

以截尾伽玛分布为先验分布的产品失效率的贝叶斯估计

赵喜林¹, 赵煜², 余东¹

(1. 武汉科技大学理学院, 湖北 武汉 430065)

(2. 成都电子科技大学微固学院, 四川 成都 610054)

摘要: 本文研究了基于泊松分布的产品失效率估计问题. 利用贝叶斯统计推断方法, 获得了以截尾伽玛分布为先验分布时, 产品失效率的贝叶斯估计和相关性质, 推广了以伽玛分布为先验分布的贝叶斯估计结果.

关键词: 泊松分布; 截尾伽玛分布; 失效率; 贝叶斯估计

MR(2010) 主题分类号: 62F15; 62H12

中图分类号: O212.8

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2014)01-0186-05

1 引言

对于某种产品, 假设使用时只关心结果是成功还是失效. 当这种产品投入到市场一段时间后, 根据反馈的失效信息, 对产品进行改进, 再投入市场, 再改进, 如此反复, 使产品的可靠性不断增长, 失效率不断下降. 如何根据每一阶段得到的产品失效数据, 估计该阶段产品的失效率或可靠性, 是这类可靠性增长模型的基本问题. 基于几何分布和二项分布的可靠性增长模型文献上研究得比较多, 有很多成熟的结果, 而基于泊松分布的该类模型很少讨论. 本文就基于泊松分布的可靠性增长模型的失效率, 利用贝叶斯统计方法得出了贝叶斯点估计, 区间估计和其它一些相关结论.

设某一阶段产品的失效率为 p , 产品投放市场后, 在一定时间长度内, 产品的使用数 η 服从参数为 λ 的泊松分布, 收到 ξ 次产品失效的数据, 则

$$P(\xi = x) = f(x|p) = \frac{(\lambda p)^x e^{-\lambda p}}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad (1.1)$$

需要根据 ξ 的观察值 x , 估计 p .

2 先验分布为伽玛分布时 p 的贝叶斯估计

由于 ξ 的观察值通常较少, 如果用经典的矩估计 $\hat{p} = \bar{x}/\lambda$, 则因样本的容量太少, 估计效果很差. 为了利用产品前阶段的信息, 故考虑 p 的贝叶斯估计.

对泊松分布而言, 采用共轭分布原则时, 通常取 p 的先验分布为 $\pi(p) = Ga(\alpha, \beta)$, 即

$$\pi(p) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} p^{\alpha-1} e^{-\beta p}, \quad p \geq 0, \alpha > 0, \beta > 0,$$

*收稿日期: 2013-08-10

接收日期: 2013-10-09

基金项目: 湖北省冶金与工业过程重点实验室基金资助 (Y201319).

作者简介: 赵喜林 (1965-), 男, 湖南邵东, 副教授, 主要研究方向: 数理统计.

则 p 的后验密度

$$\begin{aligned} h(p|x) &= \frac{\pi(p)f(x|p)}{\int_0^{+\infty} \pi(p)f(x|p)dp} \\ &= \frac{\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} p^{\alpha-1} e^{-\beta p} \frac{(\lambda p)^x e^{-\lambda p}}{x!}}{\int_0^{+\infty} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} p^{\alpha-1} e^{-\beta p} \frac{(\lambda p)^x e^{-\lambda p}}{x!} dp} \propto p^{\alpha+x-1} e^{-(\beta+\lambda)p}. \end{aligned}$$

即 $h(p|x) \sim Ga(\alpha+x, \beta+\lambda)$, 在平方损失下, p 的贝叶斯估计为

$$\hat{p} = E\{h(p|x)\} = \frac{\alpha+x}{\beta+\lambda}. \quad (2.1)$$

3 先验分布为截尾伽玛分布时 p 的贝叶斯估计

由于 p 是产品失效的概率, 而 $Ga(\alpha, \beta)$ 的取值范围是 $[0, +\infty)$, 以 $Ga(\alpha, \beta)$ 作为 p 的先验分布, 明显不妥. 因此, 本文提出用截尾伽玛分布作为分布 (1.1) 中 p 的先验分布, 即保证了分布的共轭性, 也符合实际问题对 p 的要求.

定义 3.1 如果随机变量 X 分布密度的核为

$$x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \quad \alpha > 0, \beta > 0, 0 \leq x \leq \omega.$$

即密度函数

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\int_0^\omega x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx}, \quad 0 \leq x \leq \omega, \alpha > 0, \beta > 0, \omega > 0, \quad (3.1)$$

则称 X 服从截尾伽玛分布, 记为 $X \sim Ga(\alpha, \beta, \omega)$, ω 称为截尾系数. $\omega \rightarrow +\infty$ 时, (3.1) 式即为通常的伽玛分布. 根据实际问题的需要, 适当选择 ω , 比如 p 表示概率时, 可选择 $\omega = 1$.

定理 3.1 截尾伽玛分布 (3.1) 是泊松分布 (1.1) 中 p 的共轭分布.

证 设 p 的先验分布

$$\pi(p) = \frac{p^{\alpha-1} e^{-\beta p}}{\int_0^\omega p^{\alpha-1} e^{-\beta p} dp}, \quad 0 \leq p \leq \omega,$$

则 p 的后验密度

$$\begin{aligned} h(p|x) &= \frac{\pi(p)f(x|p)}{\int_0^\omega \pi(p)f(x|p)dp} \\ &\propto \frac{p^{\alpha-1} e^{-\beta p}}{\int_0^\omega p^{\alpha-1} e^{-\beta p} dp} \frac{(\lambda p)^x e^{-\lambda p}}{x!} \propto p^{\alpha+x-1} e^{-(\beta+\lambda)p}, \end{aligned}$$

从而

$$h(p|x) = \frac{p^{\alpha+x-1} e^{-(\beta+\lambda)p}}{\int_0^\omega p^{\alpha+x-1} e^{-(\beta+\lambda)p} dp}.$$

即 $h(p|x) \sim Ga(a+x, \beta+\lambda, \omega)$ 是与先验分布具有相同的截尾系数的伽玛分布.

定理 3.2 取 p 的先验分布为截尾伽玛分布 (3.1) 时, 在平方损失下, p 的贝叶斯解为

$$\hat{p} = E\{h(p|x)\} = \frac{\int_0^\omega p^{\alpha+x} e^{-(\beta+\lambda)p} dp}{\int_0^\omega p^{\alpha+x-1} e^{-(\beta+\lambda)p} dp}. \quad (3.2)$$

证 根据定理 3.1

$$h(p|x) = \frac{p^{\alpha+x-1} e^{-(\beta+\lambda)p}}{\int_0^\omega p^{\alpha+x-1} e^{-(\beta+\lambda)p} dp}.$$

故

$$\hat{p} = E\{h(p|x)\} = \frac{\int_0^\omega p^{\alpha+x} e^{-(\beta+\lambda)p} dp}{\int_0^\omega p^{\alpha+x-1} e^{-(\beta+\lambda)p} dp}.$$

定理 3.3 p 的贝叶斯解 $\hat{p}$ 是关于截尾系数 ω 的单调增加函数.

证

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{p}}{d\omega} &= \frac{\omega^{\alpha+x} e^{-(\beta+\lambda)\omega} \int_0^\omega p^{\alpha+x-1} e^{-(\beta+\lambda)p} dp - \omega^{\alpha+x-1} e^{-(\beta+\lambda)\omega} \int_0^\omega p^{\alpha+x} e^{-(\beta+\lambda)p} dp}{\left(\int_0^\omega p^{\alpha+x-1} e^{-(\beta+\lambda)p} dp\right)^2} \\ &= \frac{\omega^{\alpha+x-1} e^{-(\beta+\lambda)\omega} \left[\int_0^\omega \omega p^{\alpha+x-1} e^{-(\beta+\lambda)p} dp - \int_0^\omega p^{\alpha+x} e^{-(\beta+\lambda)p} dp\right]}{\left(\int_0^\omega p^{\alpha+x-1} e^{-(\beta+\lambda)p} dp\right)^2}. \end{aligned}$$

因为

$$\int_0^\omega \omega p^{\alpha+x-1} e^{-(\beta+\lambda)p} dp \geq \int_0^\omega p^{\alpha+x} e^{-(\beta+\lambda)p} dp,$$

所以

$$\int_0^\omega \omega p^{\alpha+x-1} e^{-(\beta+\lambda)p} dp - \int_0^\omega p^{\alpha+x} e^{-(\beta+\lambda)p} dp \geq 0,$$

所以

$$\frac{d\hat{p}}{d\omega} \geq 0,$$

所以 $\hat{p}$ 是 ω 的单调增加函数.

4 p 的贝叶斯区间估计

引理 4.1 如果随机变量 $X \sim Ga(\alpha, \beta)$, 则 $2X\beta \sim \chi^2(2\alpha)$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

证 因为 $X \sim Ga(\alpha, \beta)$, 所以

$$p(x) = \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)}, \quad \alpha > 0, \beta > 0,$$

$$Y = 2\beta X \Rightarrow X = \frac{Y}{2\beta}.$$

由随机变量的密度变换公式, 得

$$p(y) = \frac{\beta^\alpha \left(\frac{y}{2\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-\beta y/2}}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{2\beta} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^\alpha y^{\alpha-1} e^{-\frac{y}{2}}}{\Gamma(\alpha)}.$$

所以 $Y = 2X\beta \sim \chi^2(2\alpha)$.

如果 p 的后验密度 $h(p|x) \sim Ga(\alpha + x, \beta + \lambda)$, 则根据引理 4.1,

$$2p(\beta + \lambda) \sim \chi^2(2(\alpha + x)),$$

$$P(\chi_{a/2}^2(2\alpha + 2x) \leq 2p(\beta + \lambda) \leq \chi_{1-a/2}^2(2\alpha + 2x)) = 1 - a.$$

即

$$P\left(\frac{\chi_{a/2}^2(2\alpha + 2x)}{2(\beta + \lambda)} \leq p \leq \frac{\chi_{1-a/2}^2(2\alpha + 2x)}{2(\beta + \lambda)}\right) = 1 - a,$$

$$\left(\frac{\chi_{a/2}^2(2\alpha + 2x)}{2(\beta + \lambda)}, \frac{\chi_{1-a/2}^2(2\alpha + 2x)}{2(\beta + \lambda)}\right)$$

为 p 的置信度为 $1 - a$ 的置信区间.

如果 p 的先验分布为截尾伽玛分布

$$h(p|x) = \frac{p^{\alpha+x-1}e^{-(\beta+\lambda)p}}{\int_0^\omega p^{\alpha+x-1}e^{-(\beta+\lambda)p}dp}.$$

当 $0 \leq x \leq \omega$ 时,

$$h(p|x) = \frac{p^{\alpha+x-1}e^{-(\beta+\lambda)p}}{\int_0^\omega p^{\alpha+x-1}e^{-(\beta+\lambda)p}dp} \geq Ga(\alpha + x, \beta + \lambda),$$

所以, 当满足

$$\left(\frac{\chi_{a/2}^2(2\alpha + 2x)}{2(\beta + \lambda)}, \frac{\chi_{1-a/2}^2(2\alpha + 2x)}{2(\beta + \lambda)}\right) \subset (0, \omega)$$

时

$$P\left(\frac{\chi_{a/2}^2(2\alpha + 2x)}{2(\beta + \lambda)} \leq p \leq \frac{\chi_{1-a/2}^2(2\alpha + 2x)}{2(\beta + \lambda)}\right) \geq 1 - a.$$

故

$$\left(\frac{\chi_{a/2}^2(2\alpha + 2x)}{2(\beta + \lambda)}, \frac{\chi_{1-a/2}^2(2\alpha + 2x)}{2(\beta + \lambda)}\right)$$

可做为 p 的置信度为 $1 - a$ 的近似贝叶斯置信区间.

参 考 文 献

- [1] 张尧庭, 陈汉峰. 贝叶斯统计推断 [M]. 北京: 科学出版社 1991.
- [2] 茆诗松. 贝叶斯统计 [M]. 北京: 中国统计出版社, 1999.
- [3] 赵喜林. 几何分布可靠度的截尾 bayes 估计 [J]. 武汉科技大学学报 (自然科学版), 2004, 27(1): 93-95.
- [4] 张志华, 姜礼平. 成败型产品的 Bayes 鉴定试验方案研究 [J]. 海军工程大学学报, 2004, 16(1): 9-13.
- [5] 徐宝等. 贝叶斯框架下泊松分布参数倒数的估计 [J]. 吉林师范大学学报 (自然科学版), 2010, 2(1): 57-59.

- [6] 张志华. 指数型产品失效率鉴定试验的 Bayes 方案 [J]. 应用概率统计, 2000, 16(1): 66–70.
- [7] Xing Yunyan, Wu Xiaoyue. Bayesian sequential testing for exponential life system with reliability growth[J]. Journal of Systems Engineering and Electronic, 2011, 22(6): 1023–1029.

THE BAYESIAN ESTIMATION OF PRODUCT FAILURE RATE WITH TRUNCATION GAMMA DISTRIBUTION AS PRIOR DISTRIBUTION

ZHAO Xi-lin¹, ZHAO Yu², YU Dong¹

(1. College of Science, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430065, China)

(2. School of Microelectronics and Solid-State Electronics, University of Electronic Science and
Technology of China, Chengdu 610054, China)

Abstract: In this paper, we study the problem of estimation for product failure rate based on Poisson distribution. By using the method of Bayesian statistical inference, the Bayesian estimation and related properties of product failure rate with truncated gamma distribution as prior distribution is presented, which generalize the results of Bayesian estimation when gamma distribution as prior distribution.

Keywords: Poisson distribution; Truncated gamma distribution; failure rate; Bayesian estimation.

2010 MR Subject Classification: 62F15; 62H12