Vol. 34 (2014)
No. 2

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

关于扭曲数学期望的几个性质

李小娟
(山东青年政治学院国际商学院, 山东 济南 250103)

摘 要: 本文研究了扭曲数学期望. 利用构造示性函数的方法, 证明了扭曲数学期望满足常数平移不变性的充要条件是该扭曲数学期望是熵期望.

关键词: 非线性数学期望; 扭曲数学期望; 熵期望
MR(2010) **主题分类号**: 60E10; 60H10 **中图分类号**: O211.1
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2014)02-0306-03

1 引言及预备知识

在本文中, 首先给定概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$, 并假设对任意给定的 $p\in[0,1]$, 存在 $A\in\mathcal{F}$ 使得 $P(A)=p$. 记 $L_b(\Omega)$ 为有界 $\mathcal{F}$ - 可测随机变量全体.

本文主要考虑如下的扭曲数学期望 [1]:

$$\mathcal{E}^f[X]:=f^{-1}(E_P[f(X)]),\ X\in L_b(\Omega),$$

其中扭曲函数 $f\in C^1(\mathbb{R})$ 是严格单调函数. 易证 $\mathcal{E}^f[\cdot]$ 是非线性数学期望 (参见文献 [2]), 即满足

(1) 单调性：若 $X\le Y$, 则 $\mathcal{E}^f[X]\le\mathcal{E}^f[Y]$;

(2) 保常数性：对任给的常数 c, 有 $\mathcal{E}^f[c]=c$.

特别地, 我们把 $f(x)=e^{\lambda x}$, $\lambda\ne0$ 时的扭曲数学期望 $\mathcal{E}^f[X]=\frac{1}{\lambda}\ln(E_P[e^{\lambda X}])$ 称为熵期望, 并简记为

$$\mathcal{E}^\lambda[X]=\frac{1}{\lambda}\ln(E_P[e^{\lambda X}]),\lambda\ne0.$$

这里值得注意的是当 $\lambda<0$ 时, $\mathcal{E}^\lambda[\cdot]$ 仍是非线性数学期望, 满足

$$\mathcal{E}^\lambda[X]=-\mathcal{E}^{-\lambda}[-X].$$

另外, 如果该概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为维纳概率空间, 该熵期望可由倒向方程引入 [3].

2 主要结果

定理 2.1 对任意给定的 $X\in L_b(\Omega)$, 熵期望 $\mathcal{E}^\lambda[X]$ 关于 λ 是增函数且

$$\lim_{\lambda\to0}\mathcal{E}^f[X]=E_P[X].$$

*收稿日期: 2012-10-20 接收日期: 2013-01-04
作者简介: 李小娟 (1984–), 女, 山西左权, 助教, 主要研究方向: 非线性期望.

证 在这里只证 $\lambda > 0$ 的情况, 而 $\lambda < 0$ 的情况类似可证. 对任意给定的 $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$, 由 Hölder 不等式 $(E_P[e^{\lambda_1 X}])^{1/\lambda_1} \leq (E_P[e^{\lambda_2 X}])^{1/\lambda_2}$, 从而可以得出 $\mathcal{E}^{\lambda_1}[X] \leq \mathcal{E}^{\lambda_2}[X]$. 又由于 $f(x) = e^{\lambda x}$ 是凸函数, 由 Jessen 不等式可得

$$E_P[e^{\lambda X}] \geq e^{\lambda E_P[X]},$$

从而可得 $\mathcal{E}^{\lambda}[X] \geq E_P[X]$. 另一方面, 由控制收敛定理可得

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} E_P[\frac{1}{\lambda}(e^{\lambda X} - 1)] = E_P[X],$$

从而对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得当 $\lambda \leq \delta$ 时, 有

$$E_P[e^{\lambda X}] \leq 1 + \lambda(E_P[X] + \varepsilon) \leq e^{\lambda(E_P[X]+\varepsilon)}.$$

由上式易得

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \mathcal{E}^{\lambda}[X] \leq E_P[X] + \varepsilon,$$

又由 ε 的任意性以及不等式 $\mathcal{E}^{\lambda}[X] \geq E_P[X]$ 可以得出 $\mathcal{E}^{\lambda}[X] \downarrow E_P[X]$, 证毕!

以下为了方便起见, 我们把 $E_P[\cdot]$ 看成 $\lambda = 0$ 对应的熵期望. 易验证熵期望满足常数平移不变性: 对任给的常数 C 有 $\mathcal{E}^{\lambda}[X + C] = \mathcal{E}^{\lambda}[X] + C$.

定理 2.2 若扭曲数学期望 $\mathcal{E}^f[\cdot]$ 满足常数平移不变性, 则 $\mathcal{E}^f[\cdot]$ 为熵期望.

证 对任给的 $a, b \in \mathbb{R}$ 和 $p \in [0, 1]$, 取 $A \in \mathcal{F}$ 使得 $P(A) = p$, 令 $X = aI_A + bI_{A^C}$. 由 $\mathcal{E}^f[\cdot]$ 满足常数平移不变性知 $\mathcal{E}^f[X - b] = \mathcal{E}^f[X] - b$, 可得

$$f^{-1}(f(a-b)p + f(0)(1-p)) = f^{-1}(f(a)p + f(b)(1-p)) - b.$$

为方便令 $g(x) = f^{-1}(x)$, 上式两边关于 p 求导并令 $p = 0$ 可得

$$g^{'}(f(0))(f(a-b) - f(0)) = g^{'}(f(b))(f(a) - f(b)) .$$

又由于对任给的 $x \in \mathbb{R}$, 有 $g^{'}(f(x))f^{'}(x) = 1$, 从而由上式可得

$$f^{'}(b)(f(a-b) - f(0)) = f^{'}(0)(f(a) - f(b)).$$

上式两边再对 a 求导可得

$$f^{'}(b)f^{'}(a-b) = f^{'}(0)f^{'}(a).$$

令 $h(x) = (f^{'}(0))^{-1}f^{'}(x) > 0, x_1 = b, x_2 = a - b$, 由上式可得对任给的 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, 有

$$h(x_1 + x_2) = h(x_1)h(x_2),$$

又因 h 是连续函数, 由上式即得存在 $\lambda \in \mathbb{R}$ 使得 $h(x) = e^{\lambda x}$, 从而知 $f^{'}(x) = f^{'}(0)e^{\lambda x}$. 若 $\lambda = 0$, 可得 $f(x) = f(0) + f^{'}(0)x$, 此时 $\mathcal{E}^f[X] = E_P[X]$; 若 $\lambda \neq 0$, 可得

$$f(x) = f(0) - \lambda^{-1}f'(0) + \lambda^{-1}f^{'}(0)e^{\lambda x},$$

此时 $\mathcal{E}^f[X] = \mathcal{E}^{\lambda}[X]$.

参 考 文 献

[1] Coquet F, Hu Ying, Memin J, Peng Shige. Filtration consistent nonlinear expectations and related g-expectations[J]. Probab. Theory Relat. Fields, 2002, 123(1): 1–27.

[2] Peng Shige. BSDE and related g-expectation[J]. Res. Notes Math. Ser., 1997, 364: 141–159.

[3] Kobylanski M. Backward stochastic differential equations and partial differential equations with quadratic growth[J]. Ann. Probab., 2000, 28(2): 558–602.

SOME PROPERTIES OF DISTORTION EXPECTATIONS

LI Xiao-juan

(*International Business School, Shandong Youth of Political Science, Jinan 250103, China*)

Abstract: In this paper, we study the distortion expectations. By using the method of constructing indicator function, we prove that a distortion expectation satisfies the constant translation invariance property if and only if it is an entropic expectation.

Keywords: nonlinear expectations; distortion expectations; entropic expectations

2010 MR Subject Classification: 60E10; 60H10