

基于属性优先级别关系和满意度的多属性决策方法

王斯锋^a, 屈彪^b

(曲阜师范大学 a. 计算机科学学院; b. 管理学院, 山东 日照 276826)

摘 要: 本文研究了属性间有优先级别关系, 各属性有满意度要求的多属性决策问题. 利用属性间的优先级别关系和属性的满意度要求来确定低级别的属性对高级别的属性的补偿的大小的方法, 获得了一种多属性决策信息集结方法, 推广了相关文献的结果, 使得决策结果更加符合实际的决策要求.

关键词: 多属性决策; OWA 算子; 满意度

MR(2010) 主题分类号: 90B50

中图分类号: O22

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2014)05-0904-05

1 引言

多属性决策广泛存在于社会、经济、管理等领域, 其实质就是利用已有的决策信息, 通过一定的集结方法得到每一个备选方案的综合评价值, 然后根据综合评价值对方案进行排序或择优. 实际环境的复杂性决定了决策信息集结方法的多样性. 著名学者 Yager 在 1988 年提出了 OWA(ordered weighted averaging) 算子^[1], 该算子作为一种多属性决策信息集结方法被广泛地应用. 许多学者进行了更为深刻的研究并给出了许多不同类型的 OWA 算子, 徐泽水^[2]对所有 OWA 算子权重向量确定方法进行了总结.

在多属性决策问题中, 我们经常会遇到有的属性会比别的属性重要, 这些重要的属性在决策过程中就要起到更大的作用, 甚至是决定性作用. 例如对汽车进行评价时, 汽车的安全性能要优先于汽车价格. Yager^[3,4]考虑了属性(或准则)有优先级别关系的多属性决策问题, 并且提出了属性间有优先级别关系的有序加权平均(Prioritized ordered weighted averaging(POWA))算子. 本文主要给出当属性权重已知, 属性间有优先级别关系, 并且各属性设有它的满意值的信息集结方法.

2 PA(Prioritized Aggregation) 算子

Yager^[4]研究了属性权重未知但属性间有优先级别关系的多属性决策问题, 基于属性优先关系和属性值提出了 PA 算子. 设属性集 $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$, 且属性间有一个优先次序, 若 $i < k$, 则 C_i 的优先权大于 C_k 的优先权, 即 $C_1 > C_2 > \dots > C_n$, 方案 x 在属性 C_i 下的属性值为 $C_i(x) = a_i \in [0, 1]$. 定义方案 x 的综合评价值为:

$$C(x) = F(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n w_i a_i,$$

*收稿日期: 2011-09-28

接收日期: 2012-03-24

基金项目: 国家自然科学基金资助(11271226).

作者简介: 王斯锋(1973-), 男, 山东沂南, 讲师, 主要研究方向: 管理运筹学.

其中权重向量 $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ 的确定方法如下:

1) 利用属性间的优先次序以及属性值计算 $C_i(x)$ 的未规范化的权重 T_i .

令 $S_i = C_i = a_i$, $T_1 = 1$, $T_i = \prod_{k=1}^{i-1} S_k = S_{i-1}T_{i-1}$, $i = 2, 3, \dots, n$.

2) 对 T_i 进行规范化处理, 得到 $w_i = \frac{T_i}{\sum_{j=1}^n T_j}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

计算 T_i 可发现 $T_1 \geq T_2 \geq \dots \geq T_n$. 同时, 对于方案 x , 若在具有高优先权的属性下的属性值小, 则在具有低优先权的属性下的属性值不容易对其进行补偿. 特别的, 若 $C_1(x) = 0$, 则不能从 $C_2, \dots, C_n$ 得到任何补偿.

3 OWA 算子

1988 年 Yager^[1] 首先提出了 OWA 算子, 其定义如下:

定义 1 映射 OWA: $\mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$,

$$OWA(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{j=1}^n w_j a_{\text{ind}(j)},$$

其中 $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ 是加权向量, 且满足 $0 \leq w_j \leq 1, j = 1, 2, \dots, n, \sum_{j=1}^n w_j = 1$, $a_{\text{ind}(j)}$ 为 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 中第 j 大的元素的下标.

在应用 OWA 算子进行集结时, 最主要的工作就是如何确定 OWA 算子的加权向量. 徐泽水^[2] 对所有的确定 OWA 算子的加权向量的方法进行了总结. 有一种比较常用的方法是利用 BUM 函数来确定 OWA 算子的加权向量.

定义 2 $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 是一个 BUM 函数, 满足:

(1) $f(0) = 0$;

(2) $f(1) = 1$;

(3) 若 $x > y$, 则 $f(x) \geq f(y)$.

利用上面的 BUM 函数得到 OWA 算子的加权向量 $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$, 其中

$$w_j = f\left(\frac{j}{n}\right) - f\left(\frac{j-1}{n}\right), j = 1, 2, \dots, n.$$

显然 $w_j \geq 0, \sum_{j=1}^n w_j = 1$.

Torra 和 Narukawa^[5,6] 给出了一种对已知 OWA 算子的加权向量进行修正的方法, 现简单介绍如下.

设 $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ 为已知的由某个 BUM 函数 f 确定的 OWA 算子的加权向量, 对于每个 $w_j (j = 1, 2, \dots, n)$, 有 $w_j = f\left(\frac{j}{n}\right) - f\left(\frac{j-1}{n}\right)$, 由 $f(0) = 0$ 得

$$f\left(\frac{j}{n}\right) = \sum_{k=1}^j w_k, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

不妨设 $f(x) = m_j x + b_j, \frac{j-1}{n} \leq x \leq \frac{j}{n}$, 那么

$$f\left(\frac{j-1}{n}\right) = m_j \frac{j-1}{n} + b_j, f\left(\frac{j}{n}\right) = m_j \frac{j}{n} + b_j,$$

则 $f(\frac{j}{n}) - f(\frac{j-1}{n}) = \frac{m_j}{n} = w_j$, 由此得 $m_j = nw_j$. 所以

$$f(\frac{j}{n}) = \sum_{k=1}^j w_k = nw_j \frac{j}{n} + b_j = jw_j + b_j, \quad b_j = \sum_{k=1}^j w_k - jw_j = \sum_{k=1}^{j-1} w_k - (j-1)w_j,$$

故

$$f(x) = \sum_{k=1}^{j-1} w_k + nw_j(x - \frac{j-1}{n}), \quad \frac{j-1}{n} \leq x \leq \frac{j}{n}.$$

Yager^[3] 便是运用此方法对于已知的 OWA 算子的加权向量结合 PA 算子的权重向量进行了修正, 得到 POWA 算子的加权向量. 下面我们应用该方法先由已知的权重向量确定一个 BUM 函数, 然后基于属性间的优先级别关系和满意度对原来的权重向量进行修正.

4 基于属性间优先级别关系和属性满意度的多属性决策方法

对于某一个多属性决策问题, 设 $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ 为属性集, $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ 为属性的权重向量, 满足 $v_i \geq 0, \sum_{i=1}^n v_i = 1$. 不妨设 $v_1 > v_2 > \dots > v_n$, 属性权重越大则其优先级别越高. 方案 x 在属性 C_i 下的属性值 $C_i(x) = a_i \in [0, 1]$. $\partial = (\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n)$ 为各属性下的满意度向量, 其中 ∂_i 为属性 C_i 的满意度.

属性权重 v_i 大于 v_j 表明属性 C_i 的优先级别关系高于 C_j , 级别低的属性 C_j 对于级别高的属性 C_i 的补偿程度和方案 x 在 C_i 下的属性值 a_i 是否达到属性的满意程度有关, 也与两个属性权重之间的差有关. 显然达到了属性的满意程度, 权重间的差越小, 则属性 C_i 接受补偿的程度越高. 为此我们构造下面的方法对方案 x 进行综合评价.

1) 利用属性间的优先次序以及属性值计算 $C_i(x)$ 的未规范化的权重 T_i .

记

$$S_i = \begin{cases} \max\{1 - (v_1 - v_i), a_{i-1}\}, & a_{i-1} \geq \partial_{i-1}, & i \geq 2, \\ \min\{1 - (v_1 - v_i), a_{i-1}\}, & a_{i-1} < \partial_{i-1}, & i \geq 2, \end{cases} \quad (4.1)$$

$$T_1 = 1,$$

$$T_i = \prod_{k=2}^i S_k, \quad i = 2, 3, \dots, n. \quad (4.2)$$

2) 对 T_i 进行规范化处理, 得优先权重向量 $R = (r_1, r_2, \dots, r_n)$, 其中

$$r_i = \frac{T_i}{\sum_{j=1}^n T_j}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.3)$$

3) 利用优先权重向量 $R = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ 对已有的属性权重向量 $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ 进行修正.

设 $a_{\text{ind}(k)}$ 为 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 中第 k 大的元素, $r_{\text{ind}(k)}$ 为与 $a_{\text{ind}(k)}$ 对应的优先权重, $v_{\text{ind}(k)}$ 为与 $a_{\text{ind}(k)}$ 对应的属性权重. 令 $R_0 = 0, R_j = \sum_{k=1}^j r_{\text{ind}(k)}, j = 1, 2, \dots, n$, 修正后的属性权重为

$$w_j = f(R_j) - f(R_{j-1}), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (4.4)$$

其中

$$f(x) = \sum_{k=1}^{j-1} v_{\text{ind}(k)} + nv_{\text{ind}(j)}(x - \frac{j-1}{n}), \quad \frac{j-1}{n} \leq x \leq \frac{j}{n}. \quad (4.5)$$

4) 计算方案的综合评价

$$C(x) = \sum_{j=1}^n w_j a_{\text{ind}(j)}. \quad (4.6)$$

注 在 (3) 中对属性值 $a_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 进行排序时若出现属性值有相等的情况, 则权重大的属性下的属性值排在前面.

由公式 (4.1) 可知, 随着属性的满意度 ∂_i 的增大, S_i 是单调不增的, 又由公式 (4.2)–(4.4) 可知 w_i 也是单调不增的, 所以计算得到的方案综合评价值会随着满意度的增加而不变或变小.

5 实例分析

设 $C = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ 为属性集, $V = (0.4, 0.3, 0.2, 0.1)$ 为属性的权重向量, 方案 x 的属性值为 $A = \{0.6, 1.0, 0.8, 0.8\}$, 属性满意程度为 $\partial = (0.6, 0.6, 0.6, 0.6)$. 下面我们对方案 x 进行综合评价:

(1) 由式子 (4.1), (4.2) 计算得 $T_1 = 1, T_2 = 0.9, T_3 = 0.9, T_4 = 0.72$.

(2) 由式子 (4.3) 计算得优先权重向量为 $r_1 = 0.2841, r_2 = 0.2557, r_3 = 0.2557, r_4 = 0.2045$.

(3) 将属性值排序, 相应得到下表:

$a_{\text{ind}(k)}$	$v_{\text{ind}(k)}$	$r_{\text{ind}(k)}$
1.000	0.3	0.2557
0.800	0.2	0.2557
0.800	0.1	0.2045
0.600	0.4	0.2841

由上表知 $R_0 = 0, R_1 = 0.2557, R_2 = 0.5114, R_3 = 0.7159, R_4 = 1$, 由式子 (4.5) 可知

$$\begin{aligned} f(x) &= 1.2x, \quad 0 \leq x \leq 0.25; \\ f(x) &= 0.3 + 0.2(4x - 1), \quad 0.25 \leq x \leq 0.5; \\ f(x) &= 0.5 + 0.1(4x - 2), \quad 0.5 \leq x \leq 0.75; \\ f(x) &= 0.6 + 0.4(4x - 3), \quad 0.75 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

通过式子 (4.4) 计算修正后的属性权重为 $w_1 = 0.30456, w_2 = 0.20000, w_3 = 0.07180, w_4 = 0.41364$.

(4) 利用式子 (4.6) 计算方案 x 的综合评价值为 $C(x) = 0.770184$.

若将上述例子中属性满意度设定为 $\partial = (0.7, 0.7, 0.7, 0.7)$, 那么我们可以算得计算修正后的属性权重为 $w_1 = 0.26868, w_2 = 0.18956, w_3 = 0.09252, w_4 = 0.44924$, 从而得到方案 x 的综合评价值为 $C(x) = 0.74388$.

6 结论

本文对属性权重已知的多属性决策问题进行了更加细致的研究. 对属性间有优先级别关系, 各属性有满意度要求的多属性决策问题, 提出一种多属性决策信息集结方法. 该方法根据属性间的优先级别关系和属性的满意度要求来确定低级别的属性对高级别的属性的补偿的大小. 通过实例表明, 本文方法操作性比较强, 可以应用于相应的决策中.

参 考 文 献

- [1] Yager R R. On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decisionmaking [J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 1988, 18: 183–190.
- [2] Xu Z S. An overview of methods for determining OWA weights [J]. International Journal of Intelligent Systems, 2005, 20(8): 843–865.
- [3] Yager R R. Prioritized OWA aggregation [J]. Fuzzy Optim Decis Making, 2009, 8: 245–262.
- [4] Yager R R. Prioritized aggregation operators [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2008, 48: 263–274.
- [5] Torra V. The weighted OWA operator [J]. International Journal of Intelligent Systems, 1997, 12: 153–166.
- [6] Torra V, Narukawa Y. Modeling decision: information fusion and aggregation operators [M]. Berlin: Springer, 2007.
- [7] 兰晓坚, 屈彪. 求解分裂可行问题的一种半空间投影算法 [J]. 数学杂志, 2011, 31(3): 547–553.

A METHOD BASED ON PRIORITIZED AND SATISFACTION OF ATTRIBUTE FOR MULTIPLE ATTRIBUTE DECISION MAKING

WANG Si-feng ^a, QU Biao ^b

(*a. Computer Science College; b. School of Management,
Qufu Normal University, Rizhao 276826, China*)

Abstract: In this paper, the Multiple Attribute Decision Making in which the attributes have priorition and satisfaction is studied. By considering the compensatory between the lower prioritized attribute and the higher prioritized attribute based on the priorition and the satisfaction of attribute, we give a method for solving it, which makes the Decision Making more practical. The results obtained in this paper improve the related results in the literature.

Keywords: multiple attribute decision making; OWA operator; satisfaction of attribute

2010 MR Subject Classification: 90B50