

Knight 不确定及机制转换环境下带通胀的最优投资问题研究

梁 勇, 费为银, 唐仕冰, 李 帅
(安徽工程大学金融工程系, 安徽 芜湖 241000)

摘要: 本文研究了投资者在 Knight 不确定及机制转换环境下带通胀的最优投资决策问题. 利用 Itô公式、 α -最大最小预期效用偏好模型、随机分析等方法, 得出了机制转换环境下利润流的动力学方程, Knight 不确定及机制转换条件下考虑通胀因素的投资预期价值公式, 利润流临界现值及不同参数对投资的影响.

关键词: Knight 不确定; 机制转换; 通胀; α -最大最小预期效用
MR(2010) 主题分类号: 60H30; 91G80 **中图分类号:** O211.6
文献标识码: A **文章编号:** 0255-7797(2014)02-0335-10

1 引言

最优消费和投资策略问题的研究一直是金融数学的基本问题, 受到国内外研究者的广泛关注. Gilboa 和 Schmeidler^[1] 在 1989 年研究了最大最小预期效用模型; Merton^[2] 在 1971 年研究了连续时间下的最优消费和投资问题. 后来最优消费和投资模型不断得到扩展. 近些年来, 研究者在此基础上考虑了决策者的信仰、Knight 不确定及机制转换等因素对投资策略的影响, 使得模型更为贴合实际. Chen 和 Epstein^[3] 建立了多先验效用的连续时间跨期模型, 并对风险溢价和含糊溢价进行了经济学解释. Fei^[4] 于 2007 年研究了含糊和预期条件下的最优消费和投资组合问题; 韩立岩和周娟^[5] 研究了 Knight 不确定环境下基于模糊测度的期权定价模型; Fei^[6] 在 2009 年利用 α -最大最小预期效用 (α -MEU) 模型研究了在含糊环境下的最优消费和投资问题; 另一方面, 根据已有的研究成果, 我们可以看出机制转换环境对决策也存在一定的影响; Kim 等^[7] 研究了含糊及机制转换环境下的投资问题; 费为银和李淑娟^[8] 研究了 Knight 不确定下带通胀的最优消费和投资模型. 而通过对已有经济数据的分析, 我们不难发现, 在现实经济环境中通货膨胀或通货紧缩对投资决策存在一定程度的影响. 本文在 Kim 等^[7] 的基础上研究了 Knight 不确定及机制转换环境下带通胀的最优投资问题. 对其模型进行了推广, 不仅在理论上得出了在 Knight 不确定及机制转换环境下带通胀的项目估值公式, 并对相关结论进行了数值分析.

2 Knight 不确定及机制转换环境下的利润流问题

我们首先描述机制转换环境. 假设存在两种机制: 机制 E 和机制 C , 其分别表示“扩

*收稿日期: 2012-09-06 接收日期: 2013-03-04

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (71171003; 71271003); 安徽省自然科学基金资助项目 (090416225); 安徽省高校自然科学基金资助项目 (KJ2010A037); 安徽省教育厅人文社会科学基金资助项目 (SK2013B057).

作者简介: 梁勇 (1981-), 男, 安徽含山, 硕士, 讲师, 研究方向为金融数学与金融工程.

张 (expansion)” 和 “紧缩 (contraction)” 这两种机制. 发生跳时, 机制由 i 转变 j , 其中 $i \neq j, i, j \in \{E, C\}$.

现假设在概率空间 (Ω, \mathcal{F}, P) 上定义两个标量 Wiener 过程 $w_I(t)$ 和 $w(t)$, $w_I(t)$ 构建通货膨胀的随机状态, $w(t)$ 构建利润流的不确定性. P 表示单一的原始概率测度, 并且设定所有的随机过程都是适应的. 由于通货膨胀与市场相关, 因此 $w_I(t)$ 和 $w(t)$ 相关. 存在另一个独立于 $w_I(t)$ 和 $w(t)$ 的强度为 λ 的 Poisson 过程 $N(t)$. 令 $\mathcal{F}_t = \sigma\{w_I(s), w(s), N(s); s \leq t\}$, 由费为银和李淑娟^[8] 可知对数消费篮子价格的动力学可以表示为

$$dL(t) = (\psi - \frac{1}{2}\xi^2)dt + \xi dw_I(t), L(0) = L_0, \quad (2.1)$$

其中 ψ 与 ξ 为正的常数, 向量 γ 表示 $w_I(t)$ 与 $w(t)$ 间的相关系数, 即 $E[dw(t)dw_I(t)] = \gamma dt$. ψ 表示即期预期通货膨胀率, ξ 表示通胀波动率, L_0 为已知. 则机制转换环境和概率测度 P 下利润流 $\pi(t)$ 由以下随机微分方程给出

$$\frac{d\pi(t)}{\pi(t)} = \mu(t)dt + \sigma(t)dB(t), \quad (2.2)$$

且

$$\mu(t) = \begin{cases} \mu_E, & \text{扩张,} \\ \mu_C, & \text{紧缩,} \end{cases} \quad \sigma(t) = \begin{cases} \sigma_E, & \text{扩张,} \\ \sigma_C, & \text{紧缩,} \end{cases}$$

初始利润流 $\pi(0) \in \mathcal{R}$ 且假设已知. 现刻画 Knight 不确定环境. 首先给定密度生成元集为

$$\Theta = \{\theta = (\theta_t) \mid |\theta_t| \leq k, \forall t \in [0, T]\},$$

其中 k 为一个非负常数, 表示含糊的程度. 因此 $\mathcal{P} = \{Q^\theta \mid \theta \in \Theta\}$, 其中 Q^θ 由下式给出

$$\frac{dQ^\theta}{dP} = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^T |\theta(s)|^2 ds - \int_0^T \theta(s) dB(s) \right\}.$$

通过 Girsanov 定理, Q^θ 下的标准布朗运动为

$$B(t)^\theta = B(t) + \int_0^t \theta(s) ds. \quad (2.3)$$

另一方面, 由 (2.1) 和 (2.2) 式可得

$$d(e^{-L(t)}) = -e^{-L(t)} dL(t) + \frac{1}{2} e^{-L(t)} \xi^2 dt = -e^{-L(t)} ((\psi - \xi^2)dt + \xi dw_I(t)).$$

又由于 $\tilde{\pi}(t) \triangleq e^{-L(t)} \pi(t)$, 则

$$\begin{aligned} d(\tilde{\pi}(t)) &= d(e^{-L(t)} \pi(t)) \\ &= \pi(t) d(e^{-L(t)}) + e^{-L(t)} d\pi(t) + d\pi(t) d(e^{-L(t)}) \\ &= \tilde{\pi}(t) (\xi^2 - \psi + \mu(t) - \sigma(t)\xi\gamma) dt + \tilde{\pi}(t) (\sigma(t)dw(t) - \xi dw_I(t)) \\ &= \tilde{\pi}(t) (\xi^2 - \psi + \mu(t) - \sigma(t)\xi\gamma) dt + \tilde{\pi}(t) \sqrt{\sigma^2(t) + \xi^2 - 2\sigma(t)\xi\gamma} dB(t), \end{aligned}$$

其中 $dB(t) = \frac{\sigma(t)dw(t) - \xi dw_I(t)}{\sqrt{\sigma^2(t) + \xi^2 - 2\sigma(t)\xi\gamma}}$, $B(t)$ 为标准布朗运动.

因此 Q^θ 下带通胀折现的利润流 $\tilde{\pi}(t)$ 动力学方程为

$$\frac{d\tilde{\pi}(t)}{\tilde{\pi}(t)} = (\tilde{\mu}(t) - \tilde{\sigma}(t))dt + \tilde{\sigma}(t)dB(t)^\theta, \quad (2.4)$$

其中

$$\tilde{\mu}(t) = \xi^2 - \psi + \mu(t) - \sigma(t)\xi\gamma = \begin{cases} \xi^2 - \psi + \mu_E - \sigma_E\xi\gamma, & \text{扩张,} \\ \xi^2 - \psi + \mu_C - \sigma_C\xi\gamma, & \text{紧缩,} \end{cases}$$

$$\tilde{\sigma}(t) = \sqrt{\sigma^2(t) + \xi^2 - 2\sigma(t)\xi\gamma} = \begin{cases} \sqrt{\sigma_E^2 + \xi^2 - 2\sigma_E\xi\gamma}, & \text{扩张,} \\ \sqrt{\sigma_C^2 + \xi^2 - 2\sigma_C\xi\gamma}, & \text{紧缩,} \end{cases}$$

再通过 Itô 公式, 我们可以推导出在 Knight 不确定及机制转换环境下利润流的动力学方程为

$$\tilde{\pi}(t) = \tilde{\pi}(0) \exp \left[\int_0^t (\tilde{\mu}(s) - \tilde{\sigma}(s)\theta(s) - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2(s))ds + \int_0^t \tilde{\sigma}(s)dB(s)^\theta \right], \quad (2.5)$$

其中 $\tilde{\mu}, \tilde{\sigma}$ 由 (2.4) 式给出.

以下对投资者决策问题进行描述. 在 (2.5) 式的基础上, 我们加入决策者信仰因素. 利用 α -MEU 偏好模型, 研究决策者信仰对项目利润流所产生的影响. 随机函数 $f(x)$ 的期望值为最好情形 (权重为 α) 与最坏情形 (权重为 $1 - \alpha$) 的凸组合, 其中 $\alpha \in [0, 1]$ 表示决策者对同一事物的不同态度, 即决策者的信仰. 因此, 利用 α -MEU 偏好框架可以检测决策者的含糊态度对投资的影响, 我们可以将 α -期望值写为

$$E^\alpha[f(x)] = \alpha \sup_{Q^\theta \in \mathcal{P}} E_t^{Q^\theta}[f(x)|\sigma(t) = \sigma_i] + (1 - \alpha) \inf_{Q^\theta \in \mathcal{P}} E_t^{Q^\theta}[f(x)|\sigma(t) = \sigma_i], i = E, C, \quad (2.6)$$

其中 $E_t^{Q^\theta}[\cdot|\sigma(t) = \sigma_i]$ 表示此时期望值是依赖于给定机制 i . 简单起见, 假定决策者已经知道在 t 时刻市场处于扩张或紧缩.

如果假设 ρ 为一个投资者的主观贴现率, T 为项目的退出时间, 那么基于 α -MEU 偏好模型和 Knight 不确定及通胀环境, 可得利润流 $\tilde{\pi}(t)$ 投资在 0 时刻的 α 期望值为

$$V_i(\pi(0)|\alpha) = E^\alpha \left[\int_0^T e^{-\rho s - L(s)} \pi(s) ds \right] = \alpha \sup_{Q^\theta \in \mathcal{P}} E^{Q^\theta} \left[\int_0^T e^{-\rho s - L(s)} \pi(s) ds \mid \sigma(0) = \sigma_i \right] \\ + (1 - \alpha) \inf_{Q^\theta \in \mathcal{P}} E^{Q^\theta} \left[\int_0^T e^{-\rho s - L(s)} \pi(s) ds \mid \sigma(0) = \sigma_i \right], i = E, C. \quad (2.7)$$

因此, 投资者对项目的估值为

$$F_i(\pi(0)|\alpha) = \max \{ V_i(\pi(0)|\alpha) - I, 0 \}, i = E, C, \quad (2.8)$$

其中 I 表示项目初始成本. 项目估值 F_i 将用于衡量是否进行投资, 若 F_i 为正, 表示项目存在收益则进行投资, 若 F_i 小于 0, 表示项目亏损则放弃投资.

3 在 Knight 不确定及通胀环境下的投资决策

为了计算投资的期望值 $V_i(\pi(0)|\alpha)$, 我们定义一个随机过程 I_t 为 $I(t) \triangleq \begin{cases} 1, & \text{扩张,} \\ 0, & \text{紧缩.} \end{cases}$

我们定义一个在 0 到 t 时间内扩张期利润流的占位时 (occupation time)

$$\varsigma(s) \triangleq \int_0^s I(t) dt. \quad (3.1)$$

定理 3.1 当利润流计算公式由 (2.7) 式给定时, 考虑通胀因素, 则以下等式成立

$$\begin{aligned} & \sup_{Q^\theta \in \mathcal{P}} E^{Q^\theta} \left[\int_0^T e^{-\rho s - L(s)} \pi(s) ds \mid \sigma(0) = \sigma_i \right] \\ &= \pi(0) e^{-L_0} \int_0^T \left[\exp((-\rho + \tilde{\mu}_C + k\tilde{\sigma}_C)s) \int_0^s \exp\{(\tilde{\mu}_E - \tilde{\mu}_C + k(\tilde{\sigma}_E - \tilde{\sigma}_C))u\} f_i(s, u) du \right] ds, \\ & \inf_{Q^\theta \in \mathcal{P}} E^{Q^\theta} \left[\int_0^T e^{-\rho s - L(s)} \pi(s) ds \mid \sigma(0) = \sigma_i \right] \\ &= \pi(0) e^{-L_0} \int_0^T \left[\exp((-\rho + \tilde{\mu}_C - k\tilde{\sigma}_C)s) \int_0^s \exp\{(\tilde{\mu}_E - \tilde{\mu}_C - k(\tilde{\sigma}_E - \tilde{\sigma}_C))u\} f_i(s, u) du \right] ds, \end{aligned} \quad (3.2)$$

其中 $\tilde{\mu}(s)$, $\tilde{\sigma}(s)$ 由 (2.4) 式给出. 由 Jang 和 Roh^[9] 可知 $f_i(s, u)$ 是 $\varsigma(s)$ 的概率密度函数, $\sigma(0) = \sigma_i$ 且满足

$$\begin{aligned} f_E(s, u) &\triangleq e^{-\lambda_E s} \delta_0(s - u) + e^{-\lambda_C(s-u) - \lambda_E u} \left(\left(\frac{\lambda_E \lambda_C u}{s - u} \right)^{\frac{1}{2}} I_1(2(\lambda_E \lambda_C u(s - u))^{\frac{1}{2}}) \right. \\ &\quad \left. + \lambda_E I_0(2(\lambda_E \lambda_C u(s - u))^{\frac{1}{2}}) \right), \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} f_C(s, u) &\triangleq e^{-\lambda_C s} \delta_0(s - u) + e^{-\lambda_C(s-u) - \lambda_E u} \left(\left(\frac{\lambda_E \lambda_C (s - u)}{u} \right)^{\frac{1}{2}} I_1(2(\lambda_E \lambda_C u(s - u))^{\frac{1}{2}}) \right. \\ &\quad \left. + \lambda_C I_0(2(\lambda_E \lambda_C u(s - u))^{\frac{1}{2}}) \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Bessel 修正函数定义为 $I_a(z) \triangleq \left(\frac{z}{2}\right)^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2n}}{n! \Gamma(a+n+1)}$. 证明见附录 A.

由上述定理可以推导出以下结论.

推论 3.1 在机制 $i \in \{E, C\}$ 时, 对于一个乐观的程度值为 $\alpha \in [0, 1]$ 的决策者来说, 项目的 α -期望值如下:

$$\begin{aligned} V_i(\pi(0)|\alpha) &= \pi(0) e^{-L_0} \left\{ \alpha \int_0^T \left[\exp((-\rho + \tilde{\mu}_C + k\tilde{\sigma}_C)s) \right. \right. \\ &\quad \left. \int_0^s \exp\{(\tilde{\mu}_E - \tilde{\mu}_C + k(\tilde{\sigma}_E - \tilde{\sigma}_C))u\} f_i(s, u) du \right] ds \\ &\quad + (1 - \alpha) \int_0^T \left[\exp((-\rho + \tilde{\mu}_C - k\tilde{\sigma}_C)s) \right. \\ &\quad \left. \int_0^s \exp\{(\tilde{\mu}_E - \tilde{\mu}_C - k(\tilde{\sigma}_E - \tilde{\sigma}_C))u\} f_i(s, u) du \right] ds \left. \right\}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

其中 $f_i(s, u)$ 由 (3.4) 和 (3.5) 式给出. 现令

$$\begin{aligned} \phi_i^\alpha &= \alpha \int_0^T \left[\exp((- \rho + \tilde{\mu}_C + k\tilde{\sigma}_C)s) \right. \\ &\quad \left. \int_0^s \exp\{(\tilde{\mu}_E - \tilde{\mu}_C + k(\tilde{\sigma}_E - \tilde{\sigma}_C))u\} f_i(s, u) du \right] ds \\ &\quad + (1 - \alpha) \int_0^T \left[\exp((- \rho + \tilde{\mu}_C - k\tilde{\sigma}_C)s) \right. \\ &\quad \left. \int_0^s \exp\{(\tilde{\mu}_E - \tilde{\mu}_C - k(\tilde{\sigma}_E - \tilde{\sigma}_C))u\} f_i(s, u) du \right] ds, \end{aligned} \quad (3.7)$$

则由推论 3.1 可以得到 $V_i(\pi(0)|\alpha) = \pi(0)e^{-L_0}\phi_i^\alpha$.

推论 3.2 (完全悲观) 在机制 $i \in \{E, C\}$ 时, 对于一个乐观程度值 $\alpha = 0$ 的决策者来说, 项目的 α -期望值给定如下:

$$\begin{aligned} V_i(\pi(0)|\alpha) &= \pi(0)e^{-L_0} \int_0^T \left[\exp((- \rho + \tilde{\mu}_C - k\tilde{\sigma}_C)s) \right. \\ &\quad \left. \int_0^s \exp\{(\tilde{\mu}_E - \tilde{\mu}_C - k(\tilde{\sigma}_E - \tilde{\sigma}_C))u\} f_i(s, u) du \right] ds, \end{aligned} \quad (3.8)$$

其中 $f_i(s, u)$ 由 (3.4) 和 (3.5) 式给出.

推论 3.3 (不考虑 Knight 不确定) 当一个决策者只考虑一个概率测度时, 他对含糊的不确定程度将为 0, 等价于 $k = 0$. 通胀动力学方程由 (2.1) 式给出, 利润流的动力学方程由方程 (2.3) 和 (2.4) 给出. 在 $k = 0$ 条件下利用公式 (3.6), 可以得到

$$V_i(\pi(0)|\alpha) = \pi(0)e^{-L_0} \int_0^T \left[\exp((- \rho + \tilde{\mu}_C)s) \int_0^s \exp\{(\tilde{\mu}_E - \tilde{\mu}_C)u\} f_i(s, u) du \right] ds, \quad (3.9)$$

其中 $f_i(s, u)$ 由 (3.4) 和 (3.5) 式给出.

现刻画投资利润流的临界现值 π_i^* , $i \in \{E, C\}$, 其被定义为使得投资的期望值恰好等于初始成本时的 $\pi(0)$ 值, 即 $F_i(\pi(0)|\alpha) = 0$. 显然若当前利润流大于 π_i^* , 决策者就乐于投资; 否则放弃投资.

现令 $L(0) = L_0 = 0$, 则有如下结论.

(1) 考虑机制转换及 Knight 不确定环境下带通胀的利润流的临界现值计算公式为

$$\pi_i^* = \frac{I}{\phi_i^\alpha}, i \in \{E, C\}, \alpha \in [0, 1]. \quad (3.10)$$

(2) 考虑 $\alpha = 0$ 及机制转换环境下带通胀的利润流的临界现值为

$$\pi_i^* = \frac{I}{\phi_i^{\alpha=0}}, i \in \{E, C\}. \quad (3.11)$$

(3) 仅考虑机制转换环境下带通胀的利润流的临界现值 (即不考虑 Knight 不确定) 为

$$\pi_i^* = \frac{I}{\phi_i}, i \in \{E, C\}. \quad (3.12)$$

4 数值分析

现给定参数值 $\lambda_E = 0.29, \lambda_C = 3.413, \mu_E = 0.056349723, \mu_C = 0.03069200, \sigma_E = 0.14, \sigma_C = 0.3, \rho = 0.1, \pi(0) = 1, I = 10, \gamma = 1, \mu = 0.049548513, \psi = 0.2, L_0 = 0, \xi = 0.3$. 利用 Matlab 软件, 我们可以得到以下结论 (图见附录 B).

(1) 图 1 和图 4 可知在扩张及紧缩情形下且 $T = 5$ 时, 随 k 值增大, 当 $\alpha = 1, \alpha = 0, \alpha = 0.5$ 时, 投资平均收益 $V_i(\pi(0)|\alpha)$ 随 k 值变化呈下降趋势; 当 $T = 450$ 时扩张及紧缩情形下数值趋向一致; 图 2 中利润流的临界现值 π_i^* 变化趋势与图 1 中投资平均收益 $V_i(\pi(0)|\alpha)$ 相反.

(2) 图 3 可知在扩张及紧缩情形下且 $T = 5$ 时, 随 α 增大, 当 $k = 0$ 时, 投资平均收益 $V_i(\pi(0)|\alpha)$ 不受 α 的影响; 当 $k = 0.1$ 时, 投资平均收益 $V_i(\pi(0)|\alpha)$ 呈较缓上升趋势; $k = 0.2$ 时, 投资平均收益 $V_i(\pi(0)|\alpha)$ 呈上升趋势.

(3) 图 5 和图 6 可知, 投资平均收益 $V_i(\pi(0)|\alpha)$ 随 ψ (即期预期通胀率) 增长而降低; 投资平均收益 $V_i(\pi(0)|\alpha)$ 随 ξ (通胀波动率) 增长而增加.

(4) 图 7 可知, 利润流的临界现值 π_i^* 随 ξ (通胀波动率) 的增大而减小, 且在扩张机制下减幅较大.

5 小结

本文研究了投资者在 Knight 不确定及机制转换环境下带通胀的最优投资决策问题. 对现有模型进行了推广, 利用随机分析方法, 推导出带有通胀因素的项目投资利润流的动力学方程. 并利用 matlab 软件对数值进行了分析, 得出各因素对投资利润流均值的影响. 所得模型更加符合实际, 为项目投资提供参考依据, 问题的研究具有现实经济意义.

参 考 文 献

- [1] Gilboa I, Schmeidler D. Maxmin expected utility with non-unique prior[J]. J. Math. Economics, 1989, 18(2): 141-153.
- [2] Merton R C. Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model[J]. J. Eco. Theory, 1971, 3: 373-413.
- [3] Chen Z J, Epstein L G. Ambiguity, risk and asset returns in continuous time[J]. Econometrica, 2002, 70(4): 1403-1443.
- [4] Fei W Y. Optimal consumption and portfolio choice with ambiguity and anticipation[J]. Infor. Sci., 2007, 177(23): 5178-5190.
- [5] 韩立岩, 周娟. Knight 不确定环境下基于模糊测度的期权定价模型 [J]. 系统工程理论与实践, 2007, 12: 123-132.
- [6] Fei W Y. Optimal portfolio choice based on α -MEU under ambiguity[J]. Stoch. Models, 2009, 25(3): 455-482.
- [7] Kim K, Kwak M, Choi U J. Investment under ambiguity and regime-switching environment[Z]. Working Paper, 2009, www.ssrn.com/abstract=1424604.
- [8] 费为银, 李淑娟. Knight 不确定下带通胀的最优消费和投资模型研究 [J]. 工程数学学报, 2012, 29(6): 799-806.
- [9] Jang B, Roh K. Valuing qualitative options with stochastic volatility[J]. Quantitative Finance, 2009, 9(7): 819-825.

ON STUDY OF OPTIMAL INVESTMENT WITH INFLATION UNDER KNIGHT UNCERTAINTY AND REGIME-SWITCHING

LIANG Yong, FEI Wei-yin, TANG Shi-bing, LI Shuai

(Department of Financial Engineering, Anhui Polytechnic University, Wuhu 241000, China)

Abstract: This paper studies the problem of optimal investment with inflation under Knight uncertainty and regime-switching. By using the Itô formula, α -maxmin expected utility model, stochastic calculus, we obtain the dynamics of profit flow with inflation under regime-switching and Knight uncertainty, the profit flow calculation formulae with inflation, the critical present values of the profit flow and the explanations of the effect of the parameters on an investor's decisions.

Keywords: Knight uncertainty; regime-switching; inflation; α -maxmin expected utility

2010 MR Subject Classification: 60H30; 91G80

附录 A 定理 3.1 的证明

首先给出证明过程中所需引理及相应证明.

定义 $X(t) = \int_0^t I(s)dB(s)^\theta$. 类似文献 [7] 中的引理 4 可得下列结论.

引理 A.1 对于常数 a, b, c 来说, 有

$$E^{Q^\theta} \left[\exp \{ a\zeta(s) + bB(s)^\theta + cX(s) \} | \sigma_0 = \sigma_i \right] ds = \int_0^s \exp \left\{ \left(\frac{b^2}{2} \right) s + \left(a + bc + \frac{c^2}{2} \right) u \right\} f_i(s, u) du.$$

定理 3.1 证明 对于任意 $\theta(t) \in [-k, k]$, 由引理 A.1 可得

$$\begin{aligned} & E^{Q^\theta} \left[\int_0^T \exp \left\{ -\rho s + \int_0^s (\tilde{\mu}(t) - \theta(t)\tilde{\sigma}(t) - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}(t)^2) dt + \int_0^s \tilde{\sigma}(t) dB(t)^\theta \right\} ds | \tilde{\sigma}(0) = \tilde{\sigma}_i \right] \\ &= \int_0^T \exp \left\{ (-\rho + \tilde{\mu}_C - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_C^2) s \right\} E^{Q^\theta} \left[\exp \left\{ (\tilde{\mu}_E - \tilde{\mu}_C - \frac{1}{2}(\tilde{\sigma}_E^2 - \tilde{\sigma}_C^2)) \zeta(s) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \int_0^s \theta(t)\tilde{\sigma}(t) dt + \tilde{\sigma}_C B(s)^\theta + (\tilde{\sigma}_E - \tilde{\sigma}_C) \int_0^s I(t) dB(t)^\theta \right\} | \tilde{\sigma}(0) = \tilde{\sigma}_i \right] ds \\ &\leq \int_0^T \exp \left\{ (-\rho + \tilde{\mu}_C - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_C^2) s \right\} E^{Q^\theta} \left[\exp \left\{ (\tilde{\mu}_E - \tilde{\mu}_C - \frac{1}{2}(\tilde{\sigma}_E^2 - \tilde{\sigma}_C^2)) \zeta(s) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_0^s k\tilde{\sigma}(t) dt + \tilde{\sigma}_C B(s)^\theta + (\tilde{\sigma}_E - \tilde{\sigma}_C) \int_0^s I(t) dB(t)^\theta \right\} | \tilde{\sigma}(0) = \tilde{\sigma}_i \right] ds \\ &= \int_0^T \exp \left\{ (-\rho + \tilde{\mu}_C - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_C^2 + k\tilde{\sigma}_C) s \right\} E^{Q^\theta} \left[\exp \left\{ (\tilde{\mu}_E - \tilde{\mu}_C - \frac{1}{2}(\tilde{\sigma}_E^2 - \tilde{\sigma}_C^2) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + k(\tilde{\sigma}_E - \tilde{\sigma}_C)) \zeta(s) + \tilde{\sigma}_C B(s)^\theta + (\tilde{\sigma}_E - \tilde{\sigma}_C) \int_0^s I(t) dB(t)^\theta \right\} | \tilde{\sigma}(0) = \tilde{\sigma}_i \right] ds \\ &= \int_0^T \exp \{ (-\rho + \tilde{\mu}_C + k\tilde{\sigma}_C) s \} \cdot \int_0^s \exp \{ (\tilde{\mu}_E - \tilde{\mu}_C + k(\tilde{\sigma}_E - \tilde{\sigma}_C)) u \} f_i(s, u) du ds. \end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}
 & E^{Q^{-k}} \left[\int_0^T \exp \left\{ -\rho s + \int_0^s (\tilde{\mu}(t) - \theta(t)\tilde{\sigma}(t) - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}(t)^2)dt + \int_0^s \tilde{\sigma}(t)dB(t)^{-k} \right\} ds \mid \tilde{\sigma}(0) = \tilde{\sigma}_i \right] \\
 = & \int_0^T \exp \left\{ (-\rho + \tilde{\mu}_C - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_C^2 + k\tilde{\sigma}_C)s \right\} E^{Q^{-k}} \\
 & \left[\exp \left\{ (\tilde{\mu}_E - \tilde{\mu}_C - \frac{1}{2}(\tilde{\sigma}_E^2 - \tilde{\sigma}_C^2) + k(\tilde{\sigma}_E - \tilde{\sigma}_C))\varsigma(s) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \tilde{\sigma}_C B(s)^{-k} + (\tilde{\sigma}_E - \tilde{\sigma}_C) \int_0^s I(t)dB(t)^{-k} \mid \tilde{\sigma}(0) = \tilde{\sigma}_i \right\} \right] ds \\
 = & \int_0^T \exp \{ (-\rho + \tilde{\mu}_C + k\tilde{\sigma}_C)s \} \cdot \int_0^s \exp \{ (\tilde{\mu}_E - \tilde{\mu}_C + k(\tilde{\sigma}_E - \tilde{\sigma}_C))u \} f_i(s, u) duds.
 \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
 & E^{Q^\theta} \left[\int_0^T \exp \left\{ -\rho s + \int_0^s (\tilde{\mu}(t) - \theta(t)\tilde{\sigma}(t) - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}(t)^2)dt + \int_0^s \tilde{\sigma}(t)dB(t)^\theta \right\} ds \mid \tilde{\sigma}(0) = \tilde{\sigma}_i \right] \\
 \leq & E^{Q^{-k}} \left[\int_0^T \exp \left\{ -\rho s + \int_0^s (\tilde{\mu}(t) + k\tilde{\sigma}(t) - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}(t)^2)dt + \int_0^s \tilde{\sigma}(t)dB(t)^{-k} \right\} ds \mid \tilde{\sigma}(0) = \tilde{\sigma}_i \right].
 \end{aligned}$$

又由于 $\theta(t) \in [-k, k]$, 所以

$$\begin{aligned}
 & \sup_{Q^\theta \in \mathcal{D}} E^{Q^\theta} \left[\int_0^T e^{-\rho s - L(s)} \pi(s) ds \mid \sigma(0) = \sigma_i \right] \\
 = & \tilde{\pi}(0) \sup_{Q^\theta \in \mathcal{D}} E^{Q^\theta} \left[\int_0^T \exp \left\{ -\rho s + \int_0^s (\tilde{\mu}(t) - \theta(t)\tilde{\sigma}(t) \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}(t)^2)dt + \int_0^s \tilde{\sigma}(t)dB(t)^\theta \right\} ds \mid \tilde{\sigma}(0) = \tilde{\sigma}_i \right] \\
 = & \tilde{\pi}(0) E^{Q^{-k}} \left[\int_0^T \exp \left\{ -\rho s + \int_0^s (\tilde{\mu}(t) + k\tilde{\sigma}(t) - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}(t)^2)dt + \int_0^s \tilde{\sigma}(t)dB(t)^{-k} \right\} ds \mid \tilde{\sigma}(0) = \tilde{\sigma}_i \right] \\
 = & \tilde{\pi}(0) \int_0^T \exp \{ (-\rho + \tilde{\mu}_C + k\tilde{\sigma}_C)s \} \cdot \int_0^s \exp \{ (\tilde{\mu}_E - \tilde{\mu}_C + k(\tilde{\sigma}_E - \tilde{\sigma}_C))u \} f_i(s, u) duds.
 \end{aligned}$$

同样, 我们也可以得到 (3.3) 式.

附录 B 图 1-7

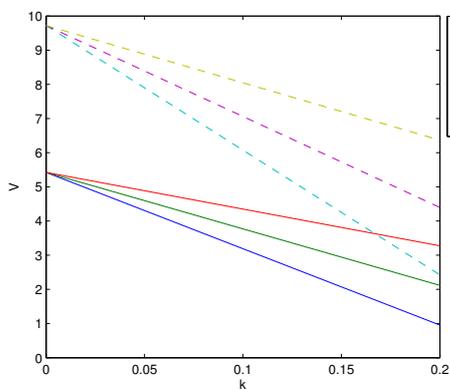


图 1 $T = 5$ 时, 在不同机制下, 投资平均收益 $V_i(\pi(0)|\alpha)$ 随 k 的变化情况 (见 (3.6) 式)

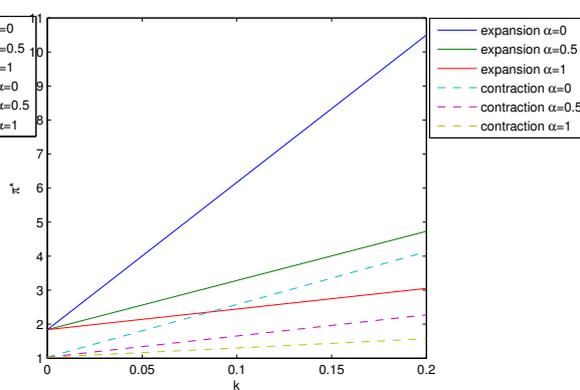


图 2 $T = 5$ 时, 在不同机制下, 临界现值 π^* 随 k 的变化情况 (见 (3.10) 式)

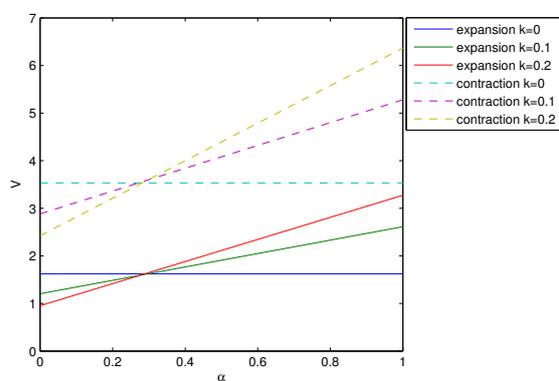


图 3 $T = 5$ 时, 在不同机制下, 投资平均收益 $V_i(\pi(0)|\alpha)$ 随 α 的变化情况 (见 (3.6) 式)

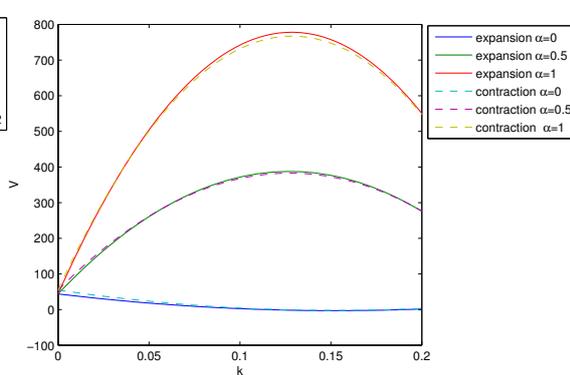


图 4 $T = 450$ 时, 在不同机制下, 投资平均收益 $V_i(\pi(0)|\alpha)$ 随 k 的变化情况 (见 (3.6) 式)

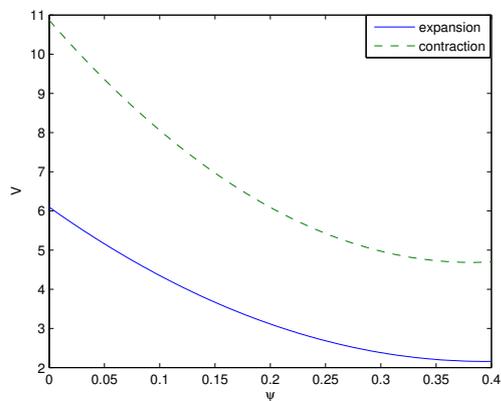


图 5 $T = 5, \alpha = 1, k = 0.1, \xi = 0.3$ 时, 在不同机制下, 投资平均收益 $V_i(\pi(0)|\alpha)$ 随 ψ 的变化情况 (见 (3.6) 式)

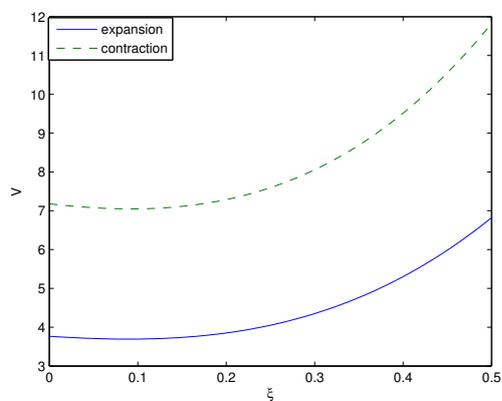


图 6 $T = 5, \alpha = 1, k = 0.1, \psi = 0.1$ 时, 在不同机制下, 投资平均收益 $V_i(\pi(0)|\alpha)$ 随 ξ 的变化情况 (见 (3.6) 式)

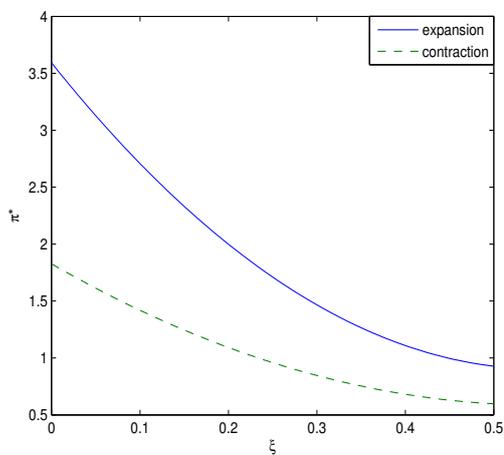


图 7: $T = 5, \alpha = 1, k = 0.1, \psi = 0.1$ 时, 在不同机制下, 临界现值 π^* 随 ξ 的变化情况 (见 (3.10) 式)