underline{\dim}_B F_1 = \underline{\dim}_B F_3$, $\overline{\dim}_B F_1 = \overline{\dim}_B F_3$, $\overline{\dim}_B F_2 = \overline{\dim}_B F_4$, $\underline{\dim}_B F_4 = \underline{\dim}_B F_2$, 可知 $\underline{\dim}_B F_1 = \underline{\dim}_B F_2$, $\overline{\dim}_B F_1 = \overline{\dim}_B F_2$. 至此, 定理证毕.

该定理表明, 具有同阶间隔的两个严格单调数列具有相同的上、下盒维数. 因此, 欲求某个集合的盒维数, 可以通过构造一个与其具有同阶间隔的可数点集来求之. 如下推论 1 就是很好的一例.

推论 1 $F = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$, 数列 $\{a_n\}$ 单调递减趋于 0, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n+1}}{\frac{1}{n^\alpha}} = 1$, 则 $\dim_B F = \frac{1}{\alpha}$.

证 易知 $\alpha > 1$. 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}}}{\frac{1}{n^\alpha}} = 1. \quad (1.9)$$

由 (1.9) 式和 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n+1}}{\frac{1}{n^\alpha}} = 1$ 可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}}}{a_n - a_{n+1}} = 1. \quad (1.10)$$

记 $F_1 = \{\frac{1}{\alpha-1}, \frac{1}{(\alpha-1)2^{\alpha-1}}, \dots, \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}, \dots\}$. 由定理 1 知

$$\underline{\dim}_B F_1 = \underline{\dim}_B F, \overline{\dim}_B F_1 = \overline{\dim}_B F. \quad (1.11)$$

又因为

$$\dim_B F_1 = \underline{\dim}_B F_1 = \overline{\dim}_B F_1 = \frac{1}{\alpha}, \quad (1.12)$$

由 (1.11) 和 (1.12) 式可得

$$\dim_B F = \frac{1}{\alpha}. \quad (1.13)$$

证毕.

定理 1 的条件可以放松为:

推论 2 $F_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$, $F_2 = \{b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\}$ 有界, 数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 自某一项 N_0 开始严格单调, 且 $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}} > c_1 > 0$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}} < c_2 < +\infty$, c_1 和 c_2 为常数. 则 $\underline{\dim}_B F_1 = \underline{\dim}_B F_2$, $\overline{\dim}_B F_1 = \overline{\dim}_B F_2$.

证 由 $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}} < c_2 < +\infty$ 可知, $\exists N_1$, 对 $\forall n \geq N_1$ 有

$$\frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}} \leq c_2. \quad (1.14)$$

由 $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}} > c_1 > 0$ 可知, $\exists N_2$, 对 $\forall n \geq N_2$ 有

$$\frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}} \geq c_1. \quad (1.15)$$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 由 (1.14) 和 (1.15) 式知, 对 $\forall n \geq N$ 有

$$0 < c_1 \leq \frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}} \leq c_2 < \infty. \quad (1.16)$$

因为数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 自某一项 N_0 开始严格单调, 由 (1.16) 式, 类似定理 1 的证明方法, 即证该结论.

注 1 若 $F_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$, $F_2 = \{b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\}$ 有界, 数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 严格单调, 且 $\underline{\dim}_B F_1 = \underline{\dim}_B F_2$, $\overline{\dim}_B F_1 = \overline{\dim}_B F_2$. 但不一定能够保证存在常数 $c_2 < \infty$, 使得 $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}} \leq c_2 < \infty$ 成立. 反例如下:

令 $F_1 = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$, $F_2 = \{\frac{1}{2 \ln 2}, \frac{1}{2 \ln 3}, \dots, \frac{1}{n \ln n}, \dots\}$. 不难得知

$$\dim_B F_1 = \underline{\dim}_B F_1 = \overline{\dim}_B F_1 = \frac{1}{2}.$$

下证 $\dim_B F_2 = \underline{\dim}_B F_2 = \overline{\dim}_B F_2 = \frac{1}{2}$.

(1) 可证 $\{\frac{1}{n \ln n} - \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)}\}_{n=2}^\infty$ 单调递减. 即要证对 $\forall n \geq 2$, 有

$$\frac{1}{n \ln n} - \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)} \geq \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)} - \frac{1}{(n+2) \ln(n+2)}. \quad (1.17)$$

令 $f(x) = \frac{1}{n \ln n} - \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)} (x \geq 2)$, 则

$$f'(x) = -\frac{1 + \ln x}{(x \ln x)^2} + \frac{1 + \ln(x+1)}{[(x+1) \ln(x+1)]^2}. \quad (1.18)$$

令 $g(x) = \frac{1 + \ln x}{(x \ln x)^2}$, 则 $g'(x) = -\frac{3}{x^3 (\ln x)^2} - \frac{2}{(x \ln x)^3} - \frac{1}{x^3 \ln x} < 0$, 故 $g(x)$ 单调递减. 从而 $f'(x) < 0$, 故式 (1.17) 式成立, 即 $\{\frac{1}{n \ln n} - \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)}\}_{n=2}^\infty$ 单调递减.

(2) $\underline{\dim}_B F_2 \geq \frac{1}{2}$. 设 $0 < \delta < \frac{1}{2}$, 而 k 为满足

$$\frac{1}{(k-1) \ln(k-1)} - \frac{1}{k \ln k} > \delta \geq \frac{1}{k \ln k} - \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)}$$

的整数, 如果集合 U 满足 $|U| \leq \delta$, 由 $\frac{1}{(k-1) \ln(k-1)} - \frac{1}{k \ln k} > \delta$ 及 (1.17) 式可知, U 最多能覆盖 $\{\frac{1}{2 \ln 2}, \frac{1}{3 \ln 3}, \dots, \frac{1}{k \ln k}\}$ 中的一个点, 因此覆盖 F_2 最少需要直径为 δ 的集 $(k-1)$ 个, 即 $N_\delta(F_2) \geq k-1$, 所以

$$\frac{\ln N_\delta(F_2)}{-\ln \delta} \geq \frac{\ln(k-1)}{-\ln[\frac{(k+1) \ln(k+1) - k \ln k}{k(k+1) \ln k \ln(k+1)}]}. \quad (1.19)$$

又因为

$$\frac{1}{k \ln k} - \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \geq \frac{1}{k(k+1) \ln(k+1)}, \quad (1.20)$$

由 (1.19) 和 (1.20) 式知

$$\frac{\ln N_\delta(F_2)}{-\ln \delta} \geq \frac{\ln(k-1)}{\ln[k(k+1) \ln(k+1)]}. \quad (1.21)$$

令 $\delta \rightarrow \infty$, 则 $k \rightarrow \infty$, 对 (1.21) 式两边求上极限, 得

$$\underline{\dim}_B F_2 = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(F_2)}{-\ln \delta} \geq \frac{1}{2}. \quad (1.22)$$

(3) $\overline{\dim}_B F_2 \leq \frac{1}{2}$. 设 $0 < \delta < \frac{1}{2}$, 取 k 满足

$$\frac{1}{(k-1) \ln(k-1)} - \frac{1}{k \ln k} > \delta \geq \frac{1}{k \ln k} - \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)}$$

的整数.

记 $\text{int}(x)$ 为高斯函数, 即表示不超过 x 的最大整数. 则 $1 + \text{int}(\frac{(k+1)\ln(k+1)}{(k+1)\ln(k+1)-k\ln k})$ 个长度为 δ 的区间可覆盖 $[0, \frac{1}{k\ln k}]$, 留下 F_2 的 $(k-2)$ 个点总可以由另外 $(k-2)$ 个区间覆盖, 则

$$N_\delta(F_2) \leq k-1 + \text{int}(\frac{(k+1)\ln(k+1)}{(k+1)\ln(k+1)-k\ln k}),$$

从而

$$\frac{\ln N_\delta(F_2)}{-\ln \delta} \leq \frac{\ln[k-1 + \text{int}(\frac{(k+1)\ln(k+1)}{(k+1)\ln(k+1)-k\ln k})]}{-\ln[\frac{k\ln k - (k-1)\ln(k-1)}{k(k-1)\ln k \ln(k-1)}]}. \quad (1.23)$$

又因为对 $k > 2$, 有

$$\frac{1}{(k-1)\ln(k-1)} - \frac{1}{k\ln k} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}, \quad (1.24)$$

$$k-1 + \text{int}(\frac{(k+1)\ln(k+1)}{(k+1)\ln(k+1)-k\ln k}) \leq 2k, \quad (1.25)$$

由 (1.23)、(1.24) 和 (1.24) 式知

$$\frac{\ln N_\delta(F_2)}{-\ln \delta} \leq \frac{\ln 2k}{\ln k(k-1)}. \quad (1.26)$$

令 $\delta \rightarrow \infty$, 则 $k \rightarrow \infty$, 对 (1.26) 式两边求下极限, 得

$$\overline{\dim}_B F_2 = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta} \leq \frac{1}{2}. \quad (1.27)$$

由 (2) 和 (3) 可知, $\dim_B F_2 = \underline{\dim}_B F_2 = \overline{\dim}_B F_2 = \underline{\dim}_B F_1 = \overline{\dim}_B F_1 = \dim_B F_1 = \frac{1}{2}$. 但

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n\ln n} - \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}} = \infty. \quad (1.28)$$

由 (1.28) 式可知, 对任意常说 $c_2 < \infty$, $\liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n\ln n} - \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}} < c_2 < \infty$ 不成立.

注 1 表明, 两个可数点集具有同阶的间隔与具有相同上、下盒维数不等价.

利用两个点集具有同阶间隔来分析点集的盒维数为计盒维数的计算提供了新的视角, 但本文的研究仅仅是初步的尝试, 以下问题还需要继续讨论.

问题一 若 $F_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$, $F_2 = \{b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\}$ 有界, 数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 严格单调, 且 $\underline{\dim}_B F_1 = \underline{\dim}_B F_2$, $\overline{\dim}_B F_1 = \overline{\dim}_B F_2$. 则对任意满足 $\infty > c_2 > c_1 > 0$ 的常数 c_1 和 c_2 , $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}} > c_1 > 0$ 和 $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}} < c_2 < \infty$ 能否同时不成立?

问题二 若 $F_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$, $F_2 = \{b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\}$ 有界, 且对满足 $\infty > c_2 > c_1 > 0$ 的常数有 $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}} > c_1 > 0$ 和 $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}} < c_2 < \infty$ 成立. 则 $\underline{\dim}_B F_1 = \underline{\dim}_B F_2$ 和 $\overline{\dim}_B F_1 = \overline{\dim}_B F_2$ 是否成立?

参 考 文 献

- [1] Falconer K. Fractal geometry: mathematical foundations and applications (2nd edition)[M]. Chichester: John Wiley & Sons, Inc. 2003.
- [2] 文志英. 分形几何的数学基础 [M]. 上海: 上海科技教育出版社, 2000.
- [3] Feng D J, Wen Z Y, Wu J. Some remarks on the box-counting dimensions[J]. Progress in Natural Science, 1999, 9(6): 409–415.
- [4] 王爱芹, 夏家荣. 点集的计盒维数一级数收敛 [J]. 哈尔滨师范大学学报 (自然科学版), 2002, 18(8): 16–19.
- [5] 王炳雪, 史忠科, 吴方向. 时间序列曲线盒维数的一种快速算法 [J]. 系统工程, 2000, 18(4): 68–72.

ON THE BOX-COUNTING OF COUNTABLE SETS

WU Xu

(School of Business Administration, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China)

Abstract: In this paper, we investigate a class of countable sets' Box-counting computation. By constructing double Lipschitz map, we transform the solution of the original countable sets' Box-counting problem into the solution of a class of simpler countable sets' Box-counting problem. Finally, it is obtained that a couple of monotonous countable sets have identical up Box-counting and down Box-counting when their interval orders are the same. The conclusion provides great convenience for computing a class of countable sets' Box-counting.

Keywords: box-counting; countable set; monotone

2010 MR Subject Classification: 28A80