Vol. 34 (2014)
No. 1

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

非线性三点边值问题正解的新的存在性定理

姚志健
(安徽建筑工业学院数理系, 安徽 合肥 230601)

摘 要: 本文研究了一类非线性二阶三点边值问题的正解的存在性. 运用 Leray-Schauder 不动点定理获得了存在正解的充分条件, 改进了文献 [1] 中的结果.
关 键 词: 正解; 非线性三点边值问题; Leray-Schauder 不动点定理
MR(2010) **主题分类号**: 34B15　　**中 图 分 类 号**: O175.8
文 献 标 识 码: A　　**文 章 编 号**: 0255-7797(2014)01-0173-06

1 引言

由于微分方程边值问题在物理, 生物和工程科学等领域的广泛应用, 对微分方程边值问题可解性的研究一直是诸多学者关注的课题. 线性二阶微分方程多点边值问题的可解性的研究起始于 Il'in 和 Moiseev 的工作 [2,3]. 此后, Gupta[4] 研究了非线性二阶微分方程三点边值问题的可解性. 近来, 关于非线性微分方程各种不同类型的多点边值问题的可解性的研究取得了大量的结果 [1,5−8,10,11]. 在 1999 年, 文献 [1] 研究了下面的非线性二阶微分方程三点边值问题的正解的存在性:

$$u'' + a(t)f(u) = 0, t \in (0,\ 1), \tag{1.1}$$

$$u(0) = 0, \alpha u(\eta) = u(1), \tag{1.2}$$

其中 $0 < \eta < 1$,$0 < \alpha < \frac{1}{\eta}$, 假设:

(A_1) $f \in C([0, +\infty), [0, +\infty))$;

(A_2) $a \in C([0, 1], [0, +\infty))$ 且存在 $x_0 \in [\eta,\ 1]$, 使得 $a(x_0) > 0$.

记 $f_0 = \lim\limits_{u\to 0^+} \dfrac{f(u)}{u}$, $\quad f_\infty = \lim\limits_{u\to\infty} \dfrac{f(u)}{u}$.

文献 [1] 运用 Krasnoselskii 锥拉伸和锥压缩不动点定理研究了边值问题 (1.1)–(1.2) 的正解的存在性, 他们得到了下面的结果.

定理 H1 设 (A_1), (A_2) 满足, 若 $f_0 = 0$, $f_\infty = \infty$(超线性), 则 (1.1)–(1.2) 至少存在一个正解.

定理 H2 设 (A_1), (A_2) 满足, 若 $f_0 = \infty$, $f_\infty = 0$(次线性), 则 (1.1)–(1.2) 至少存在一个正解.

在本文中, 我们将运用 Leray-Schauder 不动点定理来研究边值问题 (1.1)–(1.2) 的正解的存在性, 所得结果改进了上面的定理 H1 和定理 H2, 去掉了一些条件.

*收稿日期: 2012-04-12　　接收日期: 2012-06-20
基金项目: 安徽省自然科学基金项目 (11040606M01); 安徽省教育厅自然科学项目 (KJ2008B236).
作者简介: 姚志健 (1975–), 男, 安徽无为县, 副教授, 主要研究方向: 微分方程理论及其应用.

2 引理

考虑边值问题

$$u'' + p(t) = 0, t \in (0,\ 1), \tag{2.1}$$

$$u(0) = 0, \alpha u(\eta) = u(1). \tag{2.2}$$

引理 1 [1] 设 $\alpha\eta \neq 1, p(t) \in C([0,1]$, 则边值问题 (2.1)–(2.2) 有唯一解

$$u(t) = -\int_0^t (t-s)p(s)ds - \frac{\alpha t}{1-\alpha\eta}\int_0^\eta (\eta - s)p(s)ds + \frac{t}{1-\alpha\eta}\int_0^1 (1-s)p(s)ds.$$

引理 2 [1] 设 $0 < \alpha < \frac{1}{\eta}$, 若 $p(t) \in C[0,1]$, 且 $p(t) \geq 0$, 则边值问题 (2.1)–(2.2) 的唯一解 $u(t)$ 满足 $u(t) \geq 0,\ \ t \in [0,\ 1]$.

引理 3 [1] 设 $0 < \alpha < \frac{1}{\eta}$, 若 $p(t) \in C[0,1]$, 且 $p(t) \geq 0$, 则边值问题 (2.1)–(2.2) 的唯一解 $u(t)$ 满足 $\inf\limits_{t\in[\eta,\ 1]} u(t) \geq \gamma\|u\|$, 其中 $\gamma = \min\{\alpha\eta,\ \frac{\alpha(1-\eta)}{1-\alpha\eta},\ \eta\}$.

对于任意 $y(t) \in C([0,1]$, 考虑

$$u'' + a(t)f(y(t)) = 0,\ t \in (0,\ 1), \tag{2.3}$$

$$u(0) = 0, \alpha u(\eta) = u(1), \tag{2.4}$$

由引理 1 知边值问题 (2.3)–(2.4) 有唯一解

$$\begin{aligned} u(t) \quad = \quad & -\int_0^t (t-s)a(s)f(y(s))ds - \frac{\alpha t}{1-\alpha\eta}\int_0^\eta (\eta-s)a(s)f(y(s))ds \\ & + \frac{t}{1-\alpha\eta}\int_0^1 (1-s)a(s)f(y(s))ds. \end{aligned}$$

定义算子

$$\begin{aligned} Ty(t) \quad = \quad & -\int_0^t (t-s)a(s)f(y(s))ds - \frac{\alpha t}{1-\alpha\eta}\int_0^\eta (\eta-s)a(s)f(y(s))ds \\ & + \frac{t}{1-\alpha\eta}\int_0^1 (1-s)a(s)f(y(s))ds. \end{aligned}$$

易知, $y(t)$ 是边值问题 (1.1)–(1.2) 的解当且仅当 $y(t)$ 是算子 T 的不动点.

引理 4 [9] (Leray-Schauder) 设 Ω 是 Banach 空间 X 的凸子集, $0 \in \Omega$, $\Phi : \Omega \to \Omega$ 是全连续算子, 那么

(i) Φ 在 Ω 中至少有一个不动点; 或 (ii) 集合 $\{x \in \Omega | x = \lambda\Phi x, 0 < \lambda < 1\}$ 是无界的.

3 主要结果

记 $X = C[0,1], \beta = \int_0^1 (1-s)a(s)ds$.

定理 1 设 $(A_1), (A_2)$ 满足, 若 $f_0 = 0$, 则边值问题 (1.1)–(1.2) 至少存在一个正解.

证 取 $\varepsilon > 0$, 且 $\varepsilon \le \frac{1-\alpha\eta}{\beta}$, 由 $f_0 = 0$ 知, 存在常数 $B > 0$, 当 $0 < y \le B$ 时, 有 $f(y) < \varepsilon y$. 令

$$\Omega = \left\{ y \mid \ y \in C[0,1], y \ge 0, \|y\| \le B, \min_{t\in[\eta,\ 1]} y(t) \ge \gamma\|y\|, \right\},$$

则 Ω 是 X 的凸子集. 对于 $y \in \Omega$, 由引理 2 和引理 3 知 $Ty(t) \ge 0$ 且 $\min_{t\in[\eta,\ 1]} Ty(t) \ge \gamma\|Ty\|$.

另一方面, 有

$$\begin{aligned} Ty(t) &\le \frac{t}{1-\alpha\eta}\int_0^1 (1-s)a(s)f(y(s))ds \le \frac{t}{1-\alpha\eta}\int_0^1 (1-s)a(s)\varepsilon y(s)ds \\ &\le \|y\|\frac{\varepsilon}{1-\alpha\eta}\int_0^1 (1-s)a(s)ds \le \|y\| \le B, \end{aligned}$$

从而 $\|Ty\| \le B$. 因此 $T\Omega \subset \Omega$. 易验证 $T : \Omega \to \Omega$ 是全连续的. 对于 $y \in \Omega$ 且 $y = \lambda Ty, 0 < \lambda < 1$, 有 $y(t) = \lambda Ty(t) < Ty(t) \le B$, 即 $\|\ y\| \le B$. 从而 $\{y \in \Omega | y = \lambda Ty, 0 < \lambda < 1\}$ 是有界的. 由引理 4 知, T 在 Ω 中至少有一个不动点, 从而边值问题 (1.1)–(1.2) 至少存在一个正解. 证毕.

注 定理 1 比文献 [1] 的定理 H1 的条件弱, 去掉了条件 $f_\infty = \infty$.

定理 2 设 (A_1), (A_2) 满足, 若 $f_\infty = 0$, 则边值问题 (1.1)–(1.2) 至少存在一个正解.

证 取 $\varepsilon > 0$, 且 $\varepsilon \le \frac{1-\alpha\eta}{2\beta}$, 由 $f_\infty = 0$ 知, 存在常数 $N > 0$, 当 $y > N$ 时, 有 $f(y) < \varepsilon y$. 选取 $B \ge N + 1 + \frac{2\beta}{1-\alpha\eta}\max_{0\le y\le N} f(y)$. 令

$$\Omega = \left\{ y \mid \ y \in C[0,1], y \ge 0, \|y\| \le B, \min_{t\in[\eta,\ 1]} y(t) \ge \gamma\|y\|, \right\},$$

则 Ω 是 X 的凸子集. 对于 $y \in \Omega$, 由引理 2 和引理 3 知 $Ty(t) \ge 0$ 且 $\min_{t\in[\eta,\ 1]} Ty(t) \ge \gamma\|Ty\|$.

另一方面, 有

$$\begin{aligned} Ty(t) &\le \frac{t}{1-\alpha\eta}\int_0^1 (1-s)a(s)f(y(s))ds \le \frac{1}{1-\alpha\eta}\int_0^1 (1-s)a(s)f(y(s))ds \\ &= \frac{1}{1-\alpha\eta}(\int_{J_1=\{s\in[0,1],y(s)>N\}} (1-s)a(s)f(y(s))ds \\ &\quad + \int_{J_2=\{s\in[0,1],y(s)\le N\}} (1-s)a(s)f(y(s))ds) \\ &\le \frac{1}{1-\alpha\eta}\int_0^1 (1-s)a(s)\varepsilon y(s)ds + \frac{1}{1-\alpha\eta}\int_0^1 (1-s)a(s)ds \cdot \max_{0\le y\le N} f(y) \\ &\le \frac{\varepsilon}{1-\alpha\eta}\|y\|\int_0^1 (1-s)a(s)ds + \frac{1}{1-\alpha\eta}\int_0^1 (1-s)a(s)ds \cdot \max_{0\le y\le N} f(y) \\ &\le \frac{\varepsilon}{1-\alpha\eta}B\int_0^1 (1-s)a(s)ds + \frac{1}{1-\alpha\eta}\int_0^1 (1-s)a(s)ds \cdot \max_{0\le y\le N} f(y) \\ &= \frac{\varepsilon}{1-\alpha\eta}B\beta + \frac{1}{1-\alpha\eta}\beta \cdot \max_{0\le y\le N} f(y) \\ &\le \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}B = B, \end{aligned}$$

从而 $\|Ty\| \leq B$. 因此, $T\Omega \subset \Omega$. 易验证 $T : \Omega \to \Omega$ 是全连续的. 对于 $y \in \Omega$ 且 $y = \lambda Ty, 0 < \lambda < 1$, 有 $y(t) = \lambda Ty(t) < Ty(t) \leq B$, 即 $\| y\| \leq B$. 从而 $\{y \in \Omega | y = \lambda Ty, 0 < \lambda < 1\}$ 是有界的. 由引理 4 知, T 在 Ω 中至少有一个不动点, 从而边值问题 (1.1)–(1.2) 至少存在一个正解. 证毕.

注 定理 2 比文献 [1] 的定理 H2 的条件弱, 去掉了条件 $f_0 = \infty$.

定理 3 设 (A_1), (A_2) 满足, 若存在常数 $\rho_1 > 0$, 使得当 $0 < y \leq \rho_1$ 时, 有 $f(y) \leq \dfrac{(1-\alpha\eta)\rho_1}{\beta}$ 成立, 则边值问题 (1.1)–(1.2) 至少存在一个正解.

证 令

$$\Omega = \left\{ y \mid \ y \in C[0,1], y \geq 0, \|y\| \leq \rho_1, \min_{t\in[\eta,\ 1]} y(t) \geq \gamma \|y\|, \right\},$$

则 Ω 是 X 的凸子集. 对于 $y \in \Omega$, 由引理 2 和引理 3 知 $Ty(t) \geq 0$ 且 $\min\limits_{t\in[\eta,\ 1]} Ty(t) \geq \gamma \|Ty\|$.

另一方面, 有

$$Ty(t) \leq \frac{t}{1-\alpha\eta}\int_0^1 (1-s)a(s)f(y(s))ds \leq \frac{1}{1-\alpha\eta}\int_0^1 (1-s)a(s)\frac{(1-\alpha\eta)\rho_1}{\beta}ds = \rho_1,$$

从而 $\|Ty\| \leq \rho_1$. 因此, $T\Omega \subset \Omega$. 易验证 $T : \Omega \to \Omega$ 是全连续的. 对于 $y \in \Omega$ 且 $y = \lambda Ty, 0 < \lambda < 1$, 有 $y(t) = \lambda Ty(t) < Ty(t) \leq \rho_1$, 即 $\| y\| \leq \rho_1$. 从而 $\{y \in \Omega | y = \lambda Ty, 0 < \lambda < 1\}$ 是有界的. 由引理 4 知 T 在 Ω 中至少有一个不动点, 从而边值问题 (1.1)–(1.2) 至少存在一个正解. 证毕.

定理 4 设 (A_1), (A_2) 满足, 若存在常数 $\rho_2 > 0$, 使得当 $y \geq \rho_2$ 时, 有 $f(y) \leq \dfrac{(1-\alpha\eta)\rho_2}{\beta}$ 成立, 则边值问题 (1.1)–(1.2) 至少存在一个正解.

证 取 $d > 1 + \rho_2 + \frac{\beta}{1-\alpha\eta}\max\limits_{0\leq y\leq\rho_2} f(y)$. 令

$$\Omega = \left\{ y \mid \ y \in C[0,1], y \geq 0, \|y\| \leq d, \min_{t\in[\eta,\ 1]} y(t) \geq \gamma \|y\|, \right\},$$

则 Ω 是 X 的凸子集. 对于 $y \in \Omega$, 由引理 2 和引理 3 知 $Ty(t) \geq 0$ 且 $\min\limits_{t\in[\eta,\ 1]} Ty(t) \geq \gamma \|Ty\|$.

另一方面, 有

$$\begin{aligned}
Ty(t) &\leq \frac{t}{1-\alpha\eta}\int_0^1 (1-s)a(s)f(y(s))ds \leq \frac{1}{1-\alpha\eta}\int_0^1 (1-s)a(s)f(y(s))ds \\
&= \frac{1}{1-\alpha\eta}\Big(\int_{J_1=\{s\in[0,1],y(s)>\rho_2\}} (1-s)a(s)f(y(s))ds \\
&\quad + \int_{J_2=\{s\in[0,1],y(s)\leq\rho_2\}} (1-s)a(s)f(y(s))ds\Big) \\
&\leq \frac{1}{1-\alpha\eta}\int_0^1 (1-s)a(s)\frac{(1-\alpha\eta)\rho_2}{\beta}ds + \frac{1}{1-\alpha\eta}\int_0^1 (1-s)a(s)ds\cdot \max_{0\leq y\leq\rho_2} f(y) \\
&= \rho_2 + \frac{\beta}{1-\alpha\eta}\max_{0\leq y\leq\rho_2} f(y) < d,
\end{aligned}$$

从而 $\|Ty\| \leq d$. 因此 $T\Omega \subset \Omega$. 易验证 $T : \Omega \to \Omega$ 是全连续的. 对于 $y \in \Omega$ 且 $y = \lambda Ty, 0 < \lambda < 1$, 有 $y(t) = \lambda Ty(t) < Ty(t) \leq d$, 即 $\| y\| \leq d$. 从而 $\{y \in \Omega | y = \lambda Ty, 0 < \lambda < 1\}$ 是有界

的. 由引理 4 知, T 在 Ω 中至少有一个不动点, 从而边值问题 (1.1)–(1.2) 至少存在一个正解. 证毕.

4 应用举例

例 1 考虑非线性二阶微分方程三点边值问题:

$$u'' + a(t)\frac{u}{1+u^n} = 0, t \in (0,\ 1), \tag{4.1}$$

$$u(0) = 0, \alpha u(\eta) = u(1), \tag{4.2}$$

其中 $0 < \eta < 1$, $0 < \alpha < \frac{1}{\eta}$, $f(u) = \frac{u}{1+u^n}$ $(n > 0)$. 易知

$$f_\infty = \lim_{u\to\infty}\frac{f(u)}{u} = \lim_{u\to\infty}\frac{1}{1+u^n} = 0.$$

因此由本文定理 2 知边值问题 (4.1)–(4.2) 至少存在一个正解.

注 易知 $\dfrac{f(u)}{u} = \dfrac{1}{1+u^n} \le 1$, 从而不可能有 $\lim\limits_{u\to0^+}\dfrac{f(u)}{u} = \infty$, 即 $f_0 \ne \infty$, 不满足文献 [1] 的定理 H2 的条件 $f_0 = \infty$, 因此文献 [1] 的定理 H2 无法对边值问题 (4.1)–(4.2) 的正解的存在性作出判断, 但由本文定理 2 可知边值问题 (4.1)–(4.2) 至少存在一个正解.

例 2 考虑非线性二阶微分方程三点边值问题:

$$u'' + a(t)ue^{-u} = 0, t \in (0,\ 1), \tag{4.3}$$

$$u(0) = 0,\ \alpha u(\eta) = u(1), \tag{4.4}$$

其中 $0 < \eta < 1$, $0 < \alpha < \frac{1}{\eta}, f(u) = ue^{-u}$. 易知

$$f_\infty = \lim_{u\to\infty}\frac{f(u)}{u} = \lim_{u\to\infty} e^{-u} = 0,$$

因此由本文定理 2 知边值问题 (4.3)–(4.4) 至少存在一个正解.

注 $\dfrac{f(u)}{u} = e^{-u} \le 1$, 从而不可能有 $\lim\limits_{u\to0^+}\dfrac{f(u)}{u} = \infty$, 即 $f_0 \ne \infty$, 不满足文献 [1] 的定理 H2 的条件 $f_0 = \infty$, 因此文献 [1] 的定理 H2 无法对边值问题 (4.3)–(4.4) 的正解的存在性作出判断, 但由本文定理 2 可知边值问题 (4.3)–(4.4) 至少存在一个正解.

参 考 文 献

[1] Ma Ruyun. Positive solutions of a nonlinear three-point boundary value problem[J]. Electronic J. Differential Equations, 1999, 34: 1–8.

[2] Il'in V A, Moiseev E I. Nonlocal boundary value problem of the first kind for a Sturm-Liouville operator in its differential and finite difference aspects[J]. Differential Equations, 1987, 23(7): 803–810.

[3] Il'in V A, Moiseev E I. Nonlocal boundary value problem of the first kind for a Sturm-Liouville operator[J]. Differential Equations, 1987, 23(8): 979–987.

[4] Gupta C P. Solvability of three-point nonlinear boundary value problem for a second order ordinary differential equation[J]. J. Math. Anal. Appl., 1992, 168: 540–551.

[5] Zhou Youming, Xu Yan. Positive solutions of three-point boundary value problems for systems of nonlinear second order ordinary differential equations[J]. J. Math. Anal. Appl., 2006, 320: 578–590.

[6] Graef J R, Qian Chuanxi, Yang Bo. A three point boundary value problem for nonlinear fourth order differential equations[J]. J. Math. Anal. Appl., 2003, 287: 217–233.

[7] Feng Yuqiang, Liu Sanyang. Solvability of a third-order two-point boundary value problem[J]. Applied Mathematics Letters, 2005, 18: 1034–1040.

[8] Du Zengji, Ge Weigao, Lin Xiaojie. Existence of solutions for a class of third-order nonlinear boundary value problems[J]. J. Math. Anal. Appl., 2004, 294: 104–112.

[9] Granas A, Dugundji J. Fixed point theory [M]. NewYork: Springer-Verlag, 2003.

[10] Liu Bing. Positive solutions of a nonlinear four-point boundary value problem[J]. Appl. Math. Comput., 2004, 155: 179–203.

[11] Webb J R L. Positive solutions of some three-point boundary value problems via fixed point index theory[J]. Nonlinear Anal., 2001, 47: 4319–4332.

NEW EXISTENCE THEOREMS OF POSITIVE SOLUTIONS FOR NONLINEAR THREE-POINT BOUNDARY VALUE PROBLEMS

YAO Zhi-jian

(*Dept. of Mathematics and Physics, Anhui Institute of Architecture and Industry, Hefei 230601, China*)

Abstract: In this paper, we investigate the existence of positive solutions for second-order nonlinear three-point boundary value problems. By using Leray-Schauder theorem, some sufficient conditions for the existence of positive solutions are obtained, which improve the results in [1].

Keywords: positive solution; nonlinear three-point boundary value problems; Leray-Schauder theorem

2010 MR Subject Classification: 34B15