

线性互补问题与多目标优化

雍龙泉¹, 刘三阳², 邓方安¹, 张建科³, 杨国平²

(1. 陕西理工学院数学与计算机科学学院, 陕西 汉中 723001)

(2. 西安电子科技大学理学院, 陕西 西安 710071)

(3. 西安邮电大学理学院, 陕西 西安 710121)

摘要: 本文研究了求解线性互补问题的一类新方法: 把线性互补问题转化为多目标优化问题, 利用多目标优化有效解的定义, 给出了零有效解的概念; 进而获得多目标优化问题的零有效解就是线性互补问题的最优解. 最后给出了有解、无解线性互补问题, 并分别把这些问题转化为多目标优化, 采用极大极小方法求解转化后的多目标优化问题. 数值实验结果表明了该方法的正确性和有效性, 完善了文献 [19] 的数值结果.

关键词: 线性互补问题; 多目标优化问题; 极大极小方法

MR(2010) 主题分类号: 90C29; 90C33

中图分类号: O221.7

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2014)03-0546-07

1 引言

互补问题是由美国的 R.W.Cottle 在其 1964 年博士学位论文中首先提出的. 互补问题是从线性规划与非线性规划的推广而形成的, 所以它的算法研究与可解性研究一样, 受到了研究者的重视. 互补问题的研究包括: 可解性、解集的拓扑性质、稳定性、误差界以及不同类型的互补问题的算法等. 互补问题被提出后, 很快在工程技术中得到了重要应用, 许多文献讨论了它在力学、交通、经济、金融、控制等许多领域中的广泛应用^[1-2].

线性互补问题就是求一个向量 $x \in R^n$, 使得 $x \geq 0, Mx + q \geq 0, x^T(Mx + q) = 0$. 线性互补问题是一类具有广泛实际应用背景的优化问题, 它也为线性规划、二次规划提供了一个统一研究的框架, 因此求解线性互补问题的有效算法一直受到学术界的重视^[3-4]. 线性互补问题简记为 $LCP(M, q)$, 对 $LCP(M, q)$ 的研究, 主要集中在理论与算法两个方面, 前者主要研究其解的存在性、唯一性、稳定性及灵敏度分析, 而后者主要建立其有效的求解方法和相应的收敛性分析. 求解线性互补问题的算法有很多, 经典的有 Lemke 算法; 近年来出现的一些具有多项式复杂性的算法, 诸如投影法^[5]、内点法^[6-9]、非光滑牛顿法^[10]、光滑牛顿法等^[11-12].

线性互补问题的一个研究热点就是对矩阵 M 进行分类, 目前已经成熟的分类有 P 矩阵类, P_0 矩阵类, P_* 矩阵类, Q 矩阵类, R 矩阵类, R_0 矩阵类, 充分矩阵类等^[2]. 然后针对不同的矩阵类给出不同的算法. 另一个研究热点是光滑牛顿法. 光滑牛顿法的一个重点问题就是 NCP 函数的构造 (函数 $\varphi(a, b) : R^2 \rightarrow R$ 称为是 NCP 函数, 如果

*收稿日期: 2013-01-24

接收日期: 2013-04-17

基金项目: 国家自然科学基金资助 (60974082); 陕西省教育厅科研计划项目 (12JK0863); 西安电子科技大学研究生创新基金项目 (K50513100004).

作者简介: 雍龙泉 (1980-), 男, 陕西洋县, 副教授, 主要研究方向: 最优化理论与算法.

$\varphi(a, b) = 0 \Leftrightarrow a \geq 0, b \geq 0, ab = 0$), 因为许多算法都是通过构造 NCP 函数将互补问题转化为方程组或最小化问题来进行求解的. 常见 NCP 函数有 Fisher-Burmeister 函数、CHKS 函数, 更多的 NCP 函数可以参考文献 [2,13–14].

近年来, 随着各种智能算法的出现, 也开始尝试用智能算法来求解互补问题. 具体方法就是把互补问题转化为无约束优化问题, 然后用智能算法进行求解 [15–17].

本文在文献 [19] 的基础上, 对线性互补问题和多目标优化进行了深入的研究. 首先把线性互补问题转化为多目标优化问题, 借助于多目标优化有效解的定义, 给出了零有效解的概念, 进而得到多目标优化问题的零有效解就是线性互补问题的最优解. 最后给出了有解、无解线性互补问题, 并分别把这些问题转化为多目标优化, 采用极大极小方法求解转化后的多目标优化问题. 数值实验结果表明了该方法的正确性和有效性.

本文组织如下: 第一节把线性互补问题转化为多目标优化问题, 并给出了多目标优化解的一些概念; 第二节给出求解多目标优化的极大极小法; 第三节给出数值例子; 最后对本文进行了总结.

2 问题的转化

本文研究如下线性互补问题

$$(P1) \quad x \geq 0, Mx + q \geq 0, x^T(Mx + q) = 0, \text{ 其中 } x, q \in R^n, M \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

多目标优化问题的一般形式为

$$(MOP) \quad \begin{cases} \min & (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)), \\ \text{s.t.} & x \in X, \end{cases}$$

这里

$$\begin{aligned} f_i(x) &: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1, i = 1, \dots, n, X = \{x | g(x) \geq 0\}, \\ g(x) &= (g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x)), g_i(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1, i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

定义 2.1 设 $x^* \in X$, 若对任意 $x \in X$, 都有 $f_i(x^*) \leq f_i(x), i = 1, 2, \dots, n$, 则称 x^* 为问题 (MOP) 的最优解.

定义 2.2 若 $x^* \in X$, 且不存在另一个可行点 $x' \in X$, 使得 $f_i(x') \leq f_i(x^*), i = 1, 2, \dots, n$ 成立, 且其中至少有一个严格不等式成立, 则称 x^* 是问题 (MOP) 的一个有效解. 记问题 (MOP) 的有效解集合为 X_E .

有效解又称 Pareto 最优解, 非劣解, 非支配解等 [18].

定义 2.3 若 $x \in X_E$, 且有 $f_i(x) = 0, i = 1, 2, \dots, n$ 成立, 则称 x 为问题 (MOP) 的零有效解.

下面我们把问题 (P1) 转化为一个优化问题. 记 $X = \{x | x \geq 0, Mx + q \geq 0\}$, $y = Mx + q \geq 0$, 我们考虑如下多目标优化问题

$$(P2) \quad \begin{cases} \min & (x_1y_1, x_2y_2, \dots, x_ny_n), \\ \text{s.t.} & x \in X. \end{cases}$$

引理 2.1 若 $X \neq \emptyset$, 则问题 (P2) 存在有效解.

引理 2.2 若 $X \neq \emptyset$, 则问题 (P1) 无解当且仅当问题 (P2) 存在非零有效解.

引理 2.3 若问题 (P1) 的矩阵 M 是 P 矩阵类, 则问题 (P2) 仅存在一个零有效解.

引理 2.4 若问题 (P1) 的矩阵 M 是 Q 矩阵类, 则问题 (P2) 至少存在一个零有效解.

上述引理的证明见参考文献 [19–21].

根据引理 2.1 和引理 2.2, 得到如下结论.

定理 2.1 若 $x \in X_E$ 是多目标优化问题 (P2) 的零有效解当且仅当 x 是问题 (P1) 的最优解.

证 若 $x \in X_E$ 是问题 (P2) 的零有效解, 根据可行性则有 $x \geq 0, Mx + q \geq 0$ 成立, 即 $x \in X$. 又因为 $f_i(x) = 0, i = 1, 2, \dots, n$, 从而 $x_i y_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$. 因此 x 是问题 (P1) 的最优解.

反之, 若 x 是问题 (P1) 的最优解, 则 $x \geq 0, Mx + q \geq 0, x^T(Mx + q) = 0$, 也即 $x_i y_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$, 且不存在另一个可行点 $x_t \in X$, 使得 $x_t^T(Mx_t + q) < 0$ 因此, x 是问题 (P2) 的零有效解.

定理 2.1 给出了一个求解线性互补问题的新思路, 通过求出多目标优化问题 (P2) 的零有效解, 就可以获得线性互补问题的最优解. 下面我们采用极大极小方法来求解多目标优化问题 (P2).

3 极大极小法求解多目标优化问题

问题 (P2) 的极大极小模型为

$$(P3) \quad \begin{cases} \min \max (x_1 y_1, x_2 y_2, \dots, x_n y_n), \\ s.t. \quad x \in X. \end{cases}$$

推论 3.1 若问题 (P3) 存在非零最优目标值, 则问题 (P1) 无解.

证 若 (P3) 存在非零最优目标值, 则问题 (P2) 存在非零有效解; 结合引理 2.2 可知, 问题 (P1) 无解.

推论 3.2 若 $x^* \in X$ 是问题 (P3) 的最优解, 且 x^* 使得问题 (P3) 目标值恰好是零, 则 x^* 也是问题 (P1) 的最优解.

证 由于 $x^* \in X$ 是问题 (P3) 的最优解, 且 x^* 使得问题 (P3) 目标值恰好是零, 则 x^* 是问题 (P2) 的零有效解; 结合定理 2.1 可知, x^* 也是问题 (P1) 的最优解.

这样, 我们就可以通过求解问题 (P3) 来判断问题 (P1) 是否有解, 进而在有解的情况下就可以求出问题 (P1) 的最优解.

求解极大极小问题 (P3) 的方法很多, 这里就不再赘述. 为了快速求解问题 (P3), 我们直接采用 Matlab 系统中的极大极小函数 `fminimax` 进行求解 [22].

4 数值实验

为了测试本文方法的求解性能, 下面我们选择如下 4 个线性互补问题进行数值计算, 这些算例在变分不等式和互补问题的文章中经常出现, 作为标准测试函数 [20–21, 23–25].

算例 4.1 考虑线性互补问题, 其中 $M = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $q = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

解 把线性互补问题转化为如下多目标优化问题

$$(MOP1) \begin{cases} \min & (-x_1^2 + x_1x_2 - 2x_1, x_1x_2 + x_2^2 - x_2), \\ \text{s.t.} & -x_1 + x_2 - 2 \geq 0, \\ & x_1 + x_2 - 1 \geq 0, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

下面采用极大极小方法求出 (MOP1) 有效解.

利用函数 fminimax 求得相应极大极小问题的最优解 $x^* = (0, 2)^T$, 此时 (MOP1) 相应的目标值为 $(0, 2)^T$, 对应极大极小问题的最优目标值为 2, 利用推论 3.1, 则此线性互补问题无解.

算例 4.2 考虑线性互补问题, 其中 $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $q = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

解 把线性互补问题转化为如下多目标优化问题

$$(MOP2) \begin{cases} \min & (x_1^2 + x_1x_2 - 2x_1, -5x_1x_2 + x_2^2 - x_2, -x_1x_3 + x_2x_3 - 2x_3), \\ \text{s.t.} & x_1 + x_2 - 2 \geq 0, \\ & -5x_1 + x_2 - 1 \geq 0, \\ & -x_1 + x_2 - 2 \geq 0, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

采用函数 fminimax 求解相应极大极小问题的最优解 $x^* = (0.2374, 2.2374, 0)^T$, 此时相应的 (MOP2) 相应的目标值为 $(0.1127, 0.1127, 0)^T$, 对应极大极小问题的最优目标值为 0.1127, 利用推论 3.1, 则此线性互补问题无解.

事实上, 问题 (MOP2) 的有效解为

$$X_E = \left\{ (x_1, x_2, x_3)^T : x_1 = (1 - \lambda)/4, x_2 = 2\lambda + (9 - \lambda)/4, x_3 = \tau \geq 0, 0 \leq \lambda \leq 1 \right\}.$$

把此有效解代入 (MOP2), 得到 (MOP2) 的前两个目标值如下

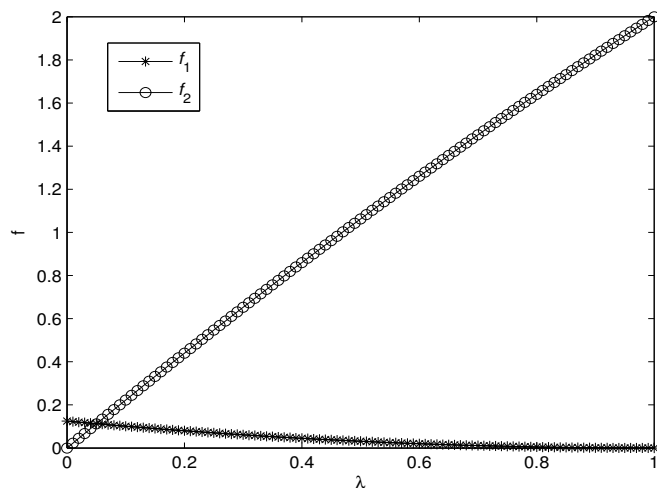
$$\begin{aligned} f_1 &= x_1^2 + x_1x_2 - 2x_1 = \frac{(\lambda - 1)^2}{8}, 0 \leq \lambda \leq 1, \\ f_2 &= -5x_1x_2 + x_2^2 - x_2 = \frac{-\lambda(\lambda - 9)}{4}, 0 \leq \lambda \leq 1, \end{aligned}$$

这两个函数在 $0 \leq \lambda \leq 1$ 上的图像如图 1 所示.

由图 1 可知, 在有效解内, 此问题不存在零有效解. 即找不到 $\lambda^* \in [0, 1]$, 使得 $f_i = 0, i = 1, 2, 3$ 同时成立. 从而相应的线性互补问题就无解.

算例 4.3 考虑线性互补问题, 其中 $M = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $q = \begin{bmatrix} 14 \\ -11 \\ -7 \end{bmatrix}$.

解 把线性互补问题转化为如下多目标优化问题:

图 1: 函数 f_1, f_2 在区间 $[0, 1]$ 上的图像

$$(\text{MOP3}) \left\{ \begin{array}{l} \min \left(3x_1^2 - 2x_1x_2 - x_1x_3 + 14x_1, -2x_1x_2 + 2x_2^2 + x_2x_3 - 11x_2, \right. \\ \quad \left. -x_1x_3 + x_2x_3 + x_3^2 - 7x_3 \right), \\ \text{s.t.} \quad 3x_1 - 2x_2 - x_3 + 14 \geq 0, \\ \quad -2x_1 + 2x_2 + x_3 - 11 \geq 0, \\ \quad -x_1 + x_2 + x_3 - 7 \geq 0, \\ \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{array} \right.$$

采用函数 fminimax 求解相应极大极小问题的最优解 $x^* = (0, 4, 3)^T$, 验证可知 $x^* = (0, 4, 3)^T$ 是问题 (MOP3) 的零有效解, 从而此线性互补问题的解为 $x^* = (0, 4, 3)^T$.

算例 4.4 考虑线性互补问题, 其中 $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $q = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

解 把线性互补问题转化为如下多目标优化问题

$$(\text{MOP4}) \left\{ \begin{array}{l} \min \left(2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_1x_5 - x_1, x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_2x_5 - x_2, \right. \\ \quad \left. x_1x_3 + 2x_2x_3 - x_3, 3x_1x_4 + x_2x_4 - x_4, 2x_1x_5 + 3x_2x_5 - x_5 \right), \\ \text{s.t.} \quad 2x_3 + 2x_4 + x_5 - 1 \geq 0, \\ \quad x_3 + 2x_4 + 2x_5 - 1 \geq 0, \\ \quad x_1 + 2x_2 - 1 \geq 0, \\ \quad 3x_1 + x_2 - 1 \geq 0, \\ \quad 2x_1 + 3x_2 - 1 \geq 0, \\ \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{array} \right.$$

采用函数 fminimax 求解相应极大极小问题的最优解为 $x^* = (0.1960, 0.4121, 0, 0.5000, 0)^T$, 验证可知 $x^* = (0.1960, 0.4121, 0, 0.5000, 0)^T$ 是问题 (MOP4) 的零有效解, 从而该线性互补问题的解为 $x^* = (0.1960, 0.4121, 0, 0.5000, 0)^T$.

事实上该线性互补问题的解为 $x^* = (\alpha, \beta, 0, 0.5, 0)^T$, α 与 β 满足 $3\alpha + \beta = 1$, 见文献 [23]. 本文的方法执行一次只能得到一个零有效解. 若要得到多个不同的零有效解, 则需要多次执行该算法, 且每次需要选取不同的初始点.

5 结束语

本文将线性互补转化为多目标优化问题进行求解, 指出多目标优化问题的零有效解是线性互补问题的最优解. 4 个测试算例计算结果表明, 本文的方法是有效的. 因此本文方法可作为线性互补问题目前算法的一个重要补充和完善.

参 考 文 献

- [1] Billups S C, Murty K G. Complementarity problems [J]. J. Comp. Appl. Math., 2000, 124: 303–318.
- [2] 韩继业, 修乃华, 戚厚铎. 非线性互补理论与算法 [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 2006.
- [3] Cottle R W, Pang J S, Stone R E. The linear complementarity problems[M]. Boston: Academic Press, 1992.
- [4] Murty K G. Linear complementarity, linear and nonlinear programming[M]. Berlin: Heldermann Verlag, 1988.
- [5] Xiu N H, Zhang J. Some recent advances in projection-type methods for variational inequalities [J]. J. Comput Appl. Math., 2003, 152: 559–571.
- [6] Kojima M, Megiddo N, Yoshise A. A unified approach to interior point algorithms for linear complementary problem[C]. Lecture Notes in Computer Science 538, Berlin: Springer-Verlag, 1991.
- [7] Stephen J W. An infeasible-interior-point algorithm for linear complementarity problems[J]. Math. Progr., 1994, 64: 29–51.
- [8] 何尚录. 求解互补问题的不可行内点法及其计算复杂性 [J]. 中国科学 A 辑, 2000, 30(11): 983–989.
- [9] Y. Zhang. On the convergence of a class of infeasible-interior-point methods for the horizontal linear complementarity problem [J]. SIMA J. Optim. 1994,4: 208–227
- [10] Qi L, Sun D. A survey of some nonsmooth equations and smoothing Newton methods[A]. Andrew E, Barney G, Robin H, Daniel R. Progress in Optimization[C]. New York: Springer-Verlag: 1999.
- [11] Li D, Fukushima M. Smoothing Newton and quasi-newton methods for mixed complementarity problems [J]. Comput. Optim. Appl., 2000, 17: 203–230.
- [12] Qi L, Sun D, Zhou G. A new look at smoothing Newton methods for nonlinear complementarity problems and box constrained variational inequalities [J]. Math. Progr., 2000, 87: 1–35
- [13] Sun D, Qi L Q. On NCP-functions [J]. Comput. Optim. Appl. 1999, 13: 201–220.
- [14] Chen J S, Pan S. A family of NCP-functions and a descent method for the nonlinear complementarity problem [J]. Comput. Opti. Appl., 2008, 40: 389–404.
- [15] 张建科. 非线性互补问题的粒子群算法 [J]. 计算机工程与应用, 2009, 45 (27): 43–45.
- [16] 雍龙泉, 陈涛, 张建科. 求解互补问题的极大熵社会认知算法 [J]. 计算机工程与设计, 2010, 31(3): 616–618.
- [17] 雍龙泉, 陈涛, 张建科. 求解互补问题的极大熵差分进化算法 [J]. 计算机应用研究, 2010, 27(4): 1308–1310.

- [18] Altannar C, Panos M Pardalos. A survey of recent developments in multiobjective optimization [J]. Ann. Oper. Res., 2007, 154(1): 29–50.
- [19] Kostreva M M, Wiecek M M. Linear complementarity problems and multiple objective programming [J]. Math. Prog., 1993, 60: 349–359.
- [20] Isac G, Kostreva M M, Wiecek M M. Multiple objective approximation of feasible but unsolvable linear complementarity problems [J]. J. Opti. The. Appl., 1995, 86: 389–405.
- [21] Kostreva M M, Yang X Q. Unified approaches for solvable and unsolvable linear complementarity problems [J]. European J. Oper. Res., 2004, 158: 409–417.
- [22] 薛定宇, 陈阳泉. 高等应用数学问题的 MATLAB 求解 (第二版) [M]. 北京: 清华大学出版社, 2008.
- [23] 雍龙泉, 邓方安, 赵景服. 线性互补问题的一种混合整数线性规划解法 [J]. 陕西理工学院学报 (自然科学版), 2007, 23(4): 80–82.
- [24] 雍龙泉. 求解单调线性互补的势下降内点算法 [J]. 陕西理工学院学报 (自然科学版), 2009, 25(4): 52–57.
- [25] 雍龙泉, 邓方安, 陈涛. 单调线性互补的一种内点算法 [J]. 数学杂志, 2009, 29(5): 681–686.

LINEAR COMPLEMENTARITY PROBLEM AND MULTIOBJECTIVE OPTIMIZATION

YONG Long-quan ¹, LIU San-yang ², DENG Fang-an ¹,
ZHANG Jian-ke ³, YANG Guo-ping ²

(1.School of Mathematics and Computer Science, Shaanxi University of Technology,
Hanzhong 723001, China)

(2.School of Science, Xidian University, Xi'an 710071, China)

(3.School of Science, Xi'an University of Posts and Telecommunications, Xi'an 710121, China)

Abstract: A new method is proposed for the linear complementarity problem (LCP). First we reduce the LCP into a multiobjective optimization problem (MOP), and we define zero-efficient solution based on the efficient solution to MOP. Then we indicate that zero-efficient solution to the MOP is also the solution to the LCP. Finally some solvable and unsolvable LCP examples are transformed respectively into MOP and solved by minimax method. Numerical results indicate that the proposed method is effective, which improved numerical results in [19].

Keywords: linear complementarity problem; multiobjective optimization problem; minimax method.

2010 MR Subject Classification: 90C29; 90C33