

一类 3×3 上三角算子矩阵的点谱和剩余谱

王玉红^{1,2}, 侯国林¹, 阿拉坦仓¹

(1. 内蒙古大学数学科学学院, 内蒙古 呼和浩特 010021)

(2. 赤峰学院数学学院, 内蒙古 赤峰 024000)

摘 要: 本文完全描述了一类 3×3 上三角算子矩阵的点谱和剩余谱, 并将剩余谱表示为一些互不相交子集合的并集, 在 $l^2 \times l^2 \times l^2$ 中构造了具体例子说明该算子的剩余谱可能非空, 从而验证了所得结果的有效性.

关键词: Hilbert 空间; 上三角算子矩阵; 点谱; 剩余谱

MR(2010) 主题分类号: 47A10; 15A24

中图分类号: O175.3

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2014)05-0931-10

1 引言

算子矩阵的谱问题是近年来线性算子理论中较为活跃的研究课题之一, 许多学者对其进行过研究, 参见文献 [1-4] 及其所引文献. 我们知道, 如果 M 是 Hilbert 空间 X 上线性算子 T 的不变子空间, 在空间分解 $X = M \oplus M^\perp$ 下, 线性算子 T 有如下上三角矩阵表示:

$$T = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} : M \oplus M^\perp \rightarrow M \oplus M^\perp.$$

国内外许多学者对 2×2 上三角算子矩阵的补问题和 Weyl 定理进行了研究, 取得了丰硕的研究成果 [5-8]. 近来, 3×3 算子矩阵的扰动问题引起了一些学者的兴趣, 文献 [9] 通过对角元的信息给出了所有以这些算子为对角元的算子矩阵的 Weyl 型定理, 文献 [10] 则给出了对角元给定的所有 3×3 算子矩阵的可能点谱、可能剩余谱、可能连续谱和可能谱的刻画. 文献 [11] 研究了一类 3×3 算子矩阵的本质谱. 我们考虑 3×3 上三角算子矩阵的点谱和剩余谱, 推广了文献 [12] 的结论, 给出了一类无界 3×3 上三角算子矩阵点谱和剩余谱的完全描述, 并且在 $l^2 \times l^2 \times l^2$ 中构造了一些剩余谱非空的上三角算子矩阵实例, 为进一步研究 3×3 上三角算子矩阵的谱理论提供了重要事实.

2 预备知识

除非特别说明, 本文始终用 X 表示 Hilbert 空间. 为了简洁, X 和乘积空间 $X \times X \times X$ 中的单位算子均用 I 表示. 若 A 是 Hilbert 空间中的线性算子, 我们用 $D(A)$ 、 $R(A)$ 和 A^* 分别

*收稿日期: 2012-09-07

接收日期: 2013-02-22

基金项目: 国家自然科学基金 (11371185; 11361034); 内蒙古自然科学基金 (2012MS0105) 资助.

作者简介: 王玉红 (1978-), 女, 内蒙古赤峰市, 讲师, 主要研究方向: 算子矩阵及其应用.

通讯作者: 侯国林

表示 A 的定义域、值域和共轭算子; $N(A)$ 表示 A 的零空间, 即 $N(A) = \{x \in D(A) | Ax = 0\}$. W^c 表示集合 W 相对于复数域 $\mathbb{C}$ 的补集, $\emptyset$ 表示空集.

定义 2.1 若 W_1 和 W_2 为 X 的子集, 则 $W_1 + W_2$ 定义为

$$W_1 + W_2 = \{x + y \in X | x \in W_1, y \in W_2\},$$

若 W_1, W_2 中有一个为 $\emptyset$, 约定 $W_1 + W_2 = \emptyset$.

定义 2.2 ^[13] X 中的线性算子 T 的谱 $\sigma(T)$ 可分为三个互不相交的集合的并集, 即

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_r(T) \cup \sigma_c(T),$$

其中

1) 称 λ 为 T 的点谱, 如果 $\lambda I - T$ 不是单射. 点谱的全体记为 $\sigma_p(T)$, 即

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ 不是单射}\};$$

2) 称 λ 为 T 的剩余谱, 如果 $\lambda I - T$ 是单射并且 $\overline{R(\lambda I - T)} \neq X$. 剩余谱的全体记为 $\sigma_r(T)$, 即

$$\sigma_r(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ 是单射}, \overline{R(\lambda I - T)} \neq X\};$$

3) 称 λ 为 T 的连续谱, 如果 $\lambda I - T$ 是单射, $\overline{R(\lambda I - T)} = X$, 并且它的逆算子不连续. 连续谱的全体记为 $\sigma_c(T)$, 即

$$\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ 是单射}, \overline{R(\lambda I - T)} = X, \text{ 但 } (\lambda I - T)^{-1} \text{ 不连续}\}.$$

3 主要结果

定理 3.1 设 $H = \begin{pmatrix} A & E & F \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$ 是 Hilbert 空间 $X \times X \times X$ 中的稠定闭线性算子, $D(B) \subset D(E), D(C) \subset D(F)$, 则

$$\begin{aligned} \sigma_p(H) &= \{\lambda \in C : \lambda \in \sigma_p(A)\} \\ &\cup \{\lambda \in C : \lambda \in \sigma_p(B), R(E_1) \cap R(\lambda I - A) \neq \emptyset\} \\ &\cup \{\lambda \in C : \lambda \in \sigma_p(C), R(F_1) \cap R(\lambda I - A) \neq \emptyset\} \\ &\cup \{\lambda \in C : \lambda \in \sigma_p(B), \lambda \in \sigma_p(C), R(E_1) \cap R(\lambda I - A) = \emptyset, \\ &\quad R(F_1) \cap R(\lambda I - A) = \emptyset, R(\lambda I - A) \cap (R(E_1) + R(F_1)) \neq \emptyset\}, \end{aligned}$$

其中 $E_1 = E|_{N(\lambda I - B) \setminus \{0\}}$ 是 E 在 $N(\lambda I - B) \setminus \{0\}$ 的限制, $F_1 = F|_{N(\lambda I - C) \setminus \{0\}}$ 是 F 在 $N(\lambda I - C) \setminus \{0\}$ 的限制.

证 由 $D(B) \subset D(E), D(C) \subset D(F)$, 可知 $D(H) = D(A) \times D(B) \times D(C)$. 为叙述简洁, 令

$$\begin{aligned} M &= \{\lambda \in C : \lambda \in \sigma_p(B), R(E_1) \cap R(\lambda I - A) \neq \emptyset\}, \\ N &= \{\lambda \in C : \lambda \in \sigma_p(C), R(F_1) \cap R(\lambda I - A) \neq \emptyset\}, \\ Q &= \{\lambda \in C : \lambda \in \sigma_p(B), \lambda \in \sigma_p(C), R(E_1) \cap R(\lambda I - A) = \emptyset, R(F_1) \cap R(\lambda I - A) = \emptyset, \\ &\quad R(\lambda I - A) \cap (R(E_1) + R(F_1)) \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

先证 $\sigma_p(A) \cup M \cup N \cup Q \subset \sigma_p(H)$. 若 $\lambda \in \sigma_p(A)$, 则存在 $x_0 \in D(A)$ 且 $x_0 \neq 0$, 有 $(\lambda I - A)x_0 = 0$. 从而

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in D(H) \text{ 且 } \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0,$$

满足如下的算子方程组

$$\begin{cases} (\lambda I - A)x - Ey - Fz = 0, \\ (\lambda I - B)y = 0, \\ (\lambda I - C)z = 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

故 $\lambda \in \sigma_p(H)$.

若 $\lambda \in M$, 则有 $\lambda \in \sigma_p(B)$, 从而 $N(\lambda I - B) \setminus \{0\} \neq \emptyset$, 又由 $R(E_1) \cap R(\lambda I - A) \neq \emptyset$, 则存在 $x_0 \in D(A)$ 和 $y_0 \in N(\lambda I - B) \setminus \{0\}$ 使得

$$E_1 y_0 = (\lambda I - A)x_0, \quad (3.2)$$

从而 $Ey_0 = (\lambda I - A)x_0$, 又由 $y_0 \in N(\lambda I - B) \setminus \{0\}$, 自然有 $y_0 \neq 0$ 且 $(\lambda I - B)y_0 = 0$, 从而对上面存在的 x_0, y_0 , 有 $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix} \in D(H)$ 且满足方程组 (3.1), 因此 $\lambda \in \sigma_p(H)$. 同理可证

$\lambda \in N$ 时, $\lambda \in \sigma_p(H)$.

若 $\lambda \in Q$, 则 $\lambda \in \sigma_p(B), \lambda \in \sigma_p(C)$, 从而 $N(\lambda I - B) \setminus \{0\} \neq \emptyset, N(\lambda I - C) \setminus \{0\} \neq \emptyset$, 又由 $R(\lambda I - A) \cap (R(E_1) + R(F_1)) \neq \emptyset$, 故存在 $x_0 \in D(A), y_0 \in N(\lambda I - B) \setminus \{0\}, z_0 \in N(\lambda I - C) \setminus \{0\}$, 使得

$$(\lambda I - A)x_0 = E_1 y_0 + F_1 z_0, \quad (3.3)$$

从而 $(\lambda I - A)x_0 - Ey_0 - Fz_0 = 0$, 又由 $y_0 \in N(\lambda I - B) \setminus \{0\}, z_0 \in N(\lambda I - C) \setminus \{0\}$, 自然有 $(\lambda I - B)y_0 = 0, (\lambda I - C)z_0 = 0$, 即 $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \in D(H)$ 且 $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \neq 0$ 满足方程组 (3.1), 即 $\lambda \in \sigma_p(H)$. 进而证明了 $\sigma_p(A) \cup M \cup N \cup Q \subset \sigma_p(H)$.

下面证明 $\sigma_p(H) \subset \sigma_p(A) \cup M \cup N \cup Q$. 对于任意 $\lambda \in \sigma_p(H)$, 存在

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \in D(H) \text{ 且 } \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \neq 0,$$

满足方程组 (3.1). 以下分四种情况讨论:

1) 若 $y_0 = 0, z_0 = 0$, 则必有 $x_0 \neq 0$, 此时方程 $(\lambda I - A)x_0 - Ey_0 - Fz_0 = 0$ 变为 $(\lambda I - A)x_0 = 0$, 这意味着 $\lambda \in \sigma_p(A)$.

2) 若 $y_0 = 0, z_0 \neq 0$, 则由 $(\lambda I - C)z_0 = 0$ 可得 $\lambda \in \sigma_p(C)$ 且 $z_0 \in N(\lambda I - C) \setminus \{0\}$, 此时方程组的第一个方程变为 $(\lambda I - A)x_0 - Fz_0 = 0$, 从而 $(\lambda I - A)x_0 = F_1 z_0$, 即

$$R(\lambda I - A) \cap R(F_1) \neq \emptyset,$$

故 $\lambda \in N$.

3) 若 $y_0 \neq 0, z_0 = 0$, 类似前面的证明可知 $\lambda \in \sigma_p(B)$ 且 $R(E_1) \cap R(\lambda I - A) \neq \emptyset$, 因此 $\lambda \in M$.

4) 若 $y_0 \neq 0, z_0 \neq 0$, 则 $\lambda \in \sigma_p(B)$, $\lambda \in \sigma_p(C)$, 并且有 $y_0 \in N(\lambda I - B) \setminus \{0\}$, $z_0 \in N(\lambda I - C) \setminus \{0\}$, 且 $(\lambda I - A)x_0 = E_1 y_0 + F_1 z_0$, 从而

$$R(\lambda I - A) \cap (R(E_1) + R(F_1)) \neq \emptyset.$$

若 $E_1 y_0 \in R(\lambda I - A)$ 或 $F_1 z_0 \in R(\lambda I - A)$, 则 $\lambda \in M \cap N$, 从而 $\lambda \in M \cup N$. 若 $E_1 y_0 \notin R(\lambda I - A)$ 且 $F_1 z_0 \notin R(\lambda I - A)$, 即 $R(\lambda I - A) \cap R(E_1) = \emptyset$, $R(\lambda I - A) \cap R(F_1) = \emptyset$, 此时 $\lambda \in Q$.

综上所述 $\lambda \in \sigma_p(H)$, 则 $\lambda \in \sigma_p(A) \cup M \cup N \cup Q$. 证毕.

注 3.1 定理 3.1 中的结论 $\sigma_p(H)$ 可描述为七个互不相交的集合之并:

$$\begin{aligned} \sigma_p(H) = & \{ \lambda \in C : \lambda \in \sigma_p(A), \lambda \notin \sigma_p(B), \lambda \notin \sigma_p(C) \} \\ & \cup \{ \lambda \in C : \lambda \in \sigma_p(A), \lambda \in \sigma_p(B), \lambda \notin \sigma_p(C), R(\lambda I - A) \cap R(E_1) \neq \emptyset \} \\ & \cup \{ \lambda \in C : \lambda \in \sigma_p(A), \lambda \notin \sigma_p(B), \lambda \in \sigma_p(C), R(\lambda I - A) \cap R(F_1) \neq \emptyset \} \\ & \cup \{ \lambda \in C : \lambda \in \sigma_p(A), \lambda \in \sigma_p(B), \lambda \in \sigma_p(C), R(\lambda I - A) \cap (R(E_1) + R(F_1)) \neq \emptyset \} \\ & \cup \{ \lambda \in C : \lambda \notin \sigma_p(A), \lambda \in \sigma_p(B), \lambda \notin \sigma_p(C), R(\lambda I - A) \cap R(E_1) \neq \emptyset \} \\ & \cup \{ \lambda \in C : \lambda \notin \sigma_p(A), \lambda \notin \sigma_p(B), \lambda \in \sigma_p(C), R(\lambda I - A) \cap R(F_1) \neq \emptyset \} \\ & \cup \{ \lambda \in C : \lambda \notin \sigma_p(A), \lambda \in \sigma_p(B), \lambda \in \sigma_p(C), R(\lambda I - A) \cap (R(E_1) + R(F_1)) \neq \emptyset \}. \end{aligned}$$

由定理 3.1 证明中的 (3.2) 和 (3.3) 两式可看出, 若去掉定理 3.1 中条件 $D(B) \subset D(E), D(C) \subset D(F)$, 有如下结论:

推论 3.1 设 X 是 Hilbert 空间, $H = \begin{pmatrix} A & E & F \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$ 是 $X \times X \times X$ 中的稠定闭线性算子, $D(H) = D(A) \times (D(E) \cap D(B)) \times (D(F) \cap D(C))$, 则

$$\begin{aligned} \sigma_p(H) = & \{ \lambda \in C : \lambda \in \sigma_p(A) \} \\ & \cup \{ \lambda \in C : \lambda \in \sigma_p(B), R(E_2) \cap R(\lambda I - A) \neq \emptyset \} \\ & \cup \{ \lambda \in C : \lambda \in \sigma_p(C), R(F_2) \cap R(\lambda I - A) \neq \emptyset \} \\ & \cup \{ \lambda \in C : \lambda \in \sigma_p(B), \lambda \in \sigma_p(C), R(E_2) \cap R(\lambda I - A) = \emptyset, \\ & R(F_2) \cap R(\lambda I - A) = \emptyset, R(\lambda I - A) \cap (R(E_2) + R(F_2)) \neq \emptyset \}, \end{aligned}$$

其中 $E_2 = E|_{(N(\lambda I - B) \cap D(E)) \setminus \{0\}}$ 是 E 在 $(N(\lambda I - B) \cap D(E)) \setminus \{0\}$ 的限制,

$$F_2 = F|_{(N(\lambda I - C) \cap D(F)) \setminus \{0\}}$$

是 F 在 $(N(\lambda I - C) \cap D(F)) \setminus \{0\}$ 的限制.

定理 3.2 设 X 是 Hilbert 空间, $H = \begin{pmatrix} A & E & F \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$ 是 $X \times X \times X$ 中的稠定闭线性算子, $D(B) \subset D(E), D(C) \subset D(F)$, 则

$$\begin{aligned} \sigma_r(H) = & \{\lambda \in C : \lambda \bar{\in} \sigma_p(A), \lambda \bar{\in} \sigma_p(B), \lambda \bar{\in} \sigma_p(C), \overline{R(\lambda I - A) + R(E_3) + R(F_3)} \neq X\} \\ & \cup \{\lambda \in C : \lambda \bar{\in} \sigma_p(A), \lambda \bar{\in} \sigma_p(C), \lambda \in \sigma_r(B)\} \\ & \cup \{\lambda \in C : \lambda \bar{\in} \sigma_p(A), \lambda \bar{\in} \sigma_p(B), \lambda \in \sigma_r(C)\} \\ & \cup \{\lambda \in C : \lambda \bar{\in} \sigma_p(A), \lambda \bar{\in} \sigma_p(B), \lambda \in \sigma_p(C), \\ & \quad \overline{R(\lambda I - A) \cap R(F_1)} = \emptyset, \overline{R(\lambda I - A) + R(E_3) + R(F_3)} \neq X\} \\ & \cup \{\lambda \in C : \lambda \bar{\in} \sigma_p(A), \lambda \in \sigma_r(B), \lambda \in \sigma_p(C), \overline{R(\lambda I - A) \cap R(F_1)} = \emptyset\} \\ & \cup \{\lambda \in C : \lambda \bar{\in} \sigma_p(A), \lambda \bar{\in} \sigma_p(B), \lambda \in \sigma_p(C), \overline{R(\lambda I - A) \cap R(F_1)} = \emptyset, \overline{R(\lambda I - C)} \neq X\} \\ & \cup \{\lambda \in C : \lambda \bar{\in} \sigma_p(A), \lambda \in \sigma_p(B), \lambda \bar{\in} \sigma_p(C), \\ & \quad \overline{R(\lambda I - A) \cap R(E_1)} = \emptyset, \overline{R(\lambda I - A) + R(E_3) + R(F_3)} \neq X\} \\ & \cup \{\lambda \in C : \lambda \bar{\in} \sigma_p(A), \lambda \in \sigma_p(B), \lambda \bar{\in} \sigma_p(C), \\ & \quad \overline{R(\lambda I - A) \cap R(E_1)} = \emptyset, \overline{R(\lambda I - B)} \neq X\} \\ & \cup \{\lambda \in C : \lambda \bar{\in} \sigma_p(A), \lambda \in \sigma_p(B), \lambda \in \sigma_r(C), \overline{R(\lambda I - A) \cap R(E_1)} = \emptyset\} \\ & \cup \{\lambda \in C : \lambda \bar{\in} \sigma_p(A), \lambda \in \sigma_p(B), \lambda \in \sigma_p(C), \overline{R(\lambda I - A) \cap R(E_1)} = \emptyset, \\ & \quad \overline{R(\lambda I - A) \cap R(F_1)} = \emptyset, \overline{R(\lambda I - A) \cap (R(E_1) + R(F_1))} = \emptyset, \\ & \quad \overline{R(\lambda I - A) + R(E_3) + R(F_3)} \neq X\} \\ & \cup \{\lambda \in C : \lambda \bar{\in} \sigma_p(A), \lambda \in \sigma_p(B), \lambda \in \sigma_p(C), \overline{R(\lambda I - A) \cap R(E_1)} = \emptyset, \\ & \quad \overline{R(\lambda I - A) \cap R(F_1)} = \emptyset, \overline{R(\lambda I - A) \cap (R(E_1) + R(F_1))} = \emptyset, \overline{R(\lambda I - B)} \neq X\} \\ & \cup \{\lambda \in C : \lambda \bar{\in} \sigma_p(A), \lambda \in \sigma_p(B), \lambda \in \sigma_p(C), \overline{R(\lambda I - A) \cap R(E_1)} = \emptyset, \\ & \quad \overline{R(\lambda I - A) \cap R(F_1)} = \emptyset, \overline{R(\lambda I - A) \cap (R(E_1) + R(F_1))} = \emptyset, \overline{R(\lambda I - C)} \neq X\}, \end{aligned}$$

其中 $E_3 = E|_{D(B)}$ 是 E 在 $D(B)$ 的限制, $F_3 = F|_{D(C)}$ 是 F 在 $D(C)$ 的限制. E_1, F_1 同定理 3.1.

证 为简便计, 令

$$\begin{aligned} S_1 &= \{\lambda \in C : \lambda \bar{\in} \sigma_p(A), \lambda \bar{\in} \sigma_p(B), \lambda \bar{\in} \sigma_p(C)\}, \\ S_2 &= \{\lambda \in C : \lambda \bar{\in} \sigma_p(A), \lambda \bar{\in} \sigma_p(B), \lambda \in \sigma_p(C), \overline{R(\lambda I - A) \cap R(F_1)} = \emptyset\}, \\ S_3 &= \{\lambda \in C : \lambda \bar{\in} \sigma_p(A), \lambda \in \sigma_p(B), \lambda \bar{\in} \sigma_p(C), \overline{R(\lambda I - A) \cap R(E_1)} = \emptyset\}, \\ S_4 &= \{\lambda \in C : \lambda \bar{\in} \sigma_p(A), \lambda \in \sigma_p(B), \lambda \in \sigma_p(C), \overline{R(\lambda I - A) \cap R(E_1)} = \emptyset, \\ & \quad \overline{R(\lambda I - A) \cap R(F_1)} = \emptyset, \overline{R(\lambda I - A) \cap (R(E_1) + R(F_1))} = \emptyset\}. \end{aligned}$$

根据定理 3.1, 可知 $(\sigma_p(H))^c = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$. 注意到 $\overline{R(\lambda I - H)} \neq X \times X \times X$ 当且仅当

$$\overline{R(\lambda I - A) + R(E_3) + R(F_3)} \neq X, \text{ 或 } \overline{R(\lambda I - B)} \neq X, \text{ 或 } \overline{R(\lambda I - C)} \neq X.$$

令

$$M = \{\lambda \in C : \overline{R(\lambda I - A) + R(E_3) + R(F_3)} \neq X, \text{ 或 } \overline{R(\lambda I - B)} \neq X, \text{ 或 } \overline{R(\lambda I - C)} \neq X\}.$$

根据剩余谱的定义, 有

$$\lambda \in \sigma_r(H) \Leftrightarrow \lambda \in (\sigma_p(H))^c \cap M \Leftrightarrow \lambda \in (S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4) \cap M,$$

利用结合的运算律, 便证明了定理 3.2.

同推论 3.1, 若去掉定理 3.2 中关于定义域的限制条件 $D(B) \subset D(E), D(C) \subset D(F)$, 则有如下的结论:

推论 3.2 设 X 是 Hilbert 空间, $H = \begin{pmatrix} A & E & F \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$ 是 $X \times X \times X$ 中的稠定闭线性算子, $D(H) = D(A) \times (D(E) \cap D(B)) \times (D(F) \cap D(C))$, 则

$$\begin{aligned} \sigma_r(H) = & \{\lambda \in C : \lambda \bar{\in} \sigma_p(A), \lambda \bar{\in} \sigma_p(B), \lambda \bar{\in} \sigma_p(C), \overline{R(\lambda I - A) + R(E_4) + R(F_4)} \neq X\} \\ & \cup \{\lambda \in C : \lambda \bar{\in} \sigma_p(A), \lambda \bar{\in} \sigma_p(B), \lambda \bar{\in} \sigma_p(C), \overline{R(\lambda I - B_1)} \neq X\} \\ & \cup \{\lambda \in C : \lambda \bar{\in} \sigma_p(A), \lambda \bar{\in} \sigma_p(B), \lambda \bar{\in} \sigma_p(C), \overline{R(\lambda I - C_1)} \neq X\} \\ & \cup \{\lambda \in C : \lambda \bar{\in} \sigma_p(A), \lambda \bar{\in} \sigma_p(B), \lambda \in \sigma_p(C), \\ & \overline{R(\lambda I - A) \cap R(F_2)} = \emptyset, \overline{R(\lambda I - A) + R(E_4) + R(F_4)} \neq X\} \\ & \cup \{\lambda \in C : \lambda \bar{\in} \sigma_p(A), \lambda \bar{\in} \sigma_p(B), \lambda \in \sigma_p(C), \overline{R(\lambda I - A) \cap R(F_2)} = \emptyset, \overline{R(\lambda I - B_1)} \neq X\} \\ & \cup \{\lambda \in C : \lambda \bar{\in} \sigma_p(A), \lambda \bar{\in} \sigma_p(B), \lambda \in \sigma_p(C), \overline{R(\lambda I - A) \cap R(F_2)} = \emptyset, \overline{R(\lambda I - C_1)} \neq X\} \\ & \cup \{\lambda \in C : \lambda \bar{\in} \sigma_p(A), \lambda \in \sigma_p(B), \lambda \bar{\in} \sigma_p(C), \overline{R(\lambda I - A) \cap R(E_2)} = \emptyset, \\ & \overline{R(\lambda I - A) + R(E_4) + R(F_4)} \neq X\} \\ & \cup \{\lambda \in C : \lambda \bar{\in} \sigma_p(A), \lambda \in \sigma_p(B), \lambda \bar{\in} \sigma_p(C), \overline{R(\lambda I - A) \cap R(E_2)} = \emptyset, \overline{R(\lambda I - B_1)} \neq X\} \\ & \cup \{\lambda \in C : \lambda \bar{\in} \sigma_p(A), \lambda \in \sigma_p(B), \lambda \bar{\in} \sigma_p(C), \overline{R(\lambda I - A) \cap R(E_2)} = \emptyset, \overline{R(\lambda I - C_1)} \neq X\} \\ & \cup \{\lambda \in C : \lambda \bar{\in} \sigma_p(A), \lambda \in \sigma_p(B), \lambda \in \sigma_p(C), \overline{R(\lambda I - A) \cap R(E_2)} = \emptyset, \overline{R(\lambda I - A) \cap R(F_2)} = \emptyset, \\ & \overline{R(\lambda I - A) \cap (R(E_2) + R(F_2))} = \emptyset, \overline{R(\lambda I - A) + R(E_4) + R(F_4)} \neq X\} \\ & \cup \{\lambda \in C : \lambda \bar{\in} \sigma_p(A), \lambda \in \sigma_p(B), \lambda \in \sigma_p(C), \overline{R(\lambda I - A) \cap R(E_2)} = \emptyset, \overline{R(\lambda I - A) \cap R(F_2)} = \emptyset, \\ & \overline{R(\lambda I - A) \cap (R(E_2) + R(F_2))} = \emptyset, \overline{R(\lambda I - B_1)} \neq X\} \\ & \cup \{\lambda \in C : \lambda \bar{\in} \sigma_p(A), \lambda \in \sigma_p(B), \lambda \in \sigma_p(C), \overline{R(\lambda I - A) \cap R(E_2)} = \emptyset, \overline{R(\lambda I - A) \cap R(F_2)} = \emptyset, \\ & \overline{R(\lambda I - A) \cap (R(E_2) + R(F_2))} = \emptyset, \overline{R(\lambda I - C_1)} \neq X\}, \end{aligned}$$

其中 $E_4 = E|_{D(B) \cap D(E)}$ 是 E 在 $D(B) \cap D(E)$ 的限制, $F_4 = F|_{D(C) \cap D(F)}$ 是 F 在 $D(C) \cap D(F)$ 的限制, $B_1 = B|_{D(B) \cap D(E)}$ 是 B 在 $D(B) \cap D(E)$ 的限制, $C_1 = C|_{D(C) \cap D(F)}$ 是 C 在 $D(C) \cap D(F)$ 的限制. E_2, F_2 定义同推论 3.1.

注 3.2 若 A, B, C, E, F 为 X 中的有界线性算子, 则 $D(B) \subset D(E), D(C) \subset D(F)$ 自然成立, 故前文所有结论对于 $X \times X \times X$ 上的有界算子矩阵 H 均适用.

4 例子

本节举例说明上三角算子矩阵 H 的剩余谱可以非空, 进而验证了定理 3.2 的有效性.

例 1 设 $X = l^2(0, \infty)$, 对于任意 $x \in l^2$, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots)$, 令

$$Ax = (x_1 + 2x_2, x_1, x_2, x_3, \cdots),$$

$$Bx = (2x_2, x_1, x_2, x_3, \cdots),$$

$$Cx = (0, x_1, x_2, x_3, \cdots),$$

$$Ex = (4x_1, 2x_1, x_2, x_3, \cdots),$$

$$Fx = (2x_1, x_1, x_2, x_3, \cdots).$$

记

$$H = \begin{pmatrix} A & E & F \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix},$$

则 $-1 \in \sigma_r(H)$, 从而 $\sigma_r(H)$ 非空.

证 经计算易知 $-1 \notin \sigma_p(A)$, $-1 \notin \sigma_p(B)$, $-1 \notin \sigma_p(C)$, $\forall x, y, z \in X$, 有

$$\begin{aligned} & (-I - A)x - E_3y - F_3z \\ = & (-2x_1 - 2x_2 - 4y_1 - 2z_1, -x_1 - x_2 - 2y_1 - z_1, \\ & -x_3 - x_2 - y_2 - z_2, -x_4 - x_3 - y_3 - z_3, \cdots). \end{aligned}$$

令

$$M = \{x : x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^2 | x_1 = 2x_2\}.$$

易证 M 是 X 的真闭子空间, 又 $R(-I - A) + R(E_3) + R(F_3)$ 包含于 M 中, 从而

$$\overline{R(-I - A) + R(E_3) + R(F_3)} \neq X.$$

综上, $-1 \notin \sigma_p(A)$, $-1 \notin \sigma_p(B)$, $-1 \notin \sigma_p(C)$, $\overline{R(-I - A) + R(E_3) + R(F_3)} \neq X$. 由定理 3.2 可知, $-1 \in \sigma_r(H)$, 即 $\sigma_r(H)$ 非空.

例 2 设 $X = l^2(0, \infty)$, 对于任意 $x \in l^2$, $x = (x_1, x_2, x_3, \cdots)$, 令

$$Ax = (2x_2, x_1, x_2, x_3, \cdots),$$

$$Bx = (x_1 + 2x_2, x_1, x_2, x_3, \cdots),$$

$$Cx = (0, x_1, x_2, x_3, \cdots),$$

$$Ex = (2x_1 + x_2, x_1, x_2, x_3, \cdots),$$

$$Fx = (x_1 + x_2, x_1, x_2, x_3, \cdots)$$

且

$$H = \begin{pmatrix} A & E & F \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}.$$

经计算易知 $-1 \notin \sigma_p(A)$, $-1 \in \sigma_r(B)$, $-1 \notin \sigma_p(C)$, 由定理 3.2 可知, $-1 \in \sigma_r(H)$, 于是 $\sigma_r(H)$ 非空.

例 3 设 $X = l^2(0, \infty)$, 对于任意 $x \in l^2$, $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$, 令

$$\begin{aligned} Ax &= (2x_2, x_1, x_2, x_3, \dots), \\ Bx &= (0, x_1, x_2, x_3, \dots), \\ Cx &= (x_2, 2x_1 + x_3, x_4, x_5, \dots), \\ Ex &= (0, 0, 0, x_1, \dots), \\ Fx &= (0, 0, x_1, x_2, \dots). \end{aligned}$$

通过计算, 有 $C = A^*$. 令

$$H = \begin{pmatrix} A & E & F \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix},$$

则 $\sigma_r(H)$ 非空.

证 经计算可知, $0 \notin \sigma_p(A)$, $0 \notin \sigma_p(B)$, $0 \in \sigma_p(C)$ 且

$$N(\lambda I - C) \setminus \{0\} = \{(m_1, 0, -2m_1, 0, 0, \dots)^T \in X | m_1 \neq 0\}.$$

于是 $F_1 m = (0, 0, m_1, 0, -2m_1, \dots)$, 由于 $m_1 \neq 0$, 故 $R(-A) \cap R(F_1) = \emptyset$. 对于任意 $x, y, z \in X$, 有

$$-Ax - E_3 y - F_3 z = (-2x_2, -x_1, -x_2 - z_1, -x_3 - y_1 - z_2, \dots),$$

若 $-x_2 - z_1 = 0$, 显然 $\overline{R(-A) + R(E_3) + R(F_3)} \neq X$. 若 $-x_2 - z_1 \neq 0$, 取

$$q = (m_1, 0, \frac{2x_2 m_1}{-x_2 - z_1}, 0, 0, \dots), q \neq 0,$$

进而 $-Ax - E_3 y - F_3 z$ 与非零元 q 正交, 因此 $q \in (R(-A) + R(E_3) + R(F_3))^\perp$, 所以 $\overline{R(-A) + R(E_3) + R(F_3)} \neq X$.

综上所述,

$$0 \notin \sigma_p(A), 0 \notin \sigma_p(B), 0 \in \sigma_p(C), R(-A) \cap R(F_1) = \emptyset, \overline{R(-A) + R(E_3) + R(F_3)} \neq X.$$

由定理 3.2 可知 $0 \in \sigma_r(H)$, 即 $\sigma_r(H)$ 非空.

例 4 设 $X = l^2(0, \infty)$, 对于任意 $x \in l^2$, $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$, 令

$$\begin{aligned} Ax &= (2x_2, x_1, x_2, x_3, \dots), \\ Bx &= (0, x_1, x_2, x_3, \dots), \\ Cx &= (0, x_2, x_3, x_4, \dots), \\ Ex &= (2x_1, x_1, x_2, x_3, \dots), \\ Fx &= (0, 0, x_1, x_2, \dots) \end{aligned}$$

且

$$H = \begin{pmatrix} A & E & F \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix},$$

则 $\sigma_r(H)$ 非空.

证 首先经计算, 我们有 $0 \in \sigma_p(A)$, $0 \in \sigma_p(B)$, $0 \in \sigma_p(C)$ 且

$$N(-C) \setminus \{0\} = \{m = (m_1, 0, 0, \dots)^T \in X | m_1 \neq 0\}.$$

于是 $F_1 m = (0, 0, m_1, 0, 0, \dots)$, 进而 $R(-A) \cap R(F_1) = \emptyset$, 又因为 $\overline{R(-C)} \neq X$.

综上 $0 \in \sigma_p(A)$, $0 \in \sigma_p(B)$, $0 \in \sigma_p(C)$, $R(-A) \cap R(F_1) = \emptyset$, $\overline{R(-C)} \neq X$, 由定理 3.2 可知 $0 \in \sigma_r(H)$, 即 $\sigma_r(H)$ 非空.

例 5 设 $X = l^2(0, \infty)$, 对于任意 $x \in l^2$, $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$, 令

$$\begin{aligned} Ax &= (3x_1, 2x_1, x_1, x_2, \dots), \\ Bx &= (x_1 + x_2, 2x_1 + x_3, x_4, x_5, \dots), \\ Cx &= (x_2, 2x_1 + x_3, x_4, x_5, \dots), \\ Ex &= (0, x_1, 0, x_2, x_3, \dots), \\ Fx &= (0, 0, x_1, x_2, \dots) \end{aligned}$$

且

$$H = \begin{pmatrix} A & E & F \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix},$$

则 $\sigma_r(H)$ 非空.

证 经计算易知 $0 \in \sigma_p(A)$, $0 \in \sigma_p(B)$, $0 \in \sigma_p(C)$ 且

$$N(C) \setminus \{0\} = \{m = (m_1, 0, -2m_1, 0, 0, \dots)^T \in X | m_1 \neq 0\},$$

$$N(B) \setminus \{0\} = \{n = (n_1, -n_1, -2n_1, 0, 0, \dots) \in X | n_1 \neq 0\}.$$

于是 $F_1 m = (0, 0, m_1, 0, -2m_1, \dots)$, 进而 $R(-A) \cap R(F_1) = \emptyset$. 同理 $R(-A) \cap R(E_1) = \emptyset$. 注意到 $E_1 n + F_1 m = (0, n_1, m_1, -n_1, -2m_1 - 2n_1, \dots)$, 有 $R(-A) \cap (R(E_1) + R(F_1)) = \emptyset$.

对于任意 $x, y, z \in X$, 可得

$$-Ax - E_3 y - F_3 z = (-3x_1, -2x_1 - y_1, -x_1 - z_1, -x_2 - y_2 - z_2, \dots).$$

若 $-x_1 - z_1 = 0$, 则 $\overline{R(-A) + R(E_3) + R(F_3)} \neq X$. 若 $-x_1 - z_1 \neq 0$, 则取

$$q = (m_1, 0, \frac{3x_1 m_1}{-x_1 - z_1}, 0, 0, \dots) \neq 0,$$

由于 $-Ax - E_3 y - F_3 z$ 与 q 正交, 所以 $\overline{R(-A) + R(E_3) + R(F_3)} \neq X$. 综上 $0 \in \sigma_p(A)$, $0 \in \sigma_p(B)$, $0 \in \sigma_p(C)$, $R(-A) \cap R(F_1) = \emptyset$, $R(-A) \cap R(E_1) = \emptyset$, $R(-A) \cap (R(E_1) + R(F_1)) = \emptyset$, $\overline{R(-A) + R(E_3) + R(F_3)} \neq X$. 由定理 3.2 可知, $0 \in \sigma_r(H)$, 即 $\sigma_r(H)$ 非空.

参 考 文 献

- [1] Atkinson F V, Langer H, Mennicken R, Shkalikov A A. The essential spectrum of some matrix operators [J]. Math. Nachr., 1994, 167: 5–20.
- [2] Bátkai A, Binding P, Dijksma A, Hryniv R, Langer H. Spectral problems for operator matrices [J]. Math. Nachr., 2005, 278: 1408–1429.
- [3] Jeribi A, Moalla N, Walha I. Spectra of some block operator matrices and application to transport operators [J]. J. Math. Anal. Appl., 2009, 351: 315–325.
- [4] Hou G L, Alatancang. Spectrums of off-diagonal infinite-dimensional Hamiltonian operators and their applications to plane elasticity problems [J]. Commun. Theor. Phys., 2009, 51: 200–204.
- [5] Du H K, Pan J. Perturbation of spectrums of 2×2 operator matrices [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1994, 121: 761–766.
- [6] Han J K, Lee H Y, Lee W Y. Invertible completions of 2×2 upper triangular operator matrices [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 2000, 128: 119–123.
- [7] Sanchez-Perales S, Djordjevic S V. Continuity of spectrum and approximate point spectrum on operator matrices [J]. J. Math. Anal. Appl., 2011, 378: 289–294.
- [8] Han Y M, Djordjevic S V. a-Weyl' s theorem for operator matrices [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 2001, 130: 715–722.
- [9] 曹小红. 3×3 上三角算子矩阵的 Weyl 型定理 [J]. 数学学报 (中文版), 2006, 49(3): 529–538.
- [10] Hai G J, Alatancang. Possible spectrums of 3×3 upper triangular operator matrices [J]. Journal of Mathematical Research & Exposition, 2009, 29(4): 649–661.
- [11] Amar A B, Jeribi A, Krichen B. Essential spectra of a 3×3 operator matrix and an application to three-group transport equations [J]. Integr. Equ. Oper. Theory, 2010, 68: 1–21.
- [12] 阿拉坦仓, 黄俊杰. $L^2 \times L^2$ 中的一类无穷维 Hamilton 算子的剩余谱 [J]. 数学物理学报, 2005, 25(A)7: 1040–1045.
- [13] 孙炯, 王忠. 线性算子的谱分析 [M]. 北京: 科学出版社, 2005.

ON THE POINT SPECTRUM AND RESIDUAL SPECTRUM FOR A CLASS OF 3×3 UPPER TRIANGULAR OPERATOR MATRICES

WANG Yu-hong^{1,2}, HOU Guo-lin¹, Alatancang¹

(1.School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University, Hohhot 010021, China)

(2.School of Mathematics, Chifeng University, Chifeng 024000, China)

Abstract: In this paper, the point spectrum and residual spectrum for a class of 3×3 upper triangular operator matrices are described completely, and the residual spectrum of the operator is divided into some disjoint subsets. Moreover, some examples of $l^2 \times l^2 \times l^2$ are constructed to show that the residual spectrum of the operator may be nonempty, which verifies the effectiveness of the result.

Keywords: Hilbert space; upper triangular operator matrices; point spectrum; residual spectrum

2010 MR Subject Classification: 47A10; 15A24