Vol. 34 (2014)
No. 2

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

关于 Fermat 素数与 L - 函数的加权均值

刘宝利

(西安航空职业技术学院计算机工程学院，陕西 阎良 710089)

摘 要: 本文研究了一类以 Fermat 素数为模的 Dirichlet L - 函数加权均值的计算问题. 利用初等方法以及 Dirichlet 和的性质, 获得了一个有趣的计算公式.

关 键 词: Fermat 素数; L - 函数; Dedekind 和; 加权均值; 计算公式

MR(2010) **主题分类号**: 11B83 **中 图 分 类 号**: O156.4

文 献 标 识 码: A **文 章 编 号**: 0255-7797(2014)02-0393-04

1 引言及结论

对于任意非负整数 n, 著名的 Fermat 数 F_n 定义为: $F_n = 2^{2^n} + 1$. 例如 $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$, $F_4 = 65537$, $\cdots$. 这前五个数都是素数. 于是 Fermat 曾猜测对所有非负整数 n, F_n 为素数. 然而, 在 1732 年, Euler 发现 $F_5 = 641 \times 6700417$ 为合数! 这些数在平面几何中也是有趣的, Gauss 曾证明如果 F_n 是一个素数, 那么正 F_n 边形能够用直尺和圆规画出. 是否存在无穷多个 Fermat 素数仍然是一个未解决的难题. 目前仅仅知道很少几个 Fermat 素数. 有关它的内容可参阅文献 [1, 8].

本文的主要目的是利用初等及解析方法研究一类以 Fermat 素数为模的 Dirichlet L - 函数加权均值的计算问题, 获得一个有趣的计算公式. 具体地说如下:

定理 对任意非负整数 n, 如果 F_n 为素数, 那么我们有恒等式

$$\sum_{\substack{\chi \bmod F_n \\ \chi(-1)=-1}} \chi\left(F_{n-1}\right)|L(1,\chi)|^2 = \frac{\pi^2}{24}\cdot\frac{1}{F_n}\cdot\left(1-\frac{1}{F_n}\right)\cdot\left(F_{n-1}-1\right)\cdot\left(F_{n-1}-2\right)\cdot\left(F_{n-1}-3\right),$$

其中 $\sum\limits_{\substack{\chi \bmod F_n \\ \chi(-1)=-1}}$ 表示对模 F_n 的所有奇特征求和.

特别当 $n = 3$ 及 4 时, 我们有下面的恒等式

$$\sum_{\substack{\chi \bmod 257 \\ \chi(-1)=-1}} \chi(17)\cdot|L(1,\chi)|^2 = \frac{35840}{66049}\cdot\pi^2$$

及

$$\sum_{\substack{\chi \bmod 65537 \\ \chi(-1)=-1}} \chi(257)\cdot|L(1,\chi)|^2 = \frac{45277511680}{4295098369}\cdot\pi^2.$$

*收稿日期: 2013-06-23 接收日期: 2013-09-10

基金项目: 国家自然科学基金 (11071194); 陕西省教育厅 2013 年科学研究计划项目 (2013JK0566) 资助.

作者简介: 刘宝利 (1979–), 女, 陕西宝鸡, 讲师，主要研究方向：解析数论.

2 几个引理

为方便定理的证明, 我们需要借助于 Dedekind 和的性质, 这里给出其定义: 对任意正整数 k 及任意整数 h, 经典的 Dedekind 和 $S(h,k)$ 定义为

$$S(h,k)=\sum_{a=1}^{k}\left(\left(\frac{a}{k}\right)\right)\left(\left(\frac{ah}{k}\right)\right),$$

其中

$$((x))=\begin{cases} x-[x]-\frac{1}{2}, & \text{如果 } x \text{ 不是一个整数},\\ 0, & \text{如果 } x \text{ 是一个整数}.\end{cases}$$

关于这一和式的性质, 有不少数论专家及数论爱好者进行了研究, 获得了一系列有意义的结论, 参阅文献 [2–7]. 特别是张文鹏教授 [7] 建立了这一和式与 Dirichlet L- 函数之间的转换关系, 即如下:

引理 2.1 设 $q>2$ 是一个整数, 那么对任意正整数 a 且 $(a,\ q)=1$, 有恒等式

$$S(a,\ q)=\frac{1}{\pi^2 q}\sum_{d|q}\frac{d^2}{\phi(d)}\sum_{\substack{\chi \bmod d\\ \chi(-1)=-1}}\chi(a)|L(1,\chi)|^2,$$

其中 $\phi(n)$ 为 Euler 函数, $\sum\limits_{\substack{\chi \bmod d\\ \chi(-1)=-1}}$ 表示对模 d 的所有奇特征求和, $L(s,\chi)$ 是对应于 χ 的 L -函数.

证 参阅文献 [8] 中引理 2.

引理 2.2 对于任意正整数 n, 有恒等式

$$F_n\cdot S\left(F_{n-1},F_n\right)=\frac{1}{24}\cdot\left(F_{n-1}-1\right)\cdot\left(F_{n-1}-2\right)\cdot\left(F_{n-1}-3\right).$$

证 首先对任意正整数 $m>n$, 我们有 $(F_n,F_m)=1$. 事实上由 Fermat 数的定义及因式分解有

$$F_m=2^{2^m}+1=2^{2^m}-1+2=(2^{2^{m-1}}-1)\cdot(2^{2^{m-1}}+1)+2=(2^{2^{m-1}}-1)\cdot F_{m-1}+2.$$

反复使用这个公式有

$$F_m=\left(2^{2^n}-1\right)\cdot F_n\cdot F_{n+1}\cdots F_{m-1}+2.$$

注意到 F_n 为奇数, 所以由此及最大公约数的性质立刻推出 $(F_n,F_m)=(2,F_n)=1$. 其次, 由 Dedekind 和的互反公式 (参阅文献 [6]) 知道当正整数 $(h,q)=1$ 时, 有

$$S(h,q)+S(q,h)=\frac{h^2+q^2+1}{12hq}-\frac{1}{4}. \tag{2.1}$$

由 (2.1) 式并应用 $(F_n,F_m)=1$, 也可得到

$$\begin{aligned} S\left(F_n,F_{n-1}\right)&=S\left(2,F_{n-1}\right)=\frac{F_{n-1}^2+4+1}{24F_{n-1}}-\frac{1}{4}-S\left(F_{n-1},2\right)\\ &=\frac{F_{n-1}^2+4+1}{24F_{n-1}}-\frac{1}{4}-S(1,2)=\frac{F_{n-1}^2+4+1}{24F_{n-1}}-\frac{1}{4}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

注意到 $F_{n-1}^2=\left(2^{2^{n-1}}+1\right)^2=F_n+2F_{n-1}-2$, 结合 (2.1) 及 (2.2) 式, 有

$$
\begin{aligned}
&S(F_{n-1},F_n)=\frac{F_n^2+F_{n-1}^2+1}{12F_nF_{n-1}}-\frac{1}{4}-S(F_n,F_{n-1})=\frac{F_n^2+F_{n-1}^2+1}{12F_nF_{n-1}}-\frac{F_{n-1}^2+4+1}{24F_{n-1}}\\
= &\frac{F_n}{12F_{n-1}}+\frac{F_n+2F_{n-1}-1}{12F_nF_{n-1}}-\frac{F_{n-1}}{24}-\frac{5}{24F_{n-1}}\\
= &\frac{F_{n-1}^2-2F_{n-1}+2}{12F_{n-1}}+\frac{F_n+2F_{n-1}-1}{12F_nF_{n-1}}-\frac{F_{n-1}}{24}-\frac{5}{24F_{n-1}}\\
= &\frac{1}{24F_n}(F_nF_{n-1}-4F_n+\frac{F_n}{F_{n-1}}+4-\frac{2}{F_{n-1}})\\
= &\frac{1}{24F_n}((F_{n-1}^2-2F_{n-1}+2)F_{n-1}-4(F_{n-1}^2-2F_{n-1}+2)+\frac{F_{n-1}^2-2F_{n-1}+2}{F_{n-1}}+4-\frac{2}{F_{n-1}})\\
= &\frac{1}{24F_n}(F_{n-1}^3-6F_{n-1}^2+11F_{n-1}-6)=\frac{1}{24F_n}(F_{n-1}-1)(F_{n-1}-2)(F_{n-1}-3).
\end{aligned}
$$

所以有

$$F_n\cdot S\left(F_{n-1},F_n\right)=\frac{1}{24}\left(F_{n-1}-1\right)\left(F_{n-1}-2\right)\left(F_{n-1}-3\right).$$

于是证明了引理 2.2.

3 定理的证明

这节我们将完成定理的证明. 事实上如果 F_n 为素数, 那么 $\phi\left(F_n\right)=F_n-1$, 应用引理 2.1 及引理 2.2 有

$$
\begin{aligned}
S\left(F_{n-1},F_n\right) &= \frac{1}{\pi^2F_n}\sum_{d\mid F_n}\frac{d^2}{\phi(d)}\sum_{\substack{\chi \bmod d\\ \chi(-1)=-1}}\chi\left(F_{n-1}\right)|L(1,\chi)|^2\\
&= \frac{F_n^2}{\pi^2\cdot\phi\left(F_n\right)}\sum_{\substack{\chi \bmod F_n\\ \chi(-1)=-1}}\chi\left(F_{n-1}\right)|L(1,\chi)|^2
\end{aligned}
$$

或者

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\substack{\chi \bmod F_n\\ \chi(-1)=-1}}\chi\left(F_{n-1}\right)|L(1,\chi)|^2=\pi^2\cdot\frac{1}{F_n}\cdot\left(1-\frac{1}{F_n}\right)\cdot F_n\cdot S\left(F_{n-1},F_n\right)\\
= &\frac{\pi^2}{24}\cdot\frac{1}{F_n}\cdot\left(1-\frac{1}{F_n}\right)\cdot\left(F_{n-1}-1\right)\cdot\left(F_{n-1}-2\right)\cdot\left(F_{n-1}-3\right).
\end{aligned}
$$

于是完成了定理的证明.

由引理 2.2 也不难看出对任意正整数 $n\geq 2$, $F_n\cdot S\left(F_{n-1},F_n\right)$ 是正整数, 同时还包含了一系列同余式, 这里不妨列举几个, 例如:

$$F_n\cdot S\left(F_{n-1},F_n\right)\equiv 0 \bmod 2^{2^{n-1}-2}\cdot F_{n-2}\cdot F_{n-3}\cdots F_1\cdot F_0$$

及

$$2^{2^{n-1}-2} | F_n \cdot S\left(F_{n-1}, F_n\right), \quad 2^{2^{n-1}-1} \nmid F_n \cdot S\left(F_{n-1}, F_n\right).$$

参 考 文 献

[1] Apostol T M. Introduction to analytic number theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1976.

[2] Liu H N. On the mean values of the homogeneous Dedekind sums and Cochrane sums in short intervals[J]. J. Korean Math. Soc., 2007, 44: 1243–1254.

[3] Conrey J B, Fransen Eric, Klein Robert, Clayton Scott. Mean values of Dedekind sums[J]. J. Number Theory, 1996, 56: 214–226.

[4] Rademacher H. On the transformation of $\log \eta(\tau)$ [J]. J. Indian Math. Soc., 1955, 19: 25–30.

[5] Carlitz L. The reciprocity theorem of Dedekind Sums[J]. Pacific J. Math., 1953, 3: 513–522.

[6] Zhang W P. A note on the mean square value of the Dedekind sums[J]. Acta Mathematica Hungarica, 2000, 86: 275–289.

[7] Zhang W P. On the mean values of Dedekind Sums[J]. Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, 1996, 8: 429–442.

[8] Claude P. New factors of Fermat numbers[J]. Math. Comp., 1964, 18: 324–325.

ON THE FERMAT'S PRIME AND THE MEAN VALUE OF L-FUNCTIONS

LIU Bao-li

(*School of Computer Engineering, Xi'an Aeronautical Polytechnic Institute, Yanliang 710089, China*)

Abstract: In this paper, we study the weighted mean value problem of Dedekind L-functions modulo a Fermat's prime. By using the elementary method and the properties of Dedekind sums, we obtain an interesting computational formula for it.

Keywords: Fermat's prime; L-functions; Dedekind sums; weighted mean value; computational formula

2010 MR Subject Classification: 11B83