Vol. 34 (2014)
No. 1

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

Orlicz 空间内正系数代数多项式倒数对非负连续函数的逼近

牛彤彤, 吴嘎日迪
(内蒙古师范大学数学科学学院, 内蒙古 呼和浩特 010022)

摘 要: 本文研究了 Bernstein-Durrmeyer 代数多项式倒数对非负连续函数在 Orlicz 空间中的逼近问题. 利用光滑模和 K - 泛函等工具, 获得了收敛速度的估计, 所得的结果比 Lp 空间内的相应结果具有拓展的意义.

关键词: 多项式倒数; Bernstein-Durrmeyer 多项式算子; Orlicz 空间; 逼近
MR(2010) **主题分类号**: 41A20; 41A25 **中图分类号**: O174.41
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2014)01-0161-07

1 引言

2003 年, 盛宝怀, 周颂平在文献 [1] 中研究了正系数代数多项式倒数对非负连续函数在 Lp 空间内的逼近问题, 得到了以下结果:

定理 A 设 $f(x)\in C(S), f(x)\geq 0, f(x)\neq 0, p>1$, 则存在

$$P_n(x)\in \Pi_{n,d}^{+}=\left\{P_n(x):=P_n(x)=\sum_{|k|\leq n}a_k x^k(1-|x|)^{n-|k|}:x\in S, a_k\geq 0\right\},$$

使得

$$\left\|f-\frac{1}{P_n}\right\|_p\leq C\left[\omega_p^2\left(f,\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)+\frac{\|f\|}{\sqrt{n}}\right],$$

其中 S 为 R^d 中的单纯性, $d\geq 1$, $C(S)$ 为 S 上的连续函数类. C 是与 n 无关的常数, 并且在不同处可以表示不同的值 (以下同).

本文在 Orlicz 空间内研究了类似的问题, 考虑到 Orlicz 空间是 Lp 空间的扩充, 本文的研究工作具有一定的拓展意义.

对于 $f(x)\in C[0,1]$, 其 Bernstein-Durrmeyer 算子为

$$M_n(f,x)=(n+1)\sum_{k=0}^{n}P_{nk}(x)\int_0^1 P_{nk}(t)f(t)\,dt,$$

其中 $P_{n,k}(x)=\begin{pmatrix} n\\ k\end{pmatrix}x^k(1-x)^{n-k}$.

*收稿日期: 2012-05-14 接收日期: 2012-11-05
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11161033); 内蒙古师范大学人才工程基金资助项目 (RCPY-2-2012-K-036); 内蒙古师范大学研究生科研创新基金资助项目 (CXJJS10039).
作者简介: 牛彤彤 (1987–), 女, 内蒙古通辽, 硕士, 主要研究方向: 函数逼近论.
通讯作者: 吴嘎日迪

本文将其作为一种逼近工具, 再利用 K - 泛函、光滑模讨论了正系数代数多项式倒数对非负连续函数在 Orlicz 空间内的逼近问题.

文中用 $M(u)$ 和 $N(v)$ 表示互余的 N 函数, 关于 N 函数的定义及其性质见文献 [2].

由 N 函数 $M(u)$ 生成的 Orlicz 空间 $L_M^*[0,1]$ 指具有有限 Orlicz 范数

$$\|u\|_M = \sup_{\rho(v,N)\le 1}\left|\int_0^1 u(x)\,v(x)\,dx\right|$$

的可测函数全体 $\{u(x)\}$, 其中 $\rho(v,N)=\int_0^1 N(v(x))dx$ 是 $v(x)$ 关于 $N(v)$ 的模.

又由文献 [2] 知, Orlicz 范数的等价形式为

$$\|u\|_M = \inf_{\alpha>0}\frac{1}{\alpha}\left(1+\int_0^1 M(\alpha u(x))\,dx\right).$$

对于 $f(x)\in L_M^*[0,1]$, $t\ge 0$, 定义 K - 泛函, 连续模和二阶光滑模为

$$K_r(f,t)_M = \inf\left\{\|f-g\|_M + t^r\left\|g^{(r)}\right\|_M : g^{(r-1)}\in AC[0,1],\, g^{(r)}\in L_M^*\right\};$$
$$\omega_1(f,t)_M = \sup_{0\le h\le t}\|f(\cdot+h)-f(\cdot)\|_M;$$
$$\omega_2(f,t)_M = \sup_{0\le h\le t}\|f(\cdot+h)+f(\cdot-h)-2f(\cdot)\|_M.$$

由文献 [3] 可知 $\omega_2(f,t)_M\to 0(t\to 0)$ 当且仅当 $M(u)$ 满足 Δ_2 - 条件.

2 主要结果

定理 设 $f(x)\in L_M^*, f(x)\ge 0$ 且 $f(x)$ 不恒等于 0, 则存在 $P_n(x)\in\prod_n(+)$ 使得

$$\left\|f-\frac{1}{P_n}\right\|_M \le C\left(\omega_1\left(f,\frac{1}{n}\right)_M + \omega_2\left(f,\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_M\right),$$

$\prod_n(+)$ 表示次数不超过 n 的正系数多项式全体.

3 若干引理

引理 1 [4] 存在两个常数 C_1 和 C_2, 使得 $C_1\omega(f,t)_M\le K(f,t)_M\le C_2\omega(f,t)_M$.

引理 2[5] $M_n(1,x)=1$, $M_n\left((t-x)^i,x\right)\le\frac{C}{n}$, $i=1,2$.

引理 3[5] $\|M_n(f)\|_M\le\|f\|_M$.

引理 4 $\|f^2\|_M\le C\|f\|_M^2$.

证 由 Orlicz 范数的定义知

$$\left\|f^2\right\|_M = \sup_{\rho(v,N)\le 1}\left|\int_0^1 f^2(x)v(x)dx\right| = \sup_{\rho(v,N)\le 1}\left|\int_0^1 f(x)f(x)v(x)dx\right|.$$

利用 Orlicz 空间内的 Hölder 不等式 (见文献 [2]) 得

$$\begin{aligned}&\sup_{\rho(v,N)\le 1}\left|\int_0^1 f(x)f(x)v(x)dx\right| \le \sup_{\rho(v,N)\le 1}\|f\|_M\|fv\|_N\\ =\ &||f||_M\sup_{\rho(u,M)\le 1}|\int_0^1 f(x)v(x)u(x)dx| = ||f||_M\sup_{\rho(u,M)\le 1}||fu||_M||v||_N.\end{aligned}$$

由 $\rho(v,N)=\int_0^1 N(v(x))dx\le 1,\rho(u,M)=\int_0^1 M(u(x))dx\le 1$ 及 N 函数的性质 (见文献 [2]) 容易看出, $u(x)$ 和 $v(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上一定是几乎处处有界的, 故

$$\sup_{\rho(u,M)\le 1}||fu||_M||v||_N\le C||f||_M,$$

从而 $\|f^2\|_M\le C\,\|f\|_M^2$.

引理 5 对于 $f\left(x\right)\in L_M^*$, 记

$$K_{n,1}\left(f,x\right)=\left(n+1\right)\sum_{k=0}^{n}P_{nk}\left(x\right)\int_0^1 P_{nk}\left(t\right)\left(f\left(t\right)-f\left(x\right)\right)dt,$$
$$K_{n,2}\left(f,x\right)=\left(n+1\right)\sum_{k=0}^{n}P_{nk}\left(x\right)\int_0^1 P_{nk}\left(t\right)\left(f\left(t\right)-f\left(x\right)\right)^2dt,$$

则

$$\|K_{n,1}\left(f\right)\|_M\le C\left(\omega_1\left(f,\frac{1}{n}\right)_M+\omega_2\left(f,\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_M\right),$$
$$\|K_{n,2}\left(f\right)\|_M\le C\left(\omega_1\left(f,\frac{1}{n}\right)_M^2+\omega_2\left(f,\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_M^2\right).$$

证 对于 $g\left(x\right)$ 满足 $g^{(r-1)}\left(x\right)\in AC\left[0,1\right]$ 且 $g^{(r)}\left(x\right)\in L_M^*\left[0,1\right]$,

$$\begin{aligned}K_{n,1}\left(f,x\right)\ \le\ &\left(n+1\right)\sum_{k=0}^{n}P_{nk}\left(x\right)\int_0^1 P_{nk}\left(t\right)\left(f\left(t\right)-g\left(t\right)\right)dt\\&+\left(n+1\right)\sum_{k=0}^{n}P_{nk}\left(x\right)\int_0^1 P_{nk}\left(t\right)\left(g\left(t\right)-g\left(x\right)\right)dt\\&+\left(n+1\right)\sum_{k=0}^{n}P_{nk}\left(x\right)\int_0^1 P_{nk}\left(t\right)\left(g\left(x\right)-f\left(t\right)\right)dt\\=:\ &I_1+I_2+I_3,\end{aligned}$$

其中 $I_1=M_n\left(f-g,x\right)$. 由引理 3 知 $\|I_1\|_M\le\|f-g\|_M$, $I_3=\left(f-g\right)M_n\left(1,x\right)$, 由引理 2 知 $\|I_3\|_M=\|f-g\|_M$. 由于

$$g\left(t\right)-g\left(x\right)=g'\left(x\right)\left(t-x\right)+\int_x^t\left(t-x\right)g''\left(u\right)du.$$

故

$$\begin{aligned}I_2\ \le\ &\left(n+1\right)\sum_{k=0}^{n}P_{nk}\left(x\right)\int_0^1 P_{nk}\left(t\right)\left(g'\left(x\right)\left(t-x\right)\right)dt\\&+\left(n+1\right)\sum_{k=0}^{n}P_{nk}\left(x\right)\int_0^1 P_{nk}\left(t\right)\left(\int_x^t\left(t-x\right)g''\left(u\right)du\right)dt\\\le\ &\left(n+1\right)\sum_{k=0}^{n}P_{nk}\left(x\right)\int_0^1 P_{nk}\left(t\right)\left(g'\left(x\right)\left(t-x\right)\right)dt\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+(n+1)\sum_{k=0}^{n}P_{nk}(x)\int_0^1 P_{nk}(t)\left((t-x)^2\theta_{g''}(x)\right)dt\\
=\ &M_n(t-x,x)g'(x)+M_n\left((t-x)^2,x\right)\theta_{g''}(x)\\
\le\ &\frac{C}{n}g'(x)+\frac{C}{n}\theta_{g''}(x),
\end{aligned}
$$

其中 $\theta_{g''}(x)$ 是 $g''(x)$ 的 Hardy-Littlewood 极大函数. 由文献 [6] 知 $\|\theta_{g'}(x)\|_M\le C\|g'\|_M$. 故 $\|I_2\|_M\le\frac{C}{n}\|g'\|_M+\frac{C}{n}\|g''\|_M$. 因此

$$
\begin{aligned}
&\|K_{n,1}(f)\|_M\le\|I_1\|_M+\|I_2\|_M+\|I_3\|_M\\
\le\ &\|f-g\|_M+\frac{C}{n}\|g'\|_M+\frac{C}{n}\|g''\|_M+\|f-g\|_M.
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{aligned}
\|K_{n,1}(f)\|_M &\le C\left(K_1\left(f,\frac{1}{n}\right)_M+K_2\left(f,\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_M\right)\\
&\le C\left(\omega_1\left(f,\frac{1}{n}\right)_M+\omega_2\left(f,\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_M\right),\\
K_{n,2}(f,x) &\le 3\Bigg[(n+1)\sum_{k=0}^{n}P_{nk}(x)\int_0^1 P_{nk}(t)(f(t)-g(t))^2dt\\
&\quad+(n+1)\sum_{k=0}^{n}P_{nk}(x)\int_0^1 P_{nk}(t)(g(t)-g(x))^2dt\\
&\quad+(n+1)\sum_{k=0}^{n}P_{nk}(x)\int_0^1 P_{nk}(t)\left(g(x)-f(t)^2\right)dt\Bigg]\\
&=:\ I_1'+I_2'+I_3',
\end{aligned}
$$

其中 $I_1'=M_n\left((f-g)^2,x\right)$. 由引理 2 和引理 4 知 $\|I_1'\|_M\le\left\|(f-g)^2\right\|_M\le C\|f-g\|_M^2$, $I_3'=(f-g)^2M_n(1,x)$, 由引理 1 和引理 4 知 $\|I_3'\|_M=\left\|(f-g)^2\right\|_M\le C\|f-g\|_M^2$. 利用

$$
g(t)-g(x)=g'(x)(t-x)+\int_x^t(t-x)g''(u)du,
$$

可得出

$$
(g(t)-g(x))^2\le 2[g'(x)(t-x)]^2+2\left[\int_x^t(t-x)g''(u)du\right]^2,
$$

从而

$$
\begin{aligned}
I_2' &\le 2(n+1)\sum_{k=0}^{n}P_{nk}(x)\int_0^1 P_{nk}(t)[g'(x)(t-x)]^2dt\\
&\quad+2(n+1)\sum_{k=0}^{n}P_{nk}(x)\int_0^1 P_{nk}(t)\left(\int_x^t(t-x)g''(u)du\right)^2dt\\
&\le 2(n+1)\sum_{k=0}^{n}P_{nk}(x)\int_0^1 P_{nk}(t)[g'(x)(t-x)]^2dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\quad +2(n+1)\sum_{k=0}^{n}P_{nk}(x)\int_0^1 P_{nk}(t)\left((t-x)^2\theta_{g''}(x)\right)^2dt\\
&= 2(n+1)\sum_{k=0}^{n}P_{nk}(x)\int_0^1 P_{nk}(t)(g'(x))^2(t-x)^2dt\\
&\quad +2(n+1)\sum_{k=0}^{n}P_{nk}(x)\int_0^1 P_{nk}(t)(t-x)^4\theta_{g''}^2(x)dt\\
&\le 2M_n\left((t-x)^2,x\right)(g'(x))^2\\
&\quad +2(n+1)\sum_{k=0}^{n}P_{nk}(x)\int_0^1 P_{nk}(t)(t-x)^2\theta_{g''}^2(x)dt\\
&\le 2M_n\left((t-x)^2,x\right)(g'(x))^2+2M_n\left((t-x)^2,x\right)\theta_{g''}^2(x)\\
&\le \frac{C}{n}(g'(x))^2+\frac{C}{n}\theta_{g''}^2(x),
\end{aligned}
$$

此处用了 $t-x\le 1$. 故 $\|I_2'\|_M\le \frac{C}{n}\|g'\|_M^2+\frac{C}{n}\|g''\|_M^2$. 从而

$$
\|K_{n,2}(f)\|_M\le C\|f-g\|_M^2+\frac{C}{n}\|g'\|_M^2+\frac{C}{n}\|g''\|_M^2+C\|f-g\|_M^2,
$$

由此可得

$$
\begin{aligned}
\|K_{n,2}(f)\|_M &\le C\left(K_1\left(f,\frac{1}{n}\right)_M^2+K_2\left(f,\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_M^2\right)\\
&\le C\left(\omega_1\left(f,\frac{1}{n}\right)_M^2+\omega_2\left(f,\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_M^2\right).
\end{aligned}
$$

4 定理的证明

定理的证明 对于给定的 $\varepsilon>0$, 对任意的 $f(x)\in L_M^*, f(x)\ge 0$ 且不恒为 0. 令 $f_\varepsilon(x)=f(x)+\varepsilon$, 则 $f_\varepsilon(x)\ge\varepsilon$. 取 $P_n(x)=M_n\left(\frac{1}{f_\varepsilon},x\right)$, 显然 $P_n(x)\in\prod_n(+)$. 由 Cauchy-Schwarz 不等式知 $\frac{1}{P_n(x)}\le M_n(f_\varepsilon,x)$. 令 $T_1=\{x\in[0,1],\frac{1}{P_n(x)}\ge f_\varepsilon(x)\}, T_2=[0,1]\backslash T_1$. 对任意的 $x\in T_1$, 有

$$
\begin{aligned}
0 &\le \left\|\frac{1}{P_n}-f_\varepsilon\right\|_{M[T_1]}\le\|M_n(f_\varepsilon)-f_\varepsilon\|_{M[T_1]}\\
&= \left\|(n+1)\sum_{k=0}^{n}P_{nk}(x)\int_0^1 P_{nk}(t)(f_\varepsilon(t)-f_\varepsilon(x))dt\right\|_{M[T_1]}\\
&= \|K_{n,1}(f_\varepsilon)\|_{M[T_1]}\le C\left(\omega_1\left(f_\varepsilon,\frac{1}{n}\right)_{M[T_1]}+\omega_2\left(f_\varepsilon,\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{M[T_1]}\right)\\
&\le C\left(\omega_1\left(f_\varepsilon,\frac{1}{n}\right)_M+\omega_2\left(f_\varepsilon,\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_M\right).
\end{aligned}
$$

对于 $x\in T_2$, 有

$$\begin{aligned}
0 &\le \left\|f_\varepsilon-\frac{1}{P_n}\right\|_{M[T_2]}=\left\|\frac{f_\varepsilon(x)}{P_n(x)}\left(P_n(x)-\frac{1}{f_\varepsilon(x)}\right)\right\|_{M[T_2]}\\
&\le \left\|f_\varepsilon(x)f_\varepsilon(x)\left[M_n\left(\frac{1}{f_\varepsilon},x\right)-\frac{1}{f_\varepsilon(x)}\right]\right\|_{M[T_2]}\\
&\le \left\|f_\varepsilon(x)f_\varepsilon(x)\left[(n+1)\sum_{k=0}^{n}P_{nk}(x)\int_0^1P_{nk}(t)\left(\frac{1}{f_\varepsilon(t)}-\frac{1}{f_\varepsilon(x)}\right)dt\right]\right\|_{M[T_2]}\\
&\le \left\|(n+1)\sum_{k=0}^{n}P_{nk}(x)\int_0^1P_{nk}(t)\frac{f_\varepsilon(x)}{f_\varepsilon(t)}\left(f_\varepsilon(x)-f_\varepsilon(t)\right)dt\right\|_{M[T_2]}\\
&= \left\|(n+1)\sum_{k=0}^{n}P_{nk}(x)\int_0^1P_{nk}(t)\frac{f_\varepsilon^2(x)}{f_\varepsilon(t)}-f_\varepsilon(x)+f_\varepsilon(x)-f_\varepsilon(x)+f_\varepsilon(t)-f_\varepsilon(t)\,dt\right\|_{M[T_2]}\\
&\le \left\|(n+1)\sum_{k=0}^{n}P_{nk}(x)\int_0^1P_{nk}(t)\frac{\left(f_\varepsilon(x)-f_\varepsilon(t)\right)^2}{f_\varepsilon(t)}+\left(f_\varepsilon(x)-f_\varepsilon(t)\right)dt\right\|_{M[T_2]}\\
&\le \frac{1}{\varepsilon}\left\|(n+1)\sum_{k=0}^{n}P_{nk}(x)\int_0^1P_{nk}(t)\left(f_\varepsilon(x)-f_\varepsilon(t)\right)^2dt\right\|_{M[T_2]}\\
&\quad+\left\|(n+1)\sum_{k=0}^{n}P_{nk}(x)\int_0^1P_{nk}(t)\left(f_\varepsilon(x)-f_\varepsilon(t)\right)dt\right\|_{M[T_2]}\\
&\le \frac{1}{\varepsilon}K_{n,2}(f_\varepsilon,x)+K_{n,1}(f_\varepsilon,x)\\
&\le \frac{1}{\varepsilon}C\left(\omega_1\left(f_\varepsilon,\frac{1}{n}\right)_M^2+\omega_2\left(f_\varepsilon,\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_M^2\right)+C\left(\omega_1\left(f_\varepsilon,\frac{1}{n}\right)_M+\omega_2\left(f_\varepsilon,\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_M\right).
\end{aligned}$$

取 $\varepsilon=\left(\omega_1\left(f_\varepsilon,\frac{1}{n}\right)_M+\omega_2\left(f_\varepsilon,\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_M\right)$. 则

$$\left\|f_\varepsilon-\frac{1}{P_n}\right\|_{M[T_2]}\le C\left(\omega_1\left(f_\varepsilon,\frac{1}{n}\right)_M+\omega_2\left(f_\varepsilon,\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_M\right).$$

从而

$$\left\|f_\varepsilon-\frac{1}{P_n}\right\|_M\le\left\|f_\varepsilon-\frac{1}{P_n}\right\|_{M[T_1]}+\left\|f_\varepsilon-\frac{1}{P_n}\right\|_{M[T_2]}\le C\left(\omega_1\left(f_\varepsilon,\frac{1}{n}\right)_M+\omega_2\left(f_\varepsilon,\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_M\right).$$

因此

$$\begin{aligned}
&\left\|f-\frac{1}{P_n}\right\|_M\le\|f-f_\varepsilon\|_M+\left\|f_\varepsilon-\frac{1}{P_n}\right\|_M\\
\le\;&\varepsilon+C\left(\omega_1\left(f_\varepsilon,\frac{1}{n}\right)_M+\omega_2\left(f_\varepsilon,\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_M\right)\le C\left(\omega_1\left(f,\frac{1}{n}\right)_M+\omega_2\left(f,\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_M\right).
\end{aligned}$$

参 考 文 献

[1] 盛宝怀, 周颂平. L_p 范数下多元正系数代数多项式倒数对非负连续函数的逼近 [J]. 高等应用数学学报 A 辑, 2003: 455–466.

[2] 吴从炘, 王廷辅. 奥尔里奇空间及其应用 [M]. 哈尔滨: 黑龙江科学技术出版社, 1983.

[3] Ramazanov A R K. On approximation by polynomials and rational functions in Orlicz spaces[J]. Analysis Mathematic, 1984, 10(2): 117–132.

[4] Wu Garidi. On approximation by polynomials in Orlicz spaces[J]. Approximation Theory Appl., 1991, 7(3): 97–110.

[5] 布和额尔敦. Bernstein-Durrmeyer 算子在 Orlicz 空间的逼近阶 [J]. 内蒙古师大学报, 1997, 26(4): 4–9.

[6] 谢敦礼. 连续正算子逼近的阶 [J]. 杭州大学学报, 1981, 8(2): 142–146

ON APPROXIMATION OF NON-NEGATIVE CONTINUOUS FUNCTION BY RECIPROCALS OF POLYNOMIAL WITH POSITIVE COEFFICIENTS IN ORLICZ SPACES

NIU Tong-tong , WU Garidi

(*College of Mathematics Science, Inner Mongolia Normal University, Hohhot 010022, China*)

Abstract: In this paper, we study the approximation problem of non-negative continuous functions by reciprocals of Bernstein-Durrmeyer polynomial in Orlicz spaces by using K-functional and modulus of smoothness, and the results are more significant than the corresponding results of Lp space.

Keywords: reciprocals of polynomials; Benstein-Durrmeyer polynomials operator; Orlicz Space; approximation

2010 MR Subject Classification: 41A20; 41A25