Vol. 34 (2014)
No. 2

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

一类四元数矩阵方程的循环解及其最佳逼近

黄敬频, 谭云龙, 许克佶

(广西民族大学理学院, 广西 南宁 530006)

摘 要: 本文研究了四元数体上矩阵方程 $XB = C$ 的循环解及其最佳逼近问题. 利用循环矩阵的结构表示式, 以及四元数矩阵的复分解, 得到了方程 $XB = C$ 的循环解存在条件及其通解形式; 在循环矩阵约束条件下, 给出了该方程的最小二乘解集合; 与此同时, 在最小二乘解集合中, 获得与给定四元数循环矩阵的最佳逼近解. 推广了约束矩阵方程的数值求解范围. 数值算例验证了本文算法的可行性.

关键词: 四元数体; 循环矩阵; 最小二乘; 最佳逼近

MR(2010) **主题分类号:** 65F30 **中图分类号:** O241.6

文献标识码: A **文章编号:** 0255-7797(2014)02-0353-07

1 引言

循环矩阵在数学和物理等学科有许多应用. 关于复域上循环矩阵的性质、特征值和特征向量、及其反问题的研究, 目前已有较完整的结果 [1−3]. 但关于四元数体上循环矩阵的讨论甚少. 2012 年, 文献 [4] 给出了四元数体上循环矩阵的左右特征值表示以及左特征值反问题.

本文目的是在四元数体上讨论矩阵方程 $XB = C$ 的循环解及其最佳逼近问题.

为讨论方便, 用 $\mathbf{C}^{n\times n}, \mathbf{Q}^{n\times n}$ 分别表示全体 $n \times n$ 复矩阵和四元数矩阵的集合; $A^T, \bar{A}, A^*$ 分别表示 $A \in \mathbf{Q}^{n\times n}$ 的转置、共轭与共轭转置; $1, \omega_1, \cdots, \omega_{n-1}$ 表示复域上全体 n 次本原单位根, 即 $\omega_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$ $(k = 0, 1, \cdots, n-1)$, A^+ 表示矩阵的 Moore-Penrose 广义逆; $\|A\| = (\mathrm{tr}A^*A)^{\frac{1}{2}}$ 表示四元数矩阵的 Frobenius 范数 [5]. 下面先给出有关定义和引理.

定义 1.1 形如

$$A = \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & \cdots & q_{n-1} \\ q_{n-1} & q_0 & \cdots & q_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_0 \end{bmatrix} \in \mathbf{Q}^{n\times n} \tag{1.1}$$

的矩阵称为 n 阶四元数循环矩阵, 记作 $A = C(q_0, q_1, \cdots, q_{n-1})$. 若记

$$D = \begin{bmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n\times n},$$

则四元数循环矩阵 (1.1) 可表示为

$$A = q_0 I + q_1 D + \cdots + q_{n-1} D^{n-1}.$$

*收稿日期: 2013-03-05 接收日期: 2013-05-08

基金项目: 广西高校科研项目 (2013YB076); 广西民族大学研究生教育创新项目 (gxun-chx2012099).

作者简介: 黄敬频 (1964–), 男, 广西陆川, 教授, 主要研究方向: 矩阵计算及其应用.

易知, 矩阵 D 的 n 个特征值正是复域上全体 n 次本原单位根: $\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_{n-1}$. 令

$$\alpha_s=(1,\omega_s,\omega_s^2,\cdots,\omega_s^{n-1})^T\in\mathbf{C}^{n\times 1}, s=0,1,\cdots,n-1,$$

并取

$$U=\frac{1}{\sqrt{n}}(\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1})\in\mathbf{C}^{n\times n}, \tag{1.2}$$

则 U 是酉矩阵, 即 $U^*U=I$.

引理 1.2 [3] 复域上矩阵 $A=C(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})$ 的充要条件是存在复数组 $\{\lambda_i\}_{i=0}^{n-1}$, 使得

$$A=U\mathrm{diag}(\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1})U^*,$$

其中 U 是如 (1.2) 所示的酉矩阵, $\lambda_s=\sum\limits_{j=0}^{n-1}a_j\omega_s^j\ (s=0,1,\cdots,n-1)$.

引理 1.3 [6] 复域上矩阵方程 $XB=C$ 有解的充要条件是 $CB^+B=C$. 此方程的一般解和最小二乘解集均可表示为

$$X=CB^++Y(I-BB^+),$$

其中 Y 是任意矩阵, 且存在唯一极小范数最小二乘解 $X_0=CB^+$.

本文主要讨论如下 3 个问题:

问题 I 给定四元数矩阵 $B,C\in\mathbf{Q}^{n\times m}$, 求循环矩阵 $X\in\mathbf{Q}^{n\times n}$, 使得 $XB=C$.

问题 II 对给定的四元数矩阵 B,C, 求循环矩阵 $X\in\mathbf{Q}^{n\times n}$, 使得 $\|XB-C\|^2=\min$.

问题 III 设 S_E 是问题II的解集合, $G\in\mathbf{Q}^{n\times n}$ 是已知循环矩阵, 求 $X_0\in S_E$, 使得

$$\min_{X\in S_E}\|X-G\|=\|X_0-G\|. \tag{1.3}$$

2 问题 I – III 的解

设 $X\in\mathbf{Q}^{n\times n}$ 是一个四元数循环矩阵, 它在复域 $\mathbf{C}$ 上的分解式为

$$X=X_1+X_2j,$$

其中 $X_1=C(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}), X_2=C(b_0,b_1,\cdots,b_{n-1})$ 均是复循环矩阵. 根据引理 1.2, 存在两组复数 $\{f_i\}_{i=0}^{n-1}$ 和 $\{g_i\}_{i=0}^{n-1}$, 使得

$$X_1=U\Sigma_1U^*, X_2=U\Sigma_2U^*, \tag{2.1}$$

其中 $\Sigma_1=\mathrm{diag}(f_0,f_1,\cdots,f_{n-1}), \Sigma_2=\mathrm{diag}(g_0,g_1,\cdots,g_{n-1})$, 且

$$f_s=\sum_{j=0}^{n-1}a_j\omega_s^j, s=0,1,\cdots,n-1, \tag{2.2}$$

$$g_s=\sum_{j=0}^{n-1}b_j\omega_s^j, s=0,1,\cdots,n-1. \tag{2.3}$$

根据 n 次本原单位根的互异性, 以及 Vandermonde 行列式性质可知, 对任意复数组 $\{f_i\}_{i=0}^{n-1}$ 和 $\{g_i\}_{i=0}^{n-1}$, 方程组 (2.2) 和 (2.3) 均可解. 再设 $B, C \in \mathbf{Q}^{n\times m}$ 在复域 $\mathbf{C}$ 上的分解式为

$$B = B_1 + B_2 j, C = C_1 + C_2 j,$$

则四元数矩阵方程 $XB = C$ 等价于

$$(X_1 + X_2 j)(B_1 + B_2 j) = C_1 + C_2 j, \tag{2.4}$$

将 (2.4) 式左边展开, 得

$$(X_1 B_1 - X_2 \bar{B}_2) + (X_1 B_2 + X_2 \bar{B}_1) j = C_1 + C_2 j.$$

因此利用四元数矩阵复分解的唯一性 [5], 可得

$$\begin{cases} X_1 B_1 - X_2 \bar{B}_2 = C_1, \\ X_1 B_2 + X_2 \bar{B}_1 = C_2, \end{cases} \tag{2.5}$$

再将 (2.1) 代入 (2.5), 整理得

$$\begin{cases} \Sigma_1 U^* B_1 - \Sigma_2 U^* \bar{B}_2 = U^* C_1, \\ \Sigma_1 U^* B_2 + \Sigma_2 U^* \bar{B}_1 = U^* C_2, \end{cases} \tag{2.6}$$

用 $A(i)$ 表示矩阵 A 的第 i 行向量, 并记

$$\begin{aligned} M_i &= \begin{bmatrix} (U^* B_1)(i) & (U^* B_2)(i) \\ -(U^* \bar{B}_2)(i) & (U^* \bar{B}_1)(i) \end{bmatrix} \in \mathbf{C}^{2\times 2m}, \\ N_i &= ((U^* C_1)(i), (U^* C_2)(i)) \in \mathbf{C}^{1\times 2m}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

则方程组 (2.6) 等价于

$$(f_{i-1}, g_{i-1}) M_i = N_i, i = 1, \cdots, n. \tag{2.8}$$

因此关于问题 I, 有如下结果

定理 2.1 给定四元数矩阵 $B, C \in \mathbf{Q}^{n\times m}$, 则方程 $XB = C$ 存在四元数循环矩阵解的充要条件是

$$N_i M_i^+ M_i = N_i, i = 1, \cdots, n$$

有解时, 其一般解为

$$X = U\mathrm{diag}(f_0, f_1, \cdots, f_{n-1}) U^* + U\mathrm{diag}(g_0, g_1, \cdots, g_{n-1}) U^* j,$$

其中 $\{f_i\}_{i=0}^{n-1}$ 和 $\{g_i\}_{i=0}^{n-1}$ 由下式给出

$$(f_{i-1}, g_{i-1}) = N_i M_i^+ + Y_i (I - M_i M_i^+), i = 1, \cdots, n,$$

这里 M_i, N_i 如 (2.7) 所示, $Y_i = (\alpha_i, \beta_i) \in \mathbf{C}^{1\times 2}$ 是任意矩阵.

证 由方程组 (2.8) 及引理 1.3 可知结论成立.

由定理 2.1 可知, 当 n 个复数对 $(f_{i-1}, g_{i-1})_{i=1}^{n}$ 唯一时, 问题 I 具有唯一解. 于是有

推论 2.2 问题 I 具有唯一解的充要条件是

$$\mathrm{rank} M_i = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} M_i \\ N_i \end{bmatrix} = 2, i = 1, \cdots, n.$$

下面我们讨论四元数矩阵方程 $XB = C$ 在循环矩阵约束条件下的最小二乘解. 事实上, 根据前面的分析过程及 (2.4)–(2.7) 式, 可得

$$\begin{aligned} \|XB - C\|^2 &= \|(X_1B_1 - X_2\bar{B}_2 - C_1) + (X_1B_2 + X_2\bar{B}_1 - C_2)j\|^2 \\ &= \|X_1B_1 - X_2\bar{B}_2 - C_1\|^2 + \|X_1B_2 + X_2\bar{B}_1 - C_2\|^2 \\ &= \|\Sigma_1U^*B_1 - \Sigma_2U^*\bar{B}_2 - U^*C_1\|^2 + \|\Sigma_1U^*B_2 + \Sigma_2U^*\bar{B}_1 - U^*C_2\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}[\|f_{i-1}\cdot(U^*B_1)(i) - g_{i-1}\cdot(U^*\bar{B}_2)(i) - (U^*C_1)(i)\|^2 \\ &\quad +\|f_{i-1}\cdot(U^*B_2)(i) + g_{i-1}\cdot(U^*\bar{B}_1)(i) - (U^*C_2)(i)\|^2] \\ &= \sum_{i=1}^{n}\|(f_{i-1}, g_{i-1})\cdot\begin{bmatrix} (U^*B_1)(i) & (U^*B_2)(i) \\ -(U^*\bar{B}_2)(i) & (U^*\bar{B}_1)(i) \end{bmatrix} - ((U^*C_1)(i), (U^*C_2)(i))\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}\|(f_{i-1}, g_{i-1})\cdot M_i - N_i\|^2. \end{aligned} \tag{2.9}$$

于是关于问题 II, 我们有如下结果

定理 2.3 给定四元数矩阵 $B, C \in \mathbf{Q}^{n\times m}$, 则在 X 是循环矩阵的约束条件下,

$$\|XB - C\|^2 = \min$$

的解集合为

$$S_E = \left\{ \begin{array}{c} X = U\mathrm{diag}(f_0, f_1, \cdots, f_{n-1})U^* + U\mathrm{diag}(g_0, g_1, \cdots, g_{n-1})U^*j, \\ (f_{i-1}, g_{i-1}) = N_iM_i^+ + Y_i(I - M_iM_i^+), i = 1, \cdots, n \end{array} \right\}.$$

证 由 (2.9) 式得

$$\|XB - C\|^2 = \min \Leftrightarrow \|(f_{i-1}, g_{i-1})\cdot M_i - N_i\|^2 = \min,$$

又由引理 1.3 得

$$(f_{i-1}, g_{i-1}) = N_iM_i^+ + Y_i(I - M_iM_i^+), i = 1, \cdots, n.$$

故结论成立.

最后, 我们讨论问题III的解. 若 $G \in \mathbf{Q}^{n\times n}$ 是已知循环矩阵, 不妨设

$$G = U\tilde{\Sigma}_1U^* + U\tilde{\Sigma}_2U^*j, \tag{2.10}$$

其中 $\tilde{\Sigma}_1=\mathrm{diag}(h_0,h_1,\cdots,h_{n-1}),\tilde{\Sigma}_2=\mathrm{diag}(k_0,k_1,\cdots,k_{n-1})$. 于是由定理 2.3, 得

$$\begin{aligned}\|X-G\|^2 &= \|U\mathrm{diag}(f_0,f_1,\cdots,f_{n-1})U^*+U\mathrm{diag}(g_0,g_1,\cdots,g_{n-1})U^*j\\ &\quad -U\mathrm{diag}(h_0,h_1,\cdots,h_{n-1})U^*-U\mathrm{diag}(k_0,k_1,\cdots,k_{n-1})U^*j\|^2\\ &= \|U\mathrm{diag}(f_0,f_1,\cdots,f_{n-1})U^*-U\mathrm{diag}(h_0,h_1,\cdots,h_{n-1})U^*\|^2\\ &\quad +\|U\mathrm{diag}(g_0,g_1,\cdots,g_{n-1})U^*-U\mathrm{diag}(k_0,k_1,\cdots,k_{n-1})U^*\|^2\\ &= \|\mathrm{diag}(f_0,f_1,\cdots,f_{n-1})-\mathrm{diag}(h_0,h_1,\cdots,h_{n-1})\|^2\\ &\quad +\|\mathrm{diag}(g_0,g_1,\cdots,g_{n-1})-\mathrm{diag}(k_0,k_1,\cdots,k_{n-1})\|^2\\ &= \sum_{i=1}^n\|(f_{i-1},g_{i-1})-(h_{i-1},k_{i-1})\|^2\\ &= \sum_{i=1}^n\|(N_iM_i^++Y_i(I-M_iM_i^+)-(h_{i-1},k_{i-1})\|^2, \end{aligned}\tag{2.11}$$

因此关于问题III, 我们有如下结果.

定理 2.4 设 S_E 是问题II的解集合, $G\in\mathbf{Q}^{n\times n}$ 是形如 (2.10) 的四元数循环矩阵, 则存在 $X_0\in S_E$ 使得 (1.3) 成立, 其中

$$\left\{\begin{array}{l} X_0=U\mathrm{diag}(f_0,f_1,\cdots,f_{n-1})U^*+U\mathrm{diag}(g_0,g_1,\cdots,g_{n-1})U^*j,\\ (f_{i-1},g_{i-1})=N_iM_i^++Y_i(I-M_iM_i^+),i=1,\cdots,n,\end{array}\right.\tag{2.12}$$

$$Y_i=\left\{\begin{array}{l}[(h_{i-1},k_{i-1})-N_iM_i^+](I-M_iM_i^+)^+,M_iM_i^+\neq I,\\ 0,M_iM_i^+=I,\end{array}\right.\quad i=1,\cdots,n.$$

证 由 (2.11) 式得

$$\|X-G\|^2=\min\Leftrightarrow\|N_iM_i^++Y_i(I-M_iM_i^+)-(h_{i-1},k_{i-1})\|^2=\min,$$

再由引理 1.3 知, Y_i 可按下式选取

$$Y_i=\left\{\begin{array}{l}[(h_{i-1},k_{i-1})-N_iM_i^+](I-M_iM_i^+)^+,M_iM_i^+\neq I,\\ 0,M_iM_i^+=I,\end{array}\right.\quad i=1,\cdots,n.$$

于是存在 $X_0\in S_E$ 使得 (1.3) 成立, 并且 X_0 由 (2.12) 式给出.

根据上述讨论结果, 我们给出问题Ⅰ – III的求解步骤如下.

第一步 写出四元数矩阵 B,C 的复分解和酉矩阵 U, 即

$$B=B_1+B_2j,C=C_1+C_2j,U=\frac{1}{\sqrt{n}}\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\\ \omega_0&\omega_1&\cdots&\omega_{n-1}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ \omega_0^{n-1}&\omega_1^{n-1}&\cdots&\omega_{n-1}^{n-1}\end{bmatrix}.$$

第二步 计算 M 和 N, 即

$$M_i=\begin{bmatrix}(U^*B_1)(i)&(U^*B_2)(i)\\ -(U^*\bar{B}_2)(i)&(U^*\bar{B}_1)(i)\end{bmatrix},N_i=((U^*C_1)(i),(U^*C_2)(i)),i=1,\cdots,n.$$

第三步 检验条件 $N_iM_i^+M_i=N_i(i=1,\cdots,n)$ 是否成立.

(1) 若条件成立, 说明存在循环矩阵 $X\in\mathbf{Q}^{n\times n}$ 使得 $XB=C$, 并写出其一般解:

$$\begin{cases} X=U\mathrm{diag}(f_0,f_1,\cdots,f_{n-1})U^*+U\mathrm{diag}(g_0,g_1,\cdots,g_{n-1})U^*j,\\ (f_{i-1},g_{i-1})=N_iM_i^++(\alpha_i,\beta_i)(I-M_iM_i^+),i=1,\cdots,n.\end{cases}$$

(2) 若条件不成立, 说明问题 I 无解, 这时可写出 $XB=C$ 的约束最小二乘解集 S_E.

第四步 写出循环矩阵 G 的复分解式 (2.10), 再按 (2.12) 式取得 S_E 与 G 的最佳逼近解 X_0.

3 数值算例

给定下列四元数矩阵

$$B=\begin{bmatrix} -1-j & 0.5i+0.5k & i+k\\ -1-j & -0.5-0.5j & -i-k\\ -1-j & -0.5i-0.5k & i+k\\ -1-j & 0.5+0.5j & -i-k\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix} 1+j & 2+2j & 2.5+2.5j\\ 1+j & 2i+2k & -2.5-2.5j\\ 1+j & -2-2j & 2.5+2.5j\\ 1+j & -2i-2k & -2.5-2.5j\end{bmatrix}.$$

讨论是否存在循环矩阵 $X\in\mathbf{Q}^{4\times4}$, 使得 $XB=C$.

解 首先写出四元数矩阵 B,C 的复分解和酉矩阵 U,

$$B=B_1+B_2j,C=C_1+C_2j,$$

其中

$$B_1=B_2=\begin{bmatrix} -1 & 0.5i & i\\ -1 & -0.5 & -i\\ -1 & -0.5i & i\\ -1 & 0.5 & -i\end{bmatrix},C_1=C_2=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2.5\\ 1 & 2i & -2.5\\ 1 & -2 & 2.5\\ 1 & -2i & -2.5\end{bmatrix},$$

$$U=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & \cos\frac{2\pi}{4}+i\sin\frac{2\pi}{4} & \cos\frac{4\pi}{4}+i\sin\frac{4\pi}{4} & \cos\frac{6\pi}{4}+i\sin\frac{6\pi}{4}\\ 1 & \cos\frac{4\pi}{4}+i\sin\frac{4\pi}{4} & \cos\frac{8\pi}{4}+i\sin\frac{8\pi}{4} & \cos\frac{12\pi}{4}+i\sin\frac{12\pi}{4}\\ 1 & \cos\frac{6\pi}{4}+i\sin\frac{6\pi}{4} & \cos\frac{12\pi}{4}+i\sin\frac{12\pi}{4} & \cos\frac{18\pi}{4}+i\sin\frac{18\pi}{4}\end{bmatrix}.$$

其次计算 M_i,N_i, 并直接验算可知

$$N_iM_i^+M_i=N_i(i=1,\cdots,4),$$

因此由定理 2.1 可知, 四元数矩阵方程 $XB=C$ 存在循环矩阵解, 其一般解为

$$X=U\mathrm{diag}(-1,-4i,-2.5i,\alpha)U^*+U\mathrm{diag}(0,\beta,0,0)U^*j,$$

其中 $\alpha,\beta\in\mathbf{C}$ 任意.

参 考 文 献

[1] 何承源. 循环矩阵的一些性质 [J]. 数学的实践与认识, 2001, 31(2): 211–216.

[2] Shen Guangxing. On Eigenvalues of Certain Circulant Matrices[J]. Math. Appl., 1991, 4(3): 76–82.

[3] 袁中扬. 几类循环矩阵的算法及其反问题的最小二乘解 [D]. 西安: 西安电子科技大学应用数学系, 2005.

[4] Tan Yunlong, Huang Jingpin. The left and right eigenvalues of circulant matrix over quaternion field [A]. Bu Changjiang, Shen Jihong, Zhou Jiang. Proceeding of the 7th International Conference of Matrices and Operators [C]. Manchester, UK: World Academic Press, 2012: 132–135.

[5] 李文亮. 四元数矩阵 [M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 2002.

[6] 程云鹏. 矩阵论 (第二版)[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 2000.

CIRCULANT MATRIX SOLUTION TO A CLASS OF QUATERNION MATRIX EQUATION AND ITS OPTIMAL APPROXIMATION

HUANG Jing-pin, TAN Yun-long, XU Ke-ji

(*College of Science, Guangxi University for Nationalities, Nanning 530006, China*)

Abstract: This paper is focused on the problem of the circulant matrix solution of quaternion matrix equation $XB = C$ and its optimal approximation. By using the structural formulas of a circulant matrix and complex representation of a quaternion matrix, the existence conditions of circulant matrix solution and its general solutions of the equation $XB = C$ are obtained, and the set of the least-square solution under constrain condition with circulant matrix is obtained. Meanwhile, in the above set of the least-square solution, the optimal approximation solution giving the quaternion circulant matrix is derived, which extend the range to solve the constrained matrix equation. A numerical example shows feasibility of the method.

Keywords: quaternion field; circulant matrix; least square; optimal approximation

2010 MR Subject Classification: 65F30