

Banach 空间高阶周期边值问题正解的存在性

李小龙

(陇东学院数学与统计学院, 甘肃 庆阳 745000)

摘 要: 本文研究了 Banach 空间 E 中的高阶周期边值问题正解的存在性. 利用非紧性测度的估计技巧与凝聚映射的不动点指数理论, 获得了该问题正解的存在性结果, 推广了某些已有的相应结果.

关键词: 周期边值问题; 闭凸锥; 正解; 凝聚映射; 不动点指数

MR(2010) 主题分类号: 34G20; 34B18

中图分类号: O175.15

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2014)05-0909-07

1 引言

设 E 为实的 Banach 空间, 其正元锥 P 为正规锥, 正规常数为 N , 记 $I = [0, 2\pi]$, 本文讨论 E 中的高阶周期边值问题:

$$\begin{cases} L_n u(t) = f(t, u(t)), & t \in I, \\ u^{(i)}(0) = u^{(i)}(2\pi), & i = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases} \quad (1.1)$$

正解的存在性. 其中 $L_n u(t) = u^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i u^{(i)}(t)$ 是 n 阶线性微分算子, $a_0 > 0, a_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n-1, n \geq 2, f: I \times P \rightarrow P$ 连续.

对于 L_n 的一些具体形式, 其解和正解的存在性已有许多的结论^[1-4], 采用的方法主要是拓扑度及相关的不动点方法与上下解的单调迭代方法. 很少有文献在一般 Banach 空间中讨论高阶周期边值问题正解的存在性. 本文在一般 Banach 空间中利用凝聚映射的不动点指数理论讨论了方程 (1.1) 正解的存在性. 方程 (1.1) 的正解是指 $u \in C^n(I, E)$ 满足方程 (1.1), 并且 $u(t) > \theta, 0 < t < 1$.

Banach 空间的常微分方程与普通常微分方程的最大差异是, 把微分方程转换为与之等价的积分方程后, 相应的积分算子不再具有紧性. 为了对该积分算子应用凝聚映射的不动点定理, 通常需要给 f 附加一些非紧性测度条件. 本文使用了如下的非紧性测度条件:

(H) 对 $\forall R > 0$, 记 $P_R = \{x \in P : \|x\| \leq R\}$, $f(I \times P_R)$ 有界, 且存在常数 $L = L_R \in (0, \frac{a_0}{4})$ 使得对 $\forall t \in I, D \subset P_R$, 有 $\alpha(f(t, D)) \leq L\alpha(D)$.

在研究 Banach 空间常微分方程的正解时, 许多文献都假设 f 在有界集上一致连续, 如文献 [5]. 本文利用新的非紧性测度估计技巧^[7] 删去了对 f 的一致连续性.

2 预备知识

*收稿日期: 2012-06-29

接收日期: 2012-12-21

基金项目: 陇东学院青年科技创新项目 (XYZK1109).

作者简介: 李小龙 (1976-), 男, 甘肃甘谷, 讲师, 主要研究方向: 抽象发展方程.

设 $C(I, E)$ 为定义于 I 取值于 E 的全体连续函数按范数 $\|u\| = \max_{t \in I} \|u(t)\|$ 构成的 Banach 空间, 记 $C(I, P) = \{u \in C(I, E) \mid u(t) \in P, t \in I\}$, 则 $C(I, P)$ 为 $C(I, E)$ 中的正规锥, 正规常数亦为 N , 以下使用的 $C(I, E)$ 中半序 $\leq$ 由 $C(I, P)$ 引出.

设 $P_n(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0$ 为 L_n 的特征多项式, 假设 $P_n(\lambda)$ 满足条件:

(H₀) $\mathcal{N}(P_n(\lambda)) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im} z| < \frac{1}{2}\}$,

其中 $\mathcal{N}(P_n(\lambda))$ 表示 $P_n(\lambda)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上的所有零点的集合.

考虑线性边值问题:

$$\begin{cases} L_n u(t) = \theta, & t \in I, \\ u^{(i)}(0) = u^{(i)}(2\pi), & i = 0, 1, \cdots, n-2, \\ u^{(n-1)}(0) - u^{(n-1)}(2\pi) = 1. \end{cases} \quad (2.1)$$

由文献 [4] 的引理 3 知, 条件 (H₀) 成立时该问题有唯一解 $r_n(t)$ 且 $r_n(t) > \theta, t \in I$. 设 $m_n = \min_{t \in I} r_n(t), M_n = \max_{t \in I} r_n(t)$. 记

$$G_n(t, s) = \begin{cases} r_n(t-s), & 0 \leq s \leq t \leq 2\pi, \\ r_n(2\pi+t-s), & 0 \leq t \leq s \leq 2\pi, \end{cases}$$

则

$$0 < m_n \leq G_n(t, s) \leq M_n, \quad \forall t, s \in I. \quad (2.2)$$

将 $r_n(t)$ 代入方程 (2.1) 的第一式, 并从 0 到 2π 积分, 得 $\int_0^{2\pi} r_n(t) dt = \frac{1}{a_0}$, 可通过直接计算得 $\int_0^{2\pi} G_n(t, s) ds = \frac{1}{a_0}$. $\forall h \in C(I, E)$, 依据文献 [4] 的引理 1 知, 线性周期边值问题

$$\begin{cases} L_n u(t) = h(t), & t \in I, \\ u^{(i)}(0) = u^{(i)}(2\pi), & i = 0, 1, \cdots, n-1 \end{cases}$$

有唯一解 u 且

$$u(t) = \int_0^{2\pi} G_n(t, s) h(s) ds.$$

记 $\sigma = m_n/M_n$, 取 $C(I, P)$ 的子锥:

$$K = \{u \in C(I, P) \mid u(t) \geq \sigma u(\tau), \forall t, \tau \in I\}. \quad (2.3)$$

定义算子 Q 如下:

$$(Qu)(t) = \int_0^{2\pi} G_n(t, s) f(s, u(s)) ds, \quad (2.4)$$

则 $Q: C(I, P) \rightarrow C(I, P)$ 连续, 易证方程 (1.1) 的解即为积分算子 Q 的不动点.

为了利用凝聚映射的不动点指数理论, 先引入非紧性测度的相关结果. 文中 E 与 $C(I, E)$ 中有界集的 Kuratiwski 非紧性测度均由 $\alpha(\cdot)$ 表示. 对 $B \subset C(I, E)$, 记 $B(t) = \{u(t) \mid u \in B\} \subset E, t \in I$.

引理 2.1 ^[5] 设 $B \subset C(I, E)$ 为等度连续的有界函数族, 则 $\alpha(B(t))$ 在 I 上连续, 且 $\alpha(B) = \max_{t \in I} \alpha(B(t))$.

引理 2.2 ^[6] 设 $B = \{u_n\} \subset C(I, E)$ 为可列集, 若存在 $\psi \in L^1(I)$ 使得

$$\|u_n(t)\| \leq \psi(t) \text{ a.e } t \in I, n = 1, 2, \dots,$$

则 $\alpha(B(t))$ 在 I 上可积, 且 $\alpha(\{\int_I u_n(t) dt\}) \leq 2 \int_I \alpha(B(t)) dt$.

引理 2.3 ^[7] 设 $D \subset E$ 有界, 则存在 D 的可列子集 D_0 , 使得 $\alpha(D) \leq 2\alpha(D_0)$.

引理 2.4 设 $f: I \times P \rightarrow P$ 满足 (H), 则由 (2.4) 式定义的算子 $Q: C(I, P) \rightarrow C(I, P)$ 为凝聚映射.

证 由 (2.4) 式易证, Q 把 $C(I, P)$ 中的有界集映为有界的等度连续集. 任取非相对紧的有界集 $B \subset C(I, P)$. 下证 $\alpha(Q(B)) < \alpha(B)$. 令 $R = \sup\{\|u\| \mid u \in B\}$, 则 $\forall t \in I, B(t) \subset P_R$, 设 $L = L_R \in (0, \frac{a_0}{4})$ 为假设 (H) 中的非紧性测度系数. 由引理 2.3 知, 存在可列集 $B_1 = \{u_n\} \subset B$, 使得 $\alpha(Q(B)) \leq 2\alpha(Q(B_1))$. 故对 $\forall t \in I$, 由引理 2.2 及假设 (H), 有

$$\begin{aligned} \alpha(Q(B_1(t))) &= \alpha(\{\int_0^{2\pi} G_n(t, s)f(s, u_n(s))ds \mid n = 1, 2, \dots\}) \\ &\leq 2 \int_0^{2\pi} \alpha(\{G_n(t, s)f(s, u_n(s)) \mid n = 1, 2, \dots\})ds \\ &= 2 \int_0^{2\pi} G_n(t, s)\alpha(f(s, B_1(s)))ds \\ &\leq 2L \int_0^{2\pi} G_n(t, s)\alpha(B_1(s))ds \\ &\leq 2L \int_0^{2\pi} G_n(t, s)ds\alpha(B_1) \\ &= 2L \frac{1}{a_0} \cdot \alpha(B_1) \\ &= \frac{2}{a_0} L \cdot \alpha(B_1). \end{aligned}$$

因为 $Q(B_1)$ 等度连续, 由引理 2.1 知

$$\alpha(Q(B_1)) = \max_{t \in I} \alpha(Q(B_1(t))) \leq \frac{2}{a_0} L \cdot \alpha(B_1),$$

于是有

$$\alpha(Q(B)) \leq 2\alpha(Q(B_1)) \leq 2 \frac{2}{a_0} L \cdot \alpha(B_1) \leq \frac{4}{a_0} L \cdot \alpha(B) < \alpha(B).$$

因此 $Q: C(I, P) \rightarrow C(I, P)$ 为凝聚映射.

引理 2.5 设 $f: I \times P \rightarrow P$, 则 $Q(C(I, P)) \subset K$.

证 对 $\forall u \in C(I, P)$, 及 $\forall t, \tau \in I$, 由 (2.4) 式和 (2.2) 式的右边不等式, 有

$$(Qu)(\tau) = \int_0^{2\pi} G_n(\tau, s)f(s, u(s))ds \leq M_n \int_0^{2\pi} f(s, u(s))ds,$$

又由 (2.4) 式和 (2.2) 式的左边不等式, 有

$$(Qu)(t) = \int_0^{2\pi} G_n(t, s)f(s, u(s))ds \geq m_n \int_0^{2\pi} f(s, u(s))ds \geq \sigma(Qu)(\tau),$$

由 (2.3) 式知, $Qu \in K$, 因此 $Q(C(I, P)) \subset K$.

从而当 $f: I \times P \rightarrow P$ 时, $Q: K \rightarrow K$ 为凝聚映射, 方程 (1.1) 的正解等价于 Q 在 K 中的不动点. 本文将用凝聚映射的不动点指数理论寻找 Q 的不动点.

引理 2.6 [8] 设 E 为 Banach 空间, K 为 E 中的锥, $\Omega \subset E$ 为有界开集, $\theta \in \Omega$, $Q: K \cap \bar{\Omega} \rightarrow K$ 为凝聚映射, 若 Q 满足 $u \neq \lambda Qu, \forall u \in K \cap \partial\Omega, 0 < \lambda \leq 1$, 则不动点指数 $i(Q, K \cap \Omega, K) = 1$.

引理 2.7 [9] 设 E 为 Banach 空间, K 为 E 中的锥, $\Omega \subset E$ 为有界开集, $Q: K \cap \bar{\Omega} \rightarrow K$ 为凝聚映射, 若存在 $v_0 \in K, v_0 \neq \theta$, 使得 Q 满足 $u - Qu \neq \mu v_0, \forall u \in K \cap \partial\Omega, \mu \geq 0$, 则不动点指数 $i(Q, K \cap \Omega, K) = 0$.

下面用引理 2.6 与引理 2.7 证明本文的主要定理.

3 主要结果及其证明

定理 3.1 设 E 为 Banach 空间, 其正元锥 P 为正规锥, $f: I \times P \rightarrow P$ 连续, 假设条件 (H) 与 (H₀) 成立. 若 f 满足下列条件之一:

(H₁) 1) 存在 $\varepsilon \in (0, a_0)$ 及 $\delta > 0$, 使得当 $x \in P_\delta$ 时, $f(t, x) \leq (a_0 - \varepsilon)x$;

2) 存在 $\eta > 0$ 及 $h_0 \in C(I, P)$, 使得当 $x \in P$ 时, $f(t, x) \geq (a_0 + \eta)x - h_0(t)$.

(H₂) 1) 存在 $\varepsilon > 0$ 及 $\delta > 0$, 使得当 $x \in P_\delta$ 时, $f(t, x) \geq (a_0 + \varepsilon)x$;

2) 存在 $\eta \in (0, a_0)$ 及 $h_0 \in C(I, P)$, 使得当 $x \in P$ 时, $f(t, x) \leq (a_0 - \eta)x + h_0(t)$.

则方程 (1.1) 至少存在一个正解.

证 由上面的论述知, 只需证明由 (2.4) 式定义的凝聚映射 $Q: K \rightarrow K$ 存在非零的不动点. 取 $0 < r < R < \infty$. 记

$$\Omega_r = \{u \in K \mid \|u\| < r\}, \partial\Omega_r = \{u \in K \mid \|u\| = r\}.$$

以下分两种情形分别证明当 r 充分小 R 充分大时 Q 在 $K \cap (\Omega_R \setminus \bar{\Omega}_r)$ 上存在不动点.

情形 1 f 满足假设 (H₁). 取 $0 < r < \delta$, 其中 δ 为假设 (H₁) 中的常数, 证明 Q 满足引理 2.6 中条件:

$$u \neq \lambda Qu, \quad \forall u \in K \cap \partial\Omega_r, \quad 0 < \lambda \leq 1. \quad (3.1)$$

反设 (3.1) 式不成立, 则存在 $u_0 \in K \cap \partial\Omega_r$ 及 $0 < \lambda_0 \leq 1$, 使得 $u_0 = \lambda_0 Qu_0$. 按 Q 的定义, u_0 满足微分方程:

$$\begin{cases} L_n u_0(t) = \lambda_0 f(t, u_0(t)), & t \in I, \\ u_0^{(i)}(0) = u_0^{(i)}(2\pi), & i = 0, 1, \dots, n-1, \end{cases} \quad (3.2)$$

将方程 (3.2) 第一式在 I 上积分, 并应用假设 (H₁) 之 1), 有

$$a_0 \int_0^{2\pi} u_0(t)dt = \lambda_0 \int_0^{2\pi} f(t, u_0(t))dt \leq (a_0 - \varepsilon) \int_0^{2\pi} u_0(t)dt.$$

因为 $0 < \varepsilon < a_0$, 故由上式有

$$\int_0^{2\pi} u_0(t) dt \leq \theta.$$

另一方面, 因为 $u_0 \in K$, 按锥 K 的定义 $u_0(t) \geq \sigma u_0(s) \geq \theta, \forall t, s \in I$. 把该式关于 t 在 I 上积分, 得

$$\theta \leq u_0(s) \leq \frac{1}{\sigma} \int_0^{2\pi} u_0(t) dt, \quad (3.3)$$

即 $u_0(s) = \theta$ 于 I . 此与 $u_0 \in K \cap \partial\Omega_r (\|u_0\| = r)$ 矛盾. 于是 (3.1) 式成立, 故由引理 2.6 知,

$$i(Q, K \cap \Omega_r, K) = 1. \quad (3.4)$$

取 $e \in P$ 使得 $\|e\| = 1$, 令 $v_0(t) = e$, 则 $v_0(t)$ 是 $f(t, u(t)) = a_0 e$ 时方程 (1.1) 的解, 由 $G_n(t, s)$ 的性质易知 $v_0 \in K \setminus \{\theta\}$, 下证当 R 充分大时, 有

$$u - Qu \neq \tau v_0, \quad \forall u \in K \cap \partial\Omega_R, \quad \tau \geq 0. \quad (3.5)$$

反设存在 $u_0 \in K \cap \partial\Omega_R$ 及 $\tau_0 \geq 0$, 使得 $u_0 - Qu_0 = \tau_0 v_0$, 则 $u_0 - \tau_0 v_0 = Qu_0$, 按算子 Q 的定义 u_0 满足微分方程:

$$L_n u_0(t) - a_0 \tau_0 v_0(t) = f(t, u_0(t)), t \in I. \quad (3.6)$$

按假设 (H_1) 之 2), 有

$$L_n u_0(t) = f(t, u_0(t)) + a_0 \tau_0 v_0(t) \geq (a_0 + \eta) u_0(t) - h_0(t), t \in I.$$

注意到 $u_0 = \tau_0 v_0 + Qu_0$ 满足边界条件 $u_0^{(i)}(0) = u_0^{(i)}(2\pi), i = 0, 1, \dots, n-1$, 将上式在 I 上积分得

$$a_0 \int_0^{2\pi} u_0(t) dt \geq (a_0 + \eta) \int_0^{2\pi} u_0(t) dt - \int_0^{2\pi} h_0(t) dt.$$

从而有

$$\int_0^{2\pi} u_0(t) dt \leq \frac{1}{\eta} \int_0^{2\pi} h_0(t) dt.$$

上式结合 (3.3) 式, 有

$$\theta \leq u_0(s) \leq \frac{1}{\sigma\eta} \int_0^{2\pi} h_0(t) dt, \quad \forall s \in I.$$

由锥 P 的正规性, 有

$$\|u_0(s)\| \leq N \left\| \frac{1}{\sigma\eta} \int_0^{2\pi} h_0(t) dt \right\| \leq \frac{2\pi N}{\sigma\eta} \|h_0\| := \bar{R}. \quad (3.7)$$

取 $R > \max\{\bar{R}, r\}$, 则 (3.5) 式成立, 由引理 2.7 知 $i(Q, K \cap \Omega_R, K) = 0$. 从而按不动点指数的区域可加性, 由该式结合 (3.4) 式有

$$i(Q, K \cap (\Omega_R \setminus \bar{\Omega}_r), K) = i(Q, K \cap \Omega_R, K) - i(Q, K \cap \Omega_r, K) = -1.$$

由可解性知 Q 在 $K \cap (\Omega_R \setminus \overline{\Omega_r})$ 中至少存在一个不动点, 该不动点即为方程 (1.1) 的正解.

情形 2 f 满足假设 (H_2) . 取 $0 < r < \delta$, 证明

$$u - Qu \neq \tau v_0, \quad \forall u \in K \cap \partial\Omega_r, \quad \tau \geq 0, \quad (3.8)$$

其中 $v_0(t) = e \in K$, 反设 (3.8) 式不成立, 则存在 $u_0 \in K \cap \partial\Omega_r$ 及 $\tau_0 \geq 0$, 使得 $u_0 - Qu_0 = \tau_0 v_0$, 于是 $u_0(t)$ 满足微分方程 (3.6). 由 (3.6) 式及假设 (H_2) 之 1) 有

$$L_n u_0(t) = f(t, u_0(t)) + a_0 \tau_0 v_0(t) \geq (a_0 + \varepsilon) u_0(t), \quad t \in I.$$

将上式在 I 上积分得

$$a_0 \int_0^{2\pi} u_0(t) dt \geq (a_0 + \varepsilon) \int_0^{2\pi} u_0(t) dt.$$

因此

$$\int_0^{2\pi} u_0(t) dt \leq \theta.$$

于是由 (3.3) 式可得 $u_0(s) = \theta$ 于 I . 此与 $u_0 \in \partial\Omega_r$ 矛盾. 因此 (3.8) 式成立, 故按引理 2.7 知

$$i(Q, K \cap \Omega_r, K) = 0. \quad (3.9)$$

再证当 R 充分大时, 有

$$u \neq \lambda Qu, \quad \forall u \in K \cap \partial\Omega_R, \quad 0 < \lambda \leq 1. \quad (3.10)$$

假设存在 $u_0 \in K$ 及 $0 < \lambda_0 \leq 1$, 使得 $u_0 = \lambda_0 Qu_0$, 则 u_0 满足微分方程 (3.2). 将方程 (3.2) 的第一式在 I 上积分, 并应用假设 (H_2) 之 2) 得

$$a_0 \int_0^{2\pi} u_0(t) dt = \lambda_0 \int_0^{2\pi} f(t, u_0(t)) dt \leq (a_0 - \eta) \int_0^{2\pi} u_0(t) dt + \int_0^{2\pi} h_0(t) dt.$$

从而有

$$\int_0^{2\pi} u_0(t) dt \leq \frac{1}{\eta} \int_0^{2\pi} h_0(t) dt.$$

由上式和 (3.3) 式可证明 u_0 满足 (3.7) 式, 取 $R > \max\{\overline{R}, r\}$, 则 (3.10) 式成立, 由引理 2.6 知, $i(Q, K \cap \Omega_R, K) = 1$. 于是该式结合 (3.9) 式有

$$i(Q, K \cap (\Omega_R \setminus \overline{\Omega_r}), K) = i(Q, K \cap \Omega_R, K) - i(Q, K \cap \Omega_r, K) = 1.$$

由可解性知 Q 在 $K \cap (\Omega_R \setminus \overline{\Omega_r})$ 中至少存在一个不动点, 该不动点即为方程 (1.1) 的正解.

定理 3.1 中的 a_0 是方程 (1.1) 对应的线性边值问题的第一特征值, 将此结果作到了最优. 将文献 [4] 中的相关结论推广到了无穷维空间.

参 考 文 献

- [1] VSeda J J Nieto, Lois M. Periodic boundary value problems for nonlinear higher order ordinary differential equations[J]. Appl. Math. Comput., 1992, 48: 71–82.
- [2] Cabada A. The method of lower and upper solutions for n^{th} -order periodic boundary value problems[J]. J. Appl. Math. Stochastic Anal., 1994, 7: 33–47.
- [3] Cabada A. The method of lower and upper solutions for second, third, fourth and higher order boundary value problems[J]. J. Math. Anal. Appl., 1994, 185: 302–320.
- [4] Li Yongxiang. Positive solutions of higher-order periodic boundary value problem[J]. Appl. Math. Comput., 2004, 48: 153–161.
- [5] 郭大钧, 孙经先. 抽象空间常微分方程 [M]. 济南: 山东科学技术出版社, 1989: 188–222.
- [6] HEINZ H R. On the behaviour of measure of noncompactness with respect to differentiation and integration of vector-valued functions [J]. Nonlinear Anal., 1983, 7(12): 1351–1371.
- [7] 李永祥. 抽象半线性发展方程初值问题解的存在性 [J]. 数学学报, 2005, 48(6): 1103–1108.
- [8] 郭大钧. 非线性泛函分析 [M]. 济南: 山东科学技术出版社, 1985: 234–353.
- [9] 余庆余. 半序 Banach 空间中凝聚映射及其正不动点 [J]. 兰州大学学报 (自然科学版), 1979, 15(3): 1–5.

EXISTENCE OF POSITIVE SOLUTIONS OF HIGHER-ORDER PERIODIC BOUNDARY VALUE PROBLEMS IN BANACH SPACES

LI Xiao-long

(College of Mathematics and Statistics, Longdong University, Qingyang 745000, China)

Abstract: An result on the existence of positive solutions for higher-order periodic boundary value problem was obtained by employing a new estimate of noncompactness measure and the fixed point index theory of condensing mapping. The conclusions of this paper extend corresponding results.

Keywords: periodic boundary value problem; closed convex cone; positive solution; condensing mapping; fixed point index

2010 MR Subject Classification: 34G20; 34B18