

具有重叠多非线性项的一般 Lurie 系统的绝对稳定性

赵秀元¹, 甘作新²

(1. 榆林学院数学与统计学院, 陕西 榆林 719000)

(2. 中国科学院数学与系统科学研究院系统科学研究所, 北京 100190)

摘 要: 本文研究了具有重叠多非线性项的一般 Lurie 直接系统的绝对稳定问题. 利用关于某个变元绝对稳定的概念, 获得了绝对稳定的充要条件和一些充分条件, 推广了现有的一些研究成果.

关键词: Lurie 系统; 绝对稳定性; 多非线性; Lyapunov 函数

MR(2010) 主题分类号: 34D20; 93D05

中图分类号: O175.13

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2014)02-0379-08

1 引言

1944 年, Lurie 和 Postnikov 发表一篇经典论文^[1], 提出了控制系统稳定的新问题, 就此提出了绝对稳定性问题, 随后 60 多年, 绝对稳定性问题被国内外学者广泛研究. Lurie 和绝对稳定性问题还在吸引许多国家的科学家和工程师们的注意. 迄今为止, 大约有 2000 多篇关于绝对稳定性的论文、综述和书籍出版发行, 经典的有 Khali^[2], Lefschetz^[3] 和 Popov^[4]. 廖晓昕在文 [5, 6] 对 Lurie 型控制系统给出了绝对稳定的一些充分条件和特殊情况下的充要条件, 赵素霞、仵永先等在文 [7–10] 得到了具有多非线性项的 Lurie 系统的 Lyapunov 函数存在的充要条件, 吴敏等在文 [10] 得到了一些新结果. 甘作新、仵永先等在文 [11–14] 对一般 Luire 系统的绝对稳定性给出了一些充要条件和充分条件; Rapoport 等^[15–18] 获得了具有叠非线性元的 Lurie 控制系统绝对稳定的充要条件和充分条件, 然而由于研究的复杂性和困难性, 具有重叠非线性项的一般 Lurie 系统的绝对稳定性的研究却很少. 在本文, 通过关于某个变元绝对稳定的概念, 我们研究了具有叠多非线性项的一般 Lurie 系统的绝对稳定性问题, 给出了绝对稳定的一些充要条件和充分条件. 进一步, 一个数值例子说明了结果的有效性.

2 主要结果

考虑如下具有重叠多非线性项的一般 Lurie 控制系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B\phi(\xi), \\ \xi = C^T x + D\varphi(\sigma), \\ \sigma = E^T x - F\varphi(\sigma), \end{cases} \quad (2.1)$$

*收稿日期: 2013-06-07

接收日期: 2013-10-14

基金项目: 国家自然科学基金资助 (11071151).

作者简介: 赵秀元 (1966–), 男, 陕西榆林, 副教授, 主要研究方向: 主要从事稳定性理论以及控制理论的研究.

这里 $x \in R^n$ 是状态向量, $A \in R^{n \times n}$, $\operatorname{Re} \lambda(A) \leq 0$, $B, C \in R^{n \times m}$, $D \in R^{m \times p}$, $E \in R^{n \times p}$, $F \in R^{p \times p}$, 且 $F \geq 0$ (即 F 是非负对角阵), $\xi \in R^m$, $\sigma \in R^p$, $\phi_i(\cdot), \varphi_j(\cdot) \in K[0, +\infty)$,

$$\phi(\xi) = \operatorname{col}(\phi_1(\xi_1), \phi_2(\xi_2), \dots, \phi_m(\xi_m)),$$

$$\varphi(\sigma) = \operatorname{col}(\varphi_1(\sigma_1), \varphi_2(\sigma_2), \dots, \varphi_p(\sigma_p)),$$

$i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, p$. $K[0, +\infty) = \{\mu : \mu(0) = 0, v\mu(v) > 0, \text{ 当 } v \neq 0 \text{ 时}, \mu(\cdot) \in C(-\infty, +\infty)\}$.

若矩阵 $F = 0$ 时, 则系统 (2.1) 就是 Lurie 型重叠多非线性控制系统.

注 2.1 对任意 $x \in R^n$, 记 $\|x\| = (x^T x)^{\frac{1}{2}}$; 对任意矩阵 $P \in R^{n \times n}$, $P > 0$ (< 0), 表示 P 是正定 (负定) 矩阵; $P \geq 0$ (≤ 0), 表示 P 是半正定 (半负定) 矩阵.

定义 2.1 系统 (2.1) 的平凡解关于变元 $\xi(\eta, \sigma)$ 是绝对稳定的, 若对任意 $\forall \phi, \varphi \in K[0, \infty)$, 且 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$, 使得初值 $\|x(t_0)\| < \delta(\varepsilon)$, 则系统 (2.1) 的解 $x(t, t_0, x_0)$ 满足 $\|\xi\|(\|\eta\|, \|\sigma\|) < \varepsilon$, 当 $t \geq t_0$ 时; 且 $\forall \tilde{x}_0 \in R^n$, 有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \xi(t, t_0, x_0) = 0 \quad (\lim_{t \rightarrow +\infty} (\eta(t, t_0, x_0) = 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \sigma(t, t_0, x_0) = 0).$$

若矩阵 A 所有特征值的实部均为负 (即矩阵 A 是稳定的), 则系统 (2.1) 属于主要情况.

定理 2.1 系统 (2.1) 在主要情况下的平凡解关于变元 x 绝对稳定的充要条件是系统 (2.1) 的平凡解关于变元 ξ 绝对稳定.

证 必要性 由 $\sigma = E^T x - F\varphi(\sigma)$, 得 $\sigma + F\varphi(\sigma) = E^T x$, 因为 F 是非负对角阵, 且 $\varphi_j(\sigma_j) \in K[0, +\infty)$, $j = 1, 2, \dots, p$, 即

$$\begin{cases} \varphi_j(\sigma_j) > 0, \sigma_j > 0, \\ \varphi_j(\sigma_j) = 0, \sigma_j = 0, \\ \varphi_j(\sigma_j) < 0, \sigma_j < 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

于是 $\|\sigma\| \leq \|\sigma + F\varphi(\sigma)\| = \|E^T x\| \leq \|E^T\| \cdot \|x\|$. 根据定理 2.1 的假设条件, 系统 (2.1) 的平凡解关于变元 x 是绝对稳定的, 即 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1(\varepsilon) > 0$, 使得当 $\|x_0\| < \delta_1(\varepsilon)$ 时, 有 $\|x\| < \frac{\varepsilon}{2\|E^T\|}$. 由于 $\varphi_j(\sigma_j) \in K[0, +\infty)$, $\varphi(\sigma)$ 是连续的, 对上述的 $\varepsilon > 0, \exists \delta_2(\varepsilon) > 0$, 使得当 $\|\sigma\| < \delta_2(\varepsilon)$ 时, $\|\varphi(\sigma)\| < \frac{\varepsilon}{2\|D\|}$. 令 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2/\|E^T\|\}$, 对 $\varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$, 使得当 $\|x_0\| < \delta$ 时, 有 $\|\sigma\| \leq \|E^T\| \cdot \|x\|$, 且

$$\|\xi\| \leq \|C^T\| \cdot \|x\| + \|D\| \cdot \|\varphi(\sigma)\| < \|C^T\| \cdot \frac{\varepsilon}{2\|C^T\|} + \|D\| \cdot \frac{\varepsilon}{2\|D\|} = \varepsilon,$$

于是系统 (2.1) 的平凡解对变元 ξ 是稳定的.

因为对 $\forall x_0 \in R^n, \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t, t_0, x_0) = 0$, 且 $\|\sigma\| \leq \|\sigma + F\varphi(\sigma)\| = \|E^T x\| \leq \|E^T\| \cdot \|x\|$, 可得 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\sigma\| = 0$, 又由 $\varphi(\sigma)$ 是连续的, 可得 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\varphi(\sigma)\| = 0$, 又 $\xi = C^T x + D\varphi(\sigma)$, 于是

$$\|\xi\| \leq \|C^T\| \cdot \|x\| + \|D\| \cdot \|\varphi(\sigma)\|,$$

进而 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \xi = 0$, 因此系统 (2.1) 的平凡解关于变元 ξ 是绝对稳定的.

充分性 由常数变易公式, 系统 (2.1) 的任意解 $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ 可表达为

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}B\phi(\xi)d\tau. \quad (2.3)$$

因矩阵 A 是稳定的, 故 $\exists \alpha > 0, \beta > 0$, 使得 $\|e^{A(t-t_0)}\| \leq \beta e^{-\alpha(t-t_0)}$. 又

$$\|x(t)\| \leq \|e^{A(t-t_0)}\| \cdot \|x(t_0)\| + \int_{t_0}^t \|e^{A(t-\tau)}\| \cdot \|B\| \cdot \|\phi(\xi)\|d\tau,$$

于是有

$$\|x(t)\| \leq \beta e^{-\alpha(t-t_0)} \cdot \|x(t_0)\| + \beta \cdot \|B\| \int_{t_0}^t e^{-\alpha(t-\tau)} \cdot \|\phi(\xi)\|d\tau.$$

因为系统 (2.1) 的平凡解关于变元 ξ 绝对稳定, 以及 ϕ 为连续函数, 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1(\varepsilon) > 0, t_1 > t_0$, 使得当 $\|x(t_0)\| < \delta_1(\varepsilon)$ 时, 有

$$\beta \cdot \|B\| \int_{t_1}^t e^{-\alpha(t-\tau)} \cdot \|\phi(\xi)\|d\tau < \frac{\varepsilon}{3},$$

且

$$\beta \cdot \|B\| \int_{t_0}^{t_1} e^{-\alpha(t-\tau)} \cdot \|\phi(\xi)\|d\tau < \frac{\varepsilon}{3}.$$

记 $\delta_2(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{3\beta}$, 取 $\delta(\varepsilon) = \min\{\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)\}$, 则若 $\|x(t_0)\| < \delta(\varepsilon)$, 可推出下面不等式

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \|e^{A(t-t_0)}\| \cdot \|x(t_0)\| + \beta\|B\| \int_{t_0}^{t_1} e^{-\alpha(t-\tau)} \cdot \|\phi(\xi)\|d\tau \\ &\quad + \beta\|B\| \int_{t_1}^t e^{-\alpha(t-\tau)} \cdot \|\phi(\xi)\|d\tau \\ &\leq \beta \cdot \frac{\varepsilon}{3\beta} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

因此系统 (2.1) 的平凡解关于变元 x 是稳定的.

由式 (2.3) 且 A 是稳定的, 则 (2.3) 式右边第一项

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{A(t-t_0)}x(t_0) = 0.$$

接下来仅考虑 (2.3) 式右边第二项

$$\int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}B\phi(\xi)d\tau,$$

由于 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \xi = 0$ 且函数 $\phi(\xi)$ 是连续的, 于是 $\phi(0) = 0$, 则 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(\xi) = 0$. 进一步有

$$\left\| \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}B\phi(\xi)d\tau \right\| \leq \int_{t_0}^t \|e^{A(t-\tau)}B\phi(\xi)\|d\tau \leq \beta\|B\| \int_{t_0}^t e^{-\alpha(t-\tau)}\|\phi(\xi)\|d\tau,$$

又

$$\int_{t_0}^t e^{-\alpha(t-\tau)}\|\phi(\xi)\|d\tau = \frac{\int_{t_0}^t e^{\alpha\tau}\|\phi(\xi)\|d\tau}{e^{\alpha t}}. \quad (2.4)$$

若分子有界, 则当 $t \rightarrow +\infty$ 时, (2.3) 式为 0; 否则, 若上式分子无界, 则由 L' Hospital 法则, 对分子分母同时求导, 得到

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{\alpha t} \|\phi(\xi)\|}{\alpha e^{\alpha t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\|\phi(\xi)\|}{\alpha} = 0.$$

由此可得 $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$, 故系统 (2.1) 的平凡解关于变元 x 是绝对稳定的.

为方便起见, 在系统 (2.1) 中, 记 $\eta = C^T x$, 则有

定理 2.2 系统 (2.1) 在主要情况下的平凡解关于变元 x 绝对稳定的充要条件是系统 (2.1) 的平凡解关于变元 η 和 σ 绝对稳定.

证 必要性 因为系统 (2.1) 的平凡解关于变元 x 绝对稳定, 则对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1(\varepsilon) > 0$, 使得当 $\|x_0\| < \delta_1(\varepsilon)$ 时, 有 $\|x\| < \frac{\varepsilon}{2\|E^T\|}$, 又 $\|\sigma\| \leq \|\sigma + F\varphi(\sigma)\| = \|E^T x\| \leq \|E^T\| \cdot \|x\| < \varepsilon$, 故系统 (2.1) 的平凡解关于变元 ξ 稳定. 由定理 2.1 必要性的证明可知系统 (2.1) 的平凡解关于变元 ξ 绝对稳定. 由于 $\|\eta\| \leq \|C^T\| \cdot \|x\|$, 同理可证系统 (2.1) 的平凡解关于变元 η 绝对稳定.

充分性 由于系统 (2.1) 的平凡解关于变元 η 和 σ 绝对稳定, 又 $\|\xi\| \leq \|C^T x\| + \|D\| \cdot \|\varphi(\sigma)\|$, 及 $\eta = C^T x$, 故得 $\|\xi\| \leq \|\eta\| + \|D\| \cdot \|\varphi(\sigma)\|$, 由此可以方便地证明系统 (2.1) 的平凡解关于变元 ξ 绝对稳定, 再由定理 2.1, 可得系统 (2.1) 的平凡解关于变元 x 绝对稳定.

上面两个定理都是充分条件, 下面给出两个便于应用的充分条件:

定理 2.3 若下面条件满足

(1) 矩阵 A 至少有稳定度 $\alpha > 0$, 即有估计式 $\|e^{A(t-t_0)}\| \leq \beta e^{-\alpha(t-t_0)}$;

(2) $0 \leq \phi(\xi) \leq K_1 \xi, 0 \leq \varphi(\sigma) \leq K_2 \sigma$;

则当 $\beta\|K_1\| \cdot \|B\|(\|C^T\| + \|D\| \cdot \|E^T\| \cdot \|K_2\|) < \alpha$ 时, 系统 (2.1) 的平凡解在 Hurwitz 角域 $[0, K_1; 0, K_2]$ 内绝对稳定.

注 2.2 这里 β 为正的常数, $K_1 \in R^{m \times m}, K_2 \in R^{p \times p}$ 是对角阵.

证 由常数变易公式, 系统 (2.1) 的任意解 $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ 为

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B \phi(\xi) d\tau,$$

于是有

$$\begin{aligned} \|\xi\| &\leq \|C^T\| \cdot \|x(t)\| + \|D\| \cdot \|\varphi(\sigma)\| \\ &\leq \|C^T\| \cdot \|x(t)\| + \|D\| \cdot \|E^T\| \cdot \|K_2\| \cdot \|x(t)\| \\ &= (\|C^T\| + \|D\| \cdot \|E^T\| \cdot \|K_2\|) \cdot \|x(t)\| \\ &\leq h \cdot [\beta e^{-\alpha(t-t_0)} \|x(t_0)\| + \|K_1\| \cdot \|B\| \int_{t_0}^t \beta e^{-\alpha(t-\tau)} \cdot \|\xi\| d\tau], \end{aligned}$$

在不等式两边都乘以 $e^{\alpha(t-t_0)}$, 得

$$e^{\alpha(t-t_0)} \|\xi\| \leq h\beta \cdot \|x(t_0)\| + h\beta\|K_1\| \cdot \|B\| \int_{t_0}^t \cdot e^{\alpha(\tau-t_0)} \|\xi\| d\tau,$$

这里 $h = \|C^T\| + \|D\| \cdot \|E^T\| \cdot \|K_2\|$.

由 Gronwall-Bellman 不等式, 有

$$e^{\alpha(t-t_0)} \|\xi\| \leq h\beta\|x(t_0)\| e^{h\beta\|K_1\| \cdot \|B\|(t-t_0)},$$

即

$$\|\xi\| \leq h\beta\|x(t_0)\|e^{[-\alpha+h\beta\|K_1\|\cdot\|B\|](t-t_0)},$$

由条件 (2) 得

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{[-\alpha+h\beta\|K_1\|\cdot\|B\|](t-t_0)} = 0.$$

即

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\xi\| = 0.$$

接下来, 与定理 2.1 充分性的证明相似, 得到系统 (2.1) 的平凡解关于变元 ξ 绝对稳定, 进一步, 系统 (2.1) 的平凡解关于变元 x 绝对稳定.

定理 2.4 若矩阵 A 是稳定的, 且满足下面条件:

- (1) 矩阵 $CC^T A + A^T CC^T$ 半负定;
- (2) 矩阵 $EE^T A + A^T EE^T$ 半负定;
- (3) $C^T B + B^T C$ 负定;
- (4) $\frac{1}{2}E^T B = D^T C^T B$;

(5) $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi^T(\sigma)F\varphi(\sigma) = +\infty$, 或者 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^\sigma \varphi^T(\sigma)d\sigma = +\infty$ (若 $F = 0$, 则只取后者); 则系统 (2.1) 的平凡解关于变元 x 绝对稳定.

证 构造系统 (2.1) 的 Lyapunov 函数为

$$V = \frac{1}{2} \int_0^\sigma \varphi^T(\sigma)d\sigma + \frac{1}{4} \varphi^T(\sigma)F\varphi(\sigma) + \frac{1}{2} \eta^T \eta. \quad (2.5)$$

由定理的条件 (5) 可知 Lyapunov 函数是无穷大正定的, 则有

$$\begin{aligned} \dot{V}|_{(2.1)} &= \frac{1}{2} \varphi^T(\sigma) \cdot E^T [Ax + B\phi(\xi)] + \eta \cdot C^T [Ax + B\phi(\xi)] \\ &= \frac{1}{2} \varphi^T(\sigma) E^T Ax + x^T CC^T Ax + \left[\frac{1}{2} \varphi^T(\sigma) \cdot E^T B + \eta^T C^T B \right] \phi(\xi). \end{aligned} \quad (2.6)$$

首先, 考虑 (2.6) 式最后一行的第一项 $\frac{1}{2} \varphi^T(\sigma) E^T Ax$, 由于 $\varphi_j(\cdot) \in K[0, +\infty)$, $j = 1, 2, \dots, p$, 则 $\varphi^T(\sigma) E^T Ax$ 和 $[\varphi(\sigma) + \sigma]^T E^T Ax$ 的符号相同, 于是仅考虑 $[\varphi(\sigma) + \sigma]^T E^T Ax$ 的符号. 因为

$$\begin{aligned} [\varphi(\sigma) + \sigma]^T E^T Ax &= x^T EE^T Ax = \frac{1}{2} [x^T EE^T Ax + x^T A^T EE^T Ax] \\ &= \frac{1}{2} x^T [EE^T A + A^T EE^T] x, \end{aligned} \quad (2.7)$$

由条件 (2) 可得 $[\varphi(\sigma) + \sigma]^T E^T Ax < 0$, 进而 $\varphi^T(\sigma) E^T Ax < 0$, 又由条件 (1), 可得

$$x^T CC^T Ax = \frac{1}{2} x^T [CC^T A + A^T CC^T] x,$$

再由条件 (3) 和 (4), 可得

$$\begin{aligned}
 & [\frac{1}{2}\varphi^T(\sigma) \cdot E^T B + \eta^T \cdot C^T B]\phi(\xi) \\
 = & [\frac{1}{2}\varphi^T(\sigma) \cdot E^T B + C^T x \cdot C^T B]\phi(\xi) \\
 = & [\frac{1}{2}\varphi^T(\sigma) \cdot E^T B + (\xi - D\varphi(\sigma))^T \cdot C^T B]\phi(\xi) \\
 = & [\frac{1}{2}\varphi^T(\sigma) \cdot E^T B - \varphi^T(\sigma)D^T \cdot C^T B]\phi(\xi) - \xi^T \cdot C^T B\phi(\xi) \\
 = & \varphi^T(\sigma)[\frac{1}{2}E^T B - D^T C^T B]\phi(\xi) - \frac{1}{2}\xi^T [C^T B + B^T C]\phi(\xi) \\
 = & -\frac{1}{2}\xi^T [C^T B + B^T C]\phi(\xi).
 \end{aligned}$$

综上所述, $\dot{V}|_{(2.1)}$ 是负定的, 进一步, 系统 (2.1) 的平凡解是绝对稳定的.

3 数值例子

例 3.1 考虑下面具有两个非线性项的一般 Lurie 二阶控制系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 - 2\phi_1(\xi_1) + \phi_2(\xi_2), \\ \dot{x}_2 = x_1 - 2x_2 + \phi_1(\xi_1) - \phi_2(\xi_2), \\ \dot{\xi}_1 = 0.5x_1 + 0.5x_2 - \varphi_1(\sigma_1), \\ \dot{\xi}_2 = 0.5x_1 + x_2 - \varphi_2(\sigma_2), \\ \dot{\sigma}_1 = x_1 + x_2 - 2\varphi_1(\sigma_1), \\ \dot{\sigma}_2 = 1x_1 + 2x_2 - 2\varphi_1(\sigma_1), \end{cases} \quad (3.1)$$

这里

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}, \\ D &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$\phi_i(\cdot), \varphi_j(\cdot) \in K[0, +\infty)$, $i, j = 1, 2$, 并且 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi^T(\sigma)F\varphi(\sigma) = +\infty$, 或者

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^\sigma \varphi^T(\sigma) d\sigma = +\infty.$$

显然定理 2.4 的条件 (5) 满足.

构造系统 (3.1) 的 Lyapunov 函数如下:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^\sigma \varphi^T(\sigma) d\sigma + \frac{1}{4} \varphi^T(\sigma) \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \varphi(\sigma) + \frac{1}{2} \eta^T \cdot \eta. \quad (3.2)$$

计算 Lyapunov 函数的导数如下:

$$\begin{aligned}\dot{V}|_{(3.1)} &= \frac{1}{2}\varphi^T(\sigma)E^T Ax + x^T CC^T Ax + \left[\frac{1}{2}\varphi^T(\sigma) \cdot E^T B + \eta^T C^T B\right] \phi(\xi) \\ &= \frac{1}{2}\varphi^T(\sigma) \begin{bmatrix} -1 & -2.5 \\ -2.5 & -7 \end{bmatrix} x + x^T \begin{bmatrix} -0.25 & -0.625 \\ -0.625 & -1.75 \end{bmatrix} x \\ &\quad + \left[\frac{1}{2}\varphi^T(\sigma) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \eta^T \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}\right] \phi(\xi).\end{aligned}\quad (3.3)$$

下面 4 个矩阵计算表明

$$\begin{aligned}CC^T A + A^T CC^T &= \begin{bmatrix} -0.5 & -1.25 \\ -1.25 & -3.5 \end{bmatrix} < 0, \\ EE^T A + A^T EE^T &= \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -5 & -14 \end{bmatrix} < 0, \\ C^T B + B^T C &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} < 0, \\ \frac{1}{2}E^T B = D^T C^T B &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix},\end{aligned}$$

定理 2.4 的条件 (1)–(4) 均满足, 于是由定理 2.4 可得, 系统 (3.1) 的平凡解关于变元 x 是绝对稳定的.

参 考 文 献

- [1] Lurie A, Postnikov V. On the theory of stability of controlled systems [J]. Prikl. Math. Mekh., 1944, 8: 283–286.
- [2] Khalil H K. Nonlinear systems [M]. New York: Macmillan, 1992.
- [3] Lefschetz S. Stability of nonlinear control systems [M]. New York, Loondon: Academic Press, 1965.
- [4] Popov V. Hyperstability of control systems [M]. New York: Springer Verlag, 1973.
- [5] Liao X X. N. A. S. C for absolute stability of n -dimensions Lure direct control systems in the case of main [J]. Acta Mathematica Scientia, 1985, 5(3): 329–336.
- [6] Liao X X. N. A. S. C for absolute stability of Lurie direct control systems [J]. Acta Mathematica Scientia, 1989, 9(1): 75–82.
- [7] Wu Y X, Zhao S X. Necessary and sufficient conditions for the existence of a Lyapunov function of Lurie form with $\dot{V} \leq 0$ [J]. Acta Mathematica Applicatae Sinica, 1990, 6(3): 345–350.
- [8] Wu Y X, Zhao S X. Absolute stability of control systems with several nonlinear stationary elements in the case of an infinite sector [J]. Automatika Telemekh, 1991, 52(1): 34–42.
- [9] Xiong K Q. Necessary and sufficient conditions for existence of a Lyapunov function with a quadratic form plus an integral term [J]. Internal Journal of Control, 1996, 64(4): 707–719.
- [10] Wu M, He Y. On absolute stability of Lur'e control systems with multiple nonlinearities [J]. European Journal of Control, 2005, 11(1): 19–28.

- [11] 甘作新, 仵永先. 一般 Lurie 型直接控制系统的绝对稳定性 [A]. 刘永清等. 全国第五届常微分方程稳定性理论及其应用学术会议论文集 [C]. 大连: 大连海事大学出版社, 1996: 338–340.
- [12] Gan Z X, Ge W G. Absolute stability of general Lurie systems with multi-nonlinear feedback terms [J]. Acta Mathematica Sinica, 2001, 17(4): 649–656.
- [13] 甘作新, 韩京清, 葛渭高. 具有多个非线性项的一般 Lurie 直接控制系统的绝对稳定性 [J]. 数学学报, 2002, 45(2): 405–410.
- [14] Gan Z X, Han J Q. Lyapunov function of general Lurie systems with multiple nonlinearities [J]. Appl. Math. Letters, 2003, 16(1): 119–126.
- [15] Rapoport L. On problems of absolute stability for control systems with superposition of nonlinear elements [J]. Automatika Telemekh, 1989, 12(2): 166–169.
- [16] Wu Y X, Zhao S X. On problem of absolute stability for control systems with superposition of nonlinear elements in the case of an infinite sector [J]. Ann. of Diff. Eqs., 1995, 11(3): 326–331.
- [17] 魏文国, 赵素霞. 具重叠非线性项的 Lurie 控制系统绝对稳定的充要条件 [A]. 刘永清等. 全国第五届常微分方程稳定性理论及其应用学术会议论文集 [C]. 大连: 大连海事大学出版社, 1996: 341–343.
- [18] 杨斌, 潘德惠. 具有重叠非线性元素的时变控制系统的绝对稳定性 [J]. 辽宁师范大学学报 (自然科学版), 1998, 21(3): 195–198.

ABSOLUTE STABILITY FOR GENERAL LURIE SYSTEMS WITH SUPERPOSITION OF MULTIPLE NONLINEARITIES

ZHAO Xiu-yuan¹, GAN Zuo-xin²

(1. College of Mathematics and Statistics, Yulin University, Yulin 719000, China)

(2. Institute of Systems Science, AMSS, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

Abstract: This paper investigates the problem of absolute stability for general Lurie direct systems with superposition of multiple nonlinearities. By means of the concept for absolute stability for certain variables, we obtain some necessary and sufficient conditions of absolute stability, furthermore some sufficient conditions are also obtained.

Keywords: Lurie systems; absolute stability; nonlinearities; Lyapunov function

2010 MR Subject Classification: 34D20; 93D05