

运动星体内部径向方向上两点间的平均距离

王星星¹, 谢凤繁¹, 栗勤农²

(1. 武汉科技大学理学院, 湖北 武汉 430065)

(2. 武汉交通职业学院, 湖北 武汉 430065)

摘 要: 本文研究了两个相交非空凸体的交集及其线性径向组合体内部两点间的平均距离问题. 利用对偶均质积分和对偶混合体积两个工具, 获得了平均距离的计算公式, 推广了已有的对偶运动公式的相关结果.

关键词: 基本运动公式; 对偶均质积分; 对偶混合体积; 线性径向组合体

MR(2010) 主题分类号: 53C65

中图分类号: O186.5

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2014)02-0360-07

1 引言

记 R^n 为 n 维欧式空间, 设 K 是 R^n 中关于点 z 的星形的紧集, K 关于点 z 的径向函数 $\rho_K(u, z) : S^{n-1} \rightarrow R$ 定义为

$$\rho_K(u, z) = \max\{c : cz + z \in K\}, \forall u \in S^{n-1},$$

其表示的含义是从 z 点出发沿着 u 方向的射线到 K 边界的最大距离, 其中要求 $z \in K$. 当 z 是原点时 $\rho_K(u, O)$ 简记为 $\rho_K(u)$, 称星形紧集 K 为星体如果其径向函数 $\rho_K(u, z)$ 关于 u 是连续的.

K 是一个星体, 则其关于点 z 的对偶均质积分^[1,2] 定义为

$$\widetilde{W}_{n-i}(K, z) = \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} \rho_K^i(u, z) du, 0 \leq i \leq n.$$

特别的, z 为原点时, $\widetilde{W}_{n-i}(K) = \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} \rho_K^i(u) du, 0 \leq i \leq n$. 一般的, $\widetilde{W}_{n-r}(K, z) = \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} \rho_K^r(u, z) du, r \in R$.

定义 1.1^[1,2] 令 K 和 L 是 R^n 中关于 $z \in R^n$ 的星体, $a, b \in R^+$, 径向函数的线性组合 $aK \widetilde{+} bL$ 是一个星体, 其径向函数定义为

$$\rho_{aK \widetilde{+} bL}(u, z) = a\rho_K(u, z) + b\rho_L(u, z).$$

径向函数的线性组合 $aK \widetilde{+} bL$ 的体积有以下展开式:

$$V(aK \widetilde{+} bL) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \widetilde{V}_i(K, L) a^{n-i} b^i,$$

*收稿日期: 2013-07-20

接收日期: 2013-10-09

基金项目: 冶金工业过程系统科学湖北省重点实验室项目资助 (A201001).

作者简介: 王星星 (1989-), 女, 湖北随州, 硕士, 研究方向: 积分几何与凸体理论.

其中系数 $\widetilde{V}_i(K, L)$ 称为 K 和 L 的对偶混合体积, 它们满足

$$\widetilde{V}_i(K, L) = \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} \rho_K^{n-i}(u, z) \rho_L^i(u, z), 0 \leq i \leq n.$$

关于对偶均值积分及对偶混合体积的具体理论, 参考文献 [3-5].

文献 [1, 6, 7] 给出了星体的对偶均质积分的一些基本运动公式, 在此基础上, 本文探讨了两个相交非空凸体的交集及其这两个凸体的线性径向组合体内部两点间的平均距离的问题, 这两个凸体一个为固定凸体, 另一个为在刚体运动作用下的运动的凸体, 并且这两个凸体的线性径向组合体^[2]是一个星体. 文章中利用对偶均质积分和对偶混合体积两个工具, 获得了平均距离的计算公式, 推广了已有的对偶运动公式的相关结果.

2 预备知识

定义 2.1^[8] 对任意的凸域 K , K 内任意两点间的平均距离定义为

$$E(r) = \frac{\int_{P_1, P_2 \in K} r dP_1 \wedge dP_2}{\int_{P_1, P_2 \in K} dP_1 \wedge dP_2},$$

其中 P_1, P_2 为 K 内部任意两点, r 为 P_1, P_2 两点间的距离.

定理 2.2^[1,6] $G(n)$ 是 R^n 中的刚体运动群, $g \in G(n)$ 为任意刚体运动, K 和 L 是 R^n 中关于原点 O 的星体, 其中 K 为固定的, L 在刚体运动 g 作用下运动, K 和 gL 相交非空, N_g 是连接 O 和 gO 的线段, 那么有以下对偶基本运动公式成立

$$\int_{g \in G(n)} \chi(K \cap gL \cap N_g) d\mu(g) = \frac{1}{\omega_n} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \widetilde{W}_i(K) \widetilde{W}_{n-i}(L).$$

定理 2.3^[1] 令 x, y 分别是 R^n 中具有非空内部的凸体 K 和 L 内的随机点, 其中 K 为固定的, L 在刚体运动 g 作用下运动, K 和 gL 相交非空, N_g 是连接 O 和 gO 的线段, 那么有以下对偶基本运动公式成立

$$\int_{g \in G(n), x \in K, y \in L} \chi(K \cap gL \cap N_g) d\mu(g) dx dy = \frac{1}{\omega_n} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{I_{n-i+1}(K) I_{i+1}(L)}{(n-i-1)(i+1)}. \quad (2.1)$$

定理 2.4^[1,6] 令 K 和 L 是 R^n 中关于原点 O 的星体, 其中 K 为固定的, L 在刚体运动 g 作用下运动, K 和 gL 相交非空, N_g 是连接 O 和 gO 的线段, 那么下面的公式成立

$$\int_{g \in G(n)} vol_1(K \cap gL \cap N_g) d\mu(g) = \frac{1}{(n+1)\omega_n} \sum_{i=1}^n \binom{n+1}{i} \widetilde{W}_{n-i}(K) \widetilde{W}_{i-1}(L).$$

定理 2.5^[1] 令 K 和 L 是 R^n 中有非空内部的凸体, 其中 K 为固定的, L 在刚体运动 g 作用下运动, K 和 gL 相交非空, x, y 分别是凸体 K 和 L 内的随机点, N_g 是连接 x 和 gy 的线段, $g \in G(n)$, 那么有以下等式成立

$$\begin{aligned} & \int_{g \in G(n), x \in K, y \in L} vol_1(K \cap gL \cap N_g) d\mu(g) dx dy \\ &= \frac{1}{(n+1)\omega_n} \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} \frac{I_{n-k+2}(K) I_{k+1}(L)}{(n-k+2)(k+1)}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

上述定理 2.2-2.5 的证明参见文献 [1, 6].

3 主要结果

定理 3.1 设 K 和 L 是 R^n 中有非空内部的凸体, 其中 K 为固定的, L 在刚体运动 g 作用下运动, K 和 gL 相交非空, 用 $E_{K \cap gL}(r)$ 表示凸体 $\overline{K \cap gL}$ 内部任意两点间的平均距离, r 表示两点间的距离, 则

$$E_{K \cap gL}(r) = \frac{\sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} \frac{I_{n-k+2}(K)I_{k+1}(L)}{(n-k+2)(k+1)}}{(n+1) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{I_{n-k+1}(K)I_{k+1}(L)}{(n-k+1)(k+1)}}. \quad (3.1)$$

证 任意一个运动 $g \in G(n)$, 令 $Q = gO$, e 是运动 g 中的旋转运动. 令 $\rho = |\overrightarrow{OQ}|$, $u = \frac{1}{\rho} \overrightarrow{OQ}$, $\rho_M = \max\{\rho_K(u), \rho_{eL}(-u)\}$, $\rho_m = \min\{\rho_K(u), \rho_{eL}(-u)\}$, 那么

$$\text{vol}_1(K \cap gL \cap N_g) = \begin{cases} \rho, & \rho \leq \rho_m, \\ \rho_m, & \rho_m \leq \rho \leq \rho_M, \\ \rho_m + \rho_M - \rho, & \rho \geq \rho_M. \end{cases}$$

由上述表达式可知, 线段 $K \cap gL \cap N_g$ 两个端点都在 $\overline{K \cap gL}$ 内部, 且两端点的位置分布有三种情形:

- (i) 两端点都在凸体 $K \cap gL$ 内部;
- (ii) 其中一端点在边界上;
- (iii) 两端点都在边界上, 又因为凸体关于其内部任一点都是星体即意味着 O 可以取遍 K 中任意点, 又由运动的任意性, 点 Q 也可以取遍 L 中任一点, 故有

$$E_{K \cap gL} = \frac{\int_{g \in G(n), x \in K, y \in L} \text{vol}_1(K \cap gL \cap N_g) d\mu(g) dx dy}{\int_{g \in G(n), x \in K, y \in L} \chi(K \cap gL \cap N_g) d\mu(g) dx dy},$$

将定理 2.3 和定理 2.5 的结果代入到上述表达式中有

$$\begin{aligned} E_{K \cap gL} &= \frac{\int_{g \in G(n), x \in K, y \in L} \text{vol}_1(K \cap gL \cap N_g) d\mu(g) dx dy}{\int_{g \in G(n), x \in K, y \in L} \chi(K \cap gL \cap N_g) d\mu(g) dx dy} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} \frac{I_{n-k+2}(K)I_{k+1}(L)}{(n-k+2)(k+1)}}{(n+1) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{I_{n-k+1}(K)I_{k+1}(L)}{(n-k+1)(k+1)}}. \end{aligned}$$

沿用这种计算星体或者是凸体内两点间的平均距离的方法和思路, 本文中得到了凸体 K 和 L 的径向组合体 $K \tilde{+} (-eL)$ 内任意两点间的平均距离 $E_{K \tilde{+} (-eL)}(r)$, 其中 $K \tilde{+} (-eL)$ 是星体, 为得到组合径向体内部两点的平均距离, 文章先给出以下几个结论.

引理 3.2 设 K 和 L 是 R^n 中有非空内部的凸体, 其中 K 为固定的, L 在刚体运动 g 作用下运动, K 和 gL 相交非空, N_g 是连接 O 和 gO 的线段, 那么下面的对偶基本运动公式成

立

$$\int_{g \in G(n), K \cap gL \cap N_g \neq \emptyset} \chi((K \cup gL) \cap N_g) d\mu(g) = \frac{1}{\omega_n} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \widetilde{W}_i(K) \widetilde{W}_{n-i}(L). \quad (3.2)$$

证

$$\begin{aligned} & \int_{g \in G(n), K \cap gL \cap N_g \neq \emptyset} \chi((K \cup gL) \cap N_g) d\mu(g) \\ &= \int_{g \in G(n)} \chi(K \cap gL \cap N_g) d\mu(g) = \frac{1}{\omega_n} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \widetilde{W}_i(K) \widetilde{W}_{n-i}(L). \end{aligned}$$

K 和 L 是 R^n 中关于原点 O 的星体, 任意一个运动 $g \in G(n)$, 令 $Q = gO$, 那么可以知道 Q 是 gL 内的一个固定点, N_g 是连接 O 和 Q 的线段, dQ 表示空间在 Q 点处的体积微元, 运动 $g \in G(n)$ 可以由一个旋转运动 e 和平移 $O \rightarrow Q$ 完成, 那么刚体运动群 $G(n)$ 上的不变运动密度 μ 可以写为 $d\mu(g) = dQdv(e)$, 显然可知

$$\chi(K \cap gL \cap N_g) = 1 \Leftrightarrow Q \in K \widetilde{+} (-eL)^{[1,3]},$$

相交非空凸体 K 和 L 的径向组合体 $K \widetilde{+} (-eL)$ 是星体, 组合径向体内部径向方向上两点 x, y 的线段记为 N_g' , 其中取 $x \in K, y \in L$, 即 $N_g' = \overline{xy}$, 且要使得 $N_g' = (K \cup gL) \cap N_g$ 必须有 $K \cap gL \cap N_g \neq \emptyset$ 成立, 即意味着线段 $(K \cup gL) \cap N_g$ 必须通过 $K \cap gL$, 且有 $(K \cap gL \cap N_g) \subset ((K \cup gL) \cap N_g)$, 故有

$$\chi(K \cap gL \cap N_g) * \chi((K \cup gL) \cap N_g) = \chi(K \cap gL \cap N_g).$$

引理 3.3 设 K 和 L 是 R^n 中关于原点 O 的星体, 其中 K 为固定的, L 在刚体运动 g 作用下运动, K 和 gL 相交非空, N_g 是连接 O 和 gO 的线段, 那么下面的公式成立

$$\begin{aligned} & \int_{g \in G(n), K \cap gL \cap N_g \neq \emptyset} \text{vol}_1((K \cup gL) \cap N_g) d\mu(g) \\ &= \frac{1}{n(n+1)\omega_n} \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n+1}{i} \widetilde{W}_{n-i}(K) \widetilde{W}_{i-1}(L). \end{aligned} \quad (3.3)$$

证 任意一个运动 $g \in G(n)$, 令 $Q = gO$, e 是运动中的旋转运动. 首先证明下面等式成立

$$\int \text{vol}_1((K \cup gL) \cap N_g) \chi(K \cap gL \cap N_g) dQ = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n+1}{i} \int_{S^{n-1}} \rho_K^i(u) \rho_{eL}^{n-i+1}(-u) du.$$

令 $\rho = |\overrightarrow{OQ}|$, $u = \frac{1}{\rho} \overrightarrow{OQ}$, $\rho_M = \max\{\rho_K(u), \rho_{eL}(-u)\}$, $\rho_m = \min\{\rho_K(u), \rho_{eL}(-u)\}$, 那么

$$\text{vol}_1((K \cup gL) \cap N_g) \chi(K \cap gL \cap N_g) = \begin{cases} \text{vol}_1(K \cap gL \cap N_g), & \rho \leq \rho_m, \\ \rho, & \rho_m \leq \rho \leq \rho_M, \\ \rho_m + \rho_M - \text{vol}_1(K \cap gL \cap N_g), & \rho \geq \rho_M. \end{cases}$$

那么

$$\begin{aligned}
 & \int \text{vol}_1((K \cup gL) \cap N_g) \chi(K \cap gL \cap N_g) \rho^{n-1} d\rho \\
 &= \int_0^{\rho_m} \text{vol}_1((K \cup gL) \cap N_g) \rho^{n-1} d\rho + \int_{\rho_m}^{\rho_M} \rho \rho^{n-1} d\rho \\
 & \quad + \int_{\rho_M}^{\rho_M + \rho_m} (\rho_m + \rho_M - \text{vol}_1(K \cap gL \cap N_g)) \rho^{n-1} d\rho \\
 &= \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n+1}{i} \rho_K^i(u) \rho_{eL}^{n-i+1}(-u),
 \end{aligned}$$

由 $d\mu(g) = dQdv(e)$, 则代入计算有

$$\begin{aligned}
 & \int_{g \in G(n)} \text{vol}_1((K \cup gL) \cap N_g) \chi(K \cap gL \cap N_g) d\mu(g) \\
 &= \int_{e \in so(n)} \left(\int \text{vol}_1((K \cup gL) \cap N_g) dQ \right) dv(e) \\
 &= \frac{1}{n(n+1)\omega_n} \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n+1}{i} \widetilde{W}_{n-i}(K) \widetilde{W}_{i-1}(L).
 \end{aligned}$$

类似的可以得到下述定理成立.

推论 3.4 设 K 和 L 是 R^n 中关于原点 O 的星体, 其中 K 为固定的, L 在刚体运动 g 作用下运动, K 和 gL 相交非空, N_g 是连接 O 和 gO 的线段, 那么下面的公式成立

$$\begin{aligned}
 & \int_{g \in G(n), K \cap gL \cap N_g \neq \emptyset} \text{vol}_1((K \cup gL) \cap N_g)^m d\mu(g) \\
 &= \frac{1}{n(m+n+1)\omega_n} \sum_{i=1}^{m+n+1} \binom{m+n+1}{i} \widetilde{W}_{n-i}(K) \widetilde{W}_{i-m-1}(L).
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

证 任意一个运动 $g \in G(n)$, 令 $Q = gO$, e 是运动中的旋转运动. 首先证明下面等式成立

$$\begin{aligned}
 & \int \text{vol}_1((K \cup gL) \cap N_g)^m \chi(K \cap gL \cap N_g) dQ \\
 &= \frac{1}{m+n+1} \sum_{i=1}^{m+n+1} \binom{m+n+1}{i} \int_{S^{n-1}} \rho_K^i(u) \rho_{eL}^{m+n-i+1}(-u) du,
 \end{aligned}$$

那么

$$\begin{aligned}
 & \int \text{vol}_1((K \cup gL) \cap N_g)^m \chi(K \cap gL \cap N_g) \rho^{n-1} d\rho \\
 &= \int_0^{\rho_m} \text{vol}_1((K \cup gL) \cap N_g)^m \rho^{n-1} d\rho + \int_{\rho_m}^{\rho_M} \rho^m \rho^{n-1} d\rho \\
 & \quad + \int_{\rho_M}^{\rho_M + \rho_m} (\rho_m + \rho_M - \text{vol}_1(K \cap gL \cap N_g))^m \rho^{n-1} d\rho
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{m+n+1} \sum_{i=1}^{m+n+1} \binom{m+n+1}{i} \rho_K^i(u) \rho_{eL}^{m+n-i+1}(-u),$$

由 $d\mu(g) = dQdv(e)$, 则代入计算有

$$\begin{aligned} & \int_{g \in G(n)} \text{vol}_1((K \cup gL) \cap N_g)^m \chi(K \cap gL \cap N_g) d\mu(g) \\ &= \int_{e \in so(n)} \left(\int \text{vol}_1((K \cup gL) \cap N_g)^m dQ \right) dv(e) \\ &= \frac{1}{n(m+n+1)\omega_n} \sum_{i=1}^{m+n+1} \binom{m+n+1}{i} \widetilde{W}_{n-i}(K) \widetilde{W}_{i-m-1}(L). \end{aligned}$$

引理 3.5 令 K 和 L 是 R^n 中有非空内部的凸体, K 固定不动, L 在刚体运动 g 作用下运动, K 和 gL 相交非空, x, y 分别是凸体 K 和 L 内的随机点, N_g 是连接 x 和 gy 的线段, $g \in G(n)$, 则有

$$\begin{aligned} & \int_{g \in G(n), x \in K, y \in L, K \cap gL \cap N_g \neq \emptyset} \text{vol}_1((K \cup gL) \cap N_g) d\mu(g) dx dy \\ &= \frac{1}{n(n+1)\omega_n} \sum_{i=1}^n \binom{n+1}{i} \frac{I_{n-i+2}(L) I_{i+1}(K)}{(n-i+2)(i+1)}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

证

$$\begin{aligned} & \int_{g \in G(n), x \in K, y \in L, K \cap gL \cap N_g \neq \emptyset} \text{vol}_1((K \cup gL) \cap N_g) d\mu(g) dx dy \\ &= \int_{x \in K, y \in L} \frac{1}{n(n+1)\omega_n} \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n+1}{i} \widetilde{W}_{n-i}(K) \widetilde{W}_{i-1}(L) dx dy \\ &= \frac{1}{n(n+1)\omega_n} \sum_{i=1}^n \binom{n+1}{i} \frac{I_{n-i+2}(L) I_{i+1}(K)}{(n-i+2)(i+1)}. \end{aligned}$$

定理 3.6 令 K 和 L 是 R^n 中有非空内部的凸体, K 固定不动, L 在刚体运动 g 作用下运动, K 和 gL 相交非空, 凸体 K 和 gL 的径向组合体 $K \widetilde{+} (-eL)$ 内部径向方向上任意两点间的平均距离为

$$E_{K \widetilde{+} (-eL)}(r) = \frac{\sum_{i=1}^n \binom{n+1}{i} \frac{I_{n-i+2}(L) I_{i+1}(K)}{(n-i+2)(i+1)}}{n(n+1) \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{I_{n-i+1}(K) I_{i+1}(L)}{(n-i+1)(i+1)}}. \quad (3.6)$$

证 任取凸体 $K \cap gL$ 中一点 O , 任意一个运动 $g \in G(n)$, 令 $Q = gO$, 由

$$\chi(K \cap gL \cap N_g) = 1 \Leftrightarrow Q \in K \widetilde{+} (-eL),$$

则可知, 此时 $\overline{OgO} = \overline{OQ} = (K \cup gL) \cap N_g$, 且点 O 可以取遍 K 内部任意一点, 与此同时点 Q 亦可以取遍星体 $K \widetilde{+} (-eL)$ 内部径向方向上任意两点间的距离, 换言之,

$\chi(K \cap gL \cap N_g) \text{vol}_1((K \cup gL) \cap N_g)$ 取遍星体内部任意两点之间的距离, 故

$$\begin{aligned} E_{K \tilde{+}(-eL)}(r) &= \frac{\int_{g \in G(n), x \in K, y \in L, K \cap gL \cap N_g \neq \emptyset} \text{vol}_1((K \cup gL) \cap N_g) d\mu(g) dx dy}{\int_{g \in G(n), x \in K, y \in L, K \cap gL \cap N_g \neq \emptyset} \chi((K \cup gL) \cap N_g) d\mu(g) dx dy} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n \binom{n+1}{i} \frac{I_{n-i+2}(L) I_{i+1}(K)}{(n-i+2)(i+1)}}{n(n+1) \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{I_{n-i+1}(K) I_{i+1}(L)}{(n-i+1)(i+1)}}. \end{aligned}$$

参 考 文 献

- [1] Zhang Gaoyong. Dual kinematic formulas[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1999, 351: 985–995.
- [2] 王卫东, 马统一. 对偶混合均质积分 [J]. 数学学报中文版, 2012, 55(6): 1111–1114.
- [3] Klain D. Star valuations and dual mixed volumes[J]. Adv. Math., 1996, 121: 80–101.
- [4] Lutwak E. Intersection bodies and dual mixed volumes[J]. Adv. Math., 1988, 71: 232–261.
- [5] Gardner R J. Geometric tomography[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.
- [6] Xie Fengfan. Some dual kinematic formulas[J]. Acta Mathematica Scientia, 2007, 27B(2): 395–403
- [7] 谢凤繁. 平移积分几何中的对偶运动公式 [J]. 应用数学, 2009, 22(3): 913–918
- [8] Santalo L A 著. 吴大任译. 积分几何与几何概率 [M]. 天津: 南开大学出版社, 1991

THE AVERAGE DISTANCE OF TWO POINTS OF A KINEMATIC STAR BODY ON A RADIAL DIRECTION

WANG Xing-xing¹, XIE Feng-fan¹, SU Qin-nong²

(1. College of Science, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430065, China)

(2. Wuhan Technical College of Communications, Wuhan 430065, China)

Abstract: In this paper, we study the problem of the average distances between two internal points of the intersection of two intersecting non-empty convex bodies and their linear radial combination. By applying the fundamental kinematic formulas involving quermassintegrals to the case of dual quermassintegrals and dual mixed volumes, we obtain the computational formulas of average distance, which generalize the relevant results of the existing dual kinematic formulas.

Keywords: the kinematic formula; dual quermassintegral; dual mixed volume; the linear radial combination

2010 MR Subject Classification: 53C65