Vol. 34 (2014)
No. 3

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

L-R Smash 双积的积分和类群元

于云霞 [1]，刘红江 [2]

(1. 新乡学院数学系, 河南 新乡 453000)

(2. 河南化工职业学院公共课教学部, 河南 郑州 450042)

摘 要: 本文研究了 L-R Smash 双积 $D\natural H$. 利用 D, H 的积分和类群元, 构造了 L-R Smash 双积 $D\natural H$ 的积分和类群元, 并讨论了 L-R Smash 双积 $D\natural H$ 和 D, H 的积分和类群元之间的关系. 推广了文献 [3] 中的结论.

关键词: L-R Smash 双积; 积分; 类群元

MR(2010) **主题分类号**: 16T05; 16S40 **中图分类号**: O153.3

文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2014)03-0577-06

1 引言

Panaite 和 Van Oystaeyen 在文献 [1] 中给出了 L-R Smash 积和 L-R Smash 余积的概念, 随后在文献 [2] 中又给出了 L-R Smash 积和 L-R Smash 余积构成 L-R Smash 双积的充分条件, 并且讨论了 L-R Smash 双积的辫子结构. 而 Radford 在文献 [3] 中讨论了普通 Smash 双积的积分和类群元. 本文推广了文献 [3] 中的结论并给出了 L-R Smash 双积 $D\natural H$ 的积分和类群元的一些性质. 为了方便起见, 首先给出一些相关概念.

本文均采用 Sweedler 记号. k 表示一个域, 代数、余代数、张量积都是域 k 上的. 设 C 是余代数, 对于 $c \in C$, 记 $\Delta(c) = \sum c_1 \otimes c_2$. 在下文中我们均省略和式符号 $\sum$.

定义 1.1 [1] 设 H 是一个双代数, $(A, \rightharpoonup, \leftharpoonup)$ 是一个 H - 双模代数, 在张量空间 $A \otimes H$ 上定义乘法:

$$(a \otimes h)(b \otimes g) = (a \leftharpoonup g_2)(h_1 \rightharpoonup b) \otimes h_2 g_1, \forall a, b \in A, h, g \in H.$$

关于此乘法和以 $1_A \otimes 1_H$ 为单位元构成的结合代数, 称为 L-R Smash 积, 记作 $A\natural H$.

定义 1.2 [1] 设 H 是一个双代数, C 是一个 H - 双余模余代数, 在张量空间 $C \otimes H$ 上定义余乘:

$$\Delta(c \otimes h) = (c_1^{<0>} \otimes c_2^{(-1)} h_1) \otimes (c_2^{(0)} \otimes h_2 c_1^{<1>}).$$

关于此余乘和以 $\varepsilon(c \otimes h) = \varepsilon_C(c)\varepsilon_H(h)$ 为余单位构成的余结合余代数, 称为 L-R Smash 余积, 记作 $C\natural H$.

*收稿日期: 2012-07-13 接收日期: 2012-11-26

基金项目: 河南省教育厅基础研究项目 (072300410050).

作者简介: 于云霞 (1980–), 女, 河南许昌, 讲师, 研究方向: Hopf 代数、量子群等.

定义 1.3 [2] 设 H 是一个双代数, D 是一个 H - 双余模余代数和 H - 双模代数, 在张量空间 $D\otimes H$ 上定义 L-R Smash 积和 L-R Smash 余积, 记作 $D\natural H$. 如果满足下列条件:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_D(1_D)=1,\ \varepsilon_D(cd)=\varepsilon_D(c)\varepsilon_D(d),\\
&\varepsilon_D(h\cdot d)=\varepsilon_D(d\cdot h)=\varepsilon_D(d)\varepsilon_H(h),\\
&\rho(1_D)=1_D\otimes 1_H,\quad \lambda(1_D)=1_H\otimes 1_D,\\
&\Delta_D(1_D)=1_D\otimes 1_D,\\
&\rho(cd)=c^{\langle 0\rangle}d^{\langle 0\rangle}\otimes c^{\langle 1\rangle}d^{\langle 1\rangle},\\
&\lambda(cd)=c^{(-1)}d^{(-1)}\otimes c^{(0)}d^{(0)},\\
&\Delta_D(h\cdot d)=h_1\cdot d_1\otimes h_2\cdot d_2,\\
&\Delta_D(d\cdot h)=d_1\cdot h_1\otimes d_2\cdot h_2,\\
&\Delta_D(cd)=c_1(c_2^{(-1)}\cdot d_1^{\langle 0\rangle})\otimes(c_2^{(0)}\cdot d_1^{\langle 1\rangle})d_2,\\
&(h_1\cdot d)^{(-1)}h_2\otimes(h_1\cdot d)^{(0)}=h_1d^{(-1)}\otimes h_2\cdot d^{(0)},\\
&(h\cdot d)^{\langle 0\rangle}\otimes(h\cdot d)^{\langle 1\rangle}=h\cdot d^{\langle 0\rangle}\otimes d^{\langle 1\rangle},\\
&(d\cdot h_2)^{\langle 0\rangle}\otimes h_1(d\cdot h_2)^{\langle 1\rangle}=d^{\langle 0\rangle}\cdot h_1\otimes d^{\langle 1\rangle}h_2,\\
&(d\cdot h)^{(-1)}\otimes(d\cdot h)^{(0)}=d^{(-1)}\otimes d^{(0)}\cdot h,\\
&c^{\langle 0\rangle}\cdot d^{(-1)}\otimes c^{\langle 1\rangle}\cdot d^{(0)}=c\otimes d.
\end{aligned}$$

那么 $D\natural H$ 构成一个双代数, 称为 L-R Smash 双积.

2 L-R Smash 双积的积分和类群元

这一节主要给出了 L-R Smash 双积 $D\natural H$ 作为双代数的一些简单性质，构造了 L-R Smash 双积的积分和类群元.

定理 2.1 设 H 是余交换的, 双代数 $D\natural H$ 是交换的当且仅当双代数 D 和双代数 H 是交换的且对任意的 $h\in H, d\in D$, $h\cdot d=d\cdot h$.

证 先证充分性. 由已知 H 是余交换的, 可得 $\Delta(h)=h_1\otimes h_2=h_2\otimes h_1$.

由已知 D 和 H 是交换的, 可得 $dd'=d'd$, $hh'=h'h$.

$$\begin{aligned}
&(d'\natural h')(d\natural h)=(d'\cdot h_2)((h')_1\cdot d)\natural(h')_2h_1\\
=\ &(d'\cdot h_1)((h')_2\cdot d)\natural(h')_1h_2=((h')_2\cdot d)(d'\cdot h_1)\natural h_2(h')_1\\
=\ &(d\cdot(h')_2)(h_1\cdot d')\natural h_2(h')_1=(d\natural h)(d'\natural h').
\end{aligned}$$

所以 $D\natural H$ 是交换的.

下证必要性. 如果 $D\natural H$ 是交换的, 则对任意 $d\natural h, d'\natural h'\in D\natural H$, $(d'\natural h')(d\natural h)=(d\natural h)(d'\natural h')$. 即

$$(d'\cdot h_2)((h')_1\cdot d)\natural(h')_2h_1=(d\cdot(h')_2)(h_1\cdot d')\natural h_2(h')_1. \tag{2.1}$$

对 (2.1) 式令 $d=d'=1_D$, 则 $hh'=h'h$, 即 H 是交换的.

对 (2.1) 式令 $h=h'=1_H$, 则 $dd'=d'd$, 即 D 是交换的.

对 (2.1) 式令 $d^{'}=1_D, h^{'}=1_H$, 则

$$h_2\cdot d\natural h_1=d\cdot h_1\natural h_2. \tag{2.2}$$

对 (2.2) 式两边同时用 id $\otimes\varepsilon$ 作用得 $h\cdot d=d\cdot h$.

定理 2.2 设 H 是交换的, 双代数 $D\natural H$ 是余交换的当且仅当双代数 D 和双代数 H 是余交换的，且对任意的 $d\in D, d^{(0)}\otimes d^{(-1)}=d^{\langle 0\rangle}\otimes d^{\langle 1\rangle}$.

证 先证充分性. 由已知 H 是交换的, 可得 $hh^{'}=h^{'}h$.

由已知 D 和 H 是余交换的, 可得 $\Delta(h)=h_1\otimes h_2=h_2\otimes h_1$, $\Delta(d)=d_1\otimes d_2=d_2\otimes d_1$,

$$\begin{aligned}\Delta(d\natural h)&=(d_1^{\langle 0\rangle}\natural d_2^{(-1)}h_1)\otimes(d_2^{(0)}\natural h_2d_1^{\langle 1\rangle})\\ &=\ (d_1^{(0)}\natural d_2^{\langle 1\rangle}h_1)\otimes(d_2^{\langle 0\rangle}\natural h_2d_1^{(-1)})\\ &=\ (d_2^{(0)}\natural d_1^{\langle 1\rangle}h_2)\otimes(d_1^{\langle 0\rangle}\natural h_1d_2^{(-1)})=\Delta^{cop}(d\natural h).\end{aligned}$$

所以 $D\natural H$ 是余交换的.

下证必要性. 已知 $D\natural H$ 是余交换的. 则

$$(d_1^{\langle 0\rangle}\natural d_2^{(-1)}h_1)\otimes(d_2^{(0)}\natural h_2d_1^{\langle 1\rangle})=(d_2^{(0)}\natural h_2d_1^{<1>})\otimes(d_1^{\langle 0\rangle}\natural d_2^{(-1)}h_1). \tag{2.3}$$

对 (2.3) 式两边用 $id\otimes\varepsilon\otimes id\otimes\varepsilon$ 作用得 $d_1\otimes d_2=d_2\otimes d_1$. 即 D 是余交换的.

对 (2.3) 式两边用 $\varepsilon\otimes id\otimes\varepsilon\otimes id$ 作用得 $h_1\otimes h_2=h_2\otimes h_1$. 即 H 是余交换的.

此时 (2.3) 式可以写成

$$(d_2^{\langle 0\rangle}\natural d_1^{(-1)}h_2)\otimes(d_1^{(0)}\natural h_1d_2^{\langle 1\rangle})=(d_2^{(0)}\natural h_2d_1^{\langle 1\rangle})\otimes(d_1^{\langle 0\rangle}\natural d_2^{(-1)}h_1). \tag{2.4}$$

对 (2.4) 式两边同时再用 $id\otimes\varepsilon\otimes id\otimes\varepsilon$ 作用得

$$d^{\langle 0\rangle}\natural 1_H\otimes 1_D\natural hd^{\langle 1\rangle}=d^{(0)}\natural 1_H\otimes 1_D\natural hd^{(-1)}. \tag{2.5}$$

对 (2.5) 式令 $h=1_H$, 则得 $d^{\langle 0\rangle}\otimes d^{\langle 1\rangle}=d^{(0)}\otimes d^{(-1)}$.

下面的定理给出了 $D\natural H$ 的积分和类群元与 D, H 的积分和类群元之间的关系.

定理 2.3 设 D 和 H 是双代数, $D\natural H$ 是 L-R Smash 双积, 则 $g\in D\natural H$ 是 $D\natural H$ 的类群元当且仅当 $g=d\natural h$, 这里 d 是 D 的类群元, h 是 H 的类群元, 并且 d 的左右余模作用是平凡的, 即

$$\lambda(d)=d^{(-1)}\otimes d^{(0)}=1_H\otimes d,$$
$$\rho(d)=d^{\langle 0\rangle}\otimes d^{\langle 1\rangle}=d\otimes 1_H.$$

证 充分性是显然的.

下证必要性. 若 $g=d\natural h$ 是 $D\natural H$ 的类群元, 则

$$\Delta(d\natural h)=(d_1^{\langle 0\rangle}\natural d_2^{(-1)}h_1)\otimes(d_2^{(0)}\natural h_2d_1^{\langle 1\rangle})=(d\natural h)\otimes(d\natural h), \tag{2.6}$$

$$\varepsilon(d\natural h)=\varepsilon_D(d)\varepsilon_H(h)=1.$$

对 (2.6) 式两边同时用 $\varepsilon\otimes id\otimes\varepsilon\otimes id$ 作用得

$$\varepsilon_D(d)h_1\otimes h_2=\varepsilon_D(d)h\otimes\varepsilon_D(d)h. \tag{2.7}$$

令 $d=1_D$, 则 (2.7) 式变为 $h_1\otimes h_2=h\otimes h$. 即

$$\begin{aligned}&\Delta(h)=h\otimes h,\\&\varepsilon(1_D\natural h)=1\varepsilon_H(h)=\varepsilon_H(h)=1.\end{aligned}$$

故 h 是 H 的类群元.

对 (2.6) 式两边同时再用 $id\otimes\varepsilon\otimes id\otimes\varepsilon$ 作用得

$$\varepsilon_H(h)d_1\otimes d_2=\varepsilon_H(h)d\otimes\varepsilon_H(h)d. \tag{2.8}$$

令 $h=1_H$, 则 (2.8) 式变为

$$d_1\otimes d_2=d\otimes d,$$

即

$$\begin{aligned}&\Delta(d)=d\otimes d,\\&\varepsilon(d\natural 1_H)=\varepsilon_D(d)1=\varepsilon_D(d)=1.\end{aligned}$$

故 d 是 D 的类群元.

对 (2.6) 式令 $h=1_H$, 则

$$\Delta(d\natural 1_H)=(d_1^{\langle 0\rangle}\natural d_2^{(-1)}1_H)\otimes(d_2^{(0)}\natural 1_H d_1^{\langle 1\rangle})=(d\natural 1_H)\otimes(d\natural 1_H). \tag{2.9}$$

对 (2.9) 式两边同时用 $\varepsilon\otimes id\otimes id\otimes\varepsilon$ 作用得

$$d^{(-1)}\otimes d^{(0)}=1_H\otimes d,$$

即 d 的左 -H 余模作用是平凡的.

对 (2.9) 式两边同时用 $id\otimes\varepsilon\otimes\varepsilon\otimes id$ 作用得

$$d^{\langle 0\rangle}\otimes d^{\langle 1\rangle}=d\otimes 1_H,$$

即 d 的右 -H 余模作用是平凡的.

定理 2.4 (1) 设 D 和 H 是双代数, $D\natural H$ 是 L-R Smash 双积. 如果 $x_D\natural x_H$ 是 $D\natural H$ 的右积分, 则 x_D 是 D 的右积分, x_H 是 H 的右积分.

(2) 设 $D\natural H$ 是一个有限维 Hopf 代数, 如果 $D\natural H$ 是半单的, 则存在左积分 $x_D\in D, x_H\in H$, 使得 $\varepsilon(x_D)=\varepsilon(x_H)=1$.

证 (1) 若 $x_D\natural x_H$ 是 $D\natural H$ 的右积分, 则对任意的 $d\natural h$ 下式成立:

$$(x_D\natural x_H)(d\natural h)=x_D\natural x_H\varepsilon(d)\varepsilon(h),$$

即

$$(x_D \cdot h_2)((x_H)_1 \cdot d)\natural(x_H)_2 h_1 = x_D \natural x_H \varepsilon(d)\varepsilon(h). \tag{2.10}$$

对 (2.10) 式两边同时用 $\varepsilon \otimes id$ 作用得

$$\varepsilon(x_D)\varepsilon(d)1_D\natural x_H h = \varepsilon(x_D)\varepsilon(d)1_D\natural\varepsilon(h)x_H.$$

故 $x_H h = \varepsilon(h)x_H$. 即 x_H 是 H 的右积分.

令 $h = 1_H$, 则

$$(x_D\natural x_H)(d\natural 1_H) = x_D\natural x_H\varepsilon(d)\varepsilon(1_H),$$

即

$$x_D((x_H)_1 \cdot d)\natural(x_H)_2 = x_D\natural x_H\varepsilon(d). \tag{2.11}$$

对 (2.11) 式两边同时用 $id \otimes \varepsilon$ 作用得

$$x_D(x_H \cdot d) = x_D\varepsilon(x_H \cdot d).$$

故 x_D 是 D 的右积分.

(2) 设 $D\natural H$ 是半单的, 则存在左积分 $d\natural h \in D\natural H$, 使得 $\varepsilon_D(d)\varepsilon_H(h) = 1$. 由于 $d\natural h$ 是 $D\natural H$ 的左积分, 对任意的 $b\natural 1_H$, 下式成立:

$$(b\natural 1_H)(d\natural h) = \varepsilon(b\natural 1_H)(d\natural h),$$

即

$$b \cdot h_2 d\natural h_1 = \varepsilon(b)d\natural h. \tag{2.12}$$

对 (2.12) 式两边同时用 $id \otimes \varepsilon$ 作用得

$$(b \cdot h)d = \varepsilon(b)\varepsilon(h)d = \varepsilon(b \cdot h)d.$$

故 d 是 D 的左积分.

令 $x_D = \varepsilon(h)d$, 显然 x_D 是 D 的左积分, 且 $\varepsilon(x_D) = 1$.

同理, 对任意的 $1_D\natural g$, 下式成立:

$$(1_D\natural g)(d\natural h) = \varepsilon(1_D\natural g)(d\natural h),$$

即

$$g_1 \cdot d\natural g_2 h = \varepsilon(g)(d\natural h). \tag{2.13}$$

对 (2.13) 式两边同时用 $\varepsilon \otimes id$ 作用得

$$\varepsilon(d)\natural gh = \varepsilon(d)\natural\varepsilon(g)h.$$

故 h 是 H 的左积分.

令 $x_H = \varepsilon(d)h$, 显然 x_H 是 H 的左积分, 且 $\varepsilon(x_H) = 1$.

参 考 文 献

[1] Panaite F, Oystaeyen F V. L-R Smash product for (quasi) Hopf algebras [J]. J. Algebra, 2007, 309(1): 168–189.

[2] Panaite F, Oystaeyen F V. L-R Smash biproducts,double biproducts and a braided category of Yetter-Drinfeld-Long bimodules[J]. arXiv:0805.3432v1 [math.QA]. 22 May 2008.

[3] Radford D E. The structure of Hopf algebras with a projection[J]. J. Algebra, 1985, 92: 322–347.

[4] Sweedler M E. Hopf algebras[M]. New York: Benjamin, 1969.

THE INTEGRALS AND GROUPLIKES OF L-R SMASH BIPRODUCTS

YU Yun-xia[1] , LIU Hong-jiang[2]

(*1.Department of Mathematics, Xinxiang University, Xinxiang 453000, China*)

(*2.Public Course Teaching Department, Henan Vocational College of Chemical Technology, Zhengzhou 450042, China*)

Abstract: In this paper, we study L-R Smash biproducts $D\natural H$. By the integrals and grouplikes of D and H, we construct the integrals and grouplikes of $D\natural H$. At the same time, we discuss the relations between the integrals and grouplikes of $D\natural H$ and that of D and H, which develops the results in [3].

Keywords: L-R Smash biproducts; integrals; grouplikes

2010 MR Subject Classification: 16T05; 16S40