Vol. 34 (2014)
No. 1

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

一个周期函数不等式及其应用

方牛发，朱保成
(西南大学数学与统计学院, 重庆 400715)

摘 要: 本文研究一类特殊的周期函数, 利用 Fourier 级数的方法, 获得了关于这类周期函数的一个积分不等式. 此函数积分不等式等价于著名的关于平面两凸集混合面积的 Minkowski 不等式.

关 键 词: Minkowski 混合面积; Minkowski 不等式; 周期函数; 等周不等式
MR(2010) **主题分类号**: 52A10; 52A38; 52A39 **中 图 分 类 号**: O186.5
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2014)01-0155-06

不等式 (包括代数不等式, 几何不等式, 函数微分不等式以及积分不等式) 的研究具有很长的历史, 数学和物理的许多自然现象都是用不等式来刻划的. 几何不等式中最经典的不等式应该是等周不等式. 分析中有很多非常重要的不等式, 如 Fenchel 不等式, Hölder 不等式, Hilbert 不等式, Schwartz-Christoffel 不等式等 (参见文献 [1, 7]). 著名的 Sobolev 不等式是连接几何与分析的一个基本的不等式. 这些经典的不等式有非常密切的联系, 如张高勇证明了等周不等式与仿射 Sobolev 不等式等价 (参见文献 [18]).

关于等周不等式的证明, 有很多精彩而巧妙的方法 (参见文献 [1–3, 9–11, 14–17]). Santaló 利用 R^2 中两凸集的混合面积的 Minkowski 不等式证明了等周不等式 (参见文献 [4–6, 13]). 周家足定义了两凸集的 Minkowski 对称混合等似亏格, 刻画了两凸集的等似程度. 当其中一凸集是圆周时, Minkowski 对称混合等似亏格就是等周亏格, Minkowski 等似不等式就是经典的等周不等式 (参见文献 [16]).

本文先研究满足 $f(x)+f''(x)>0$ 的周期函数, 利用周期函数的 Fourier 展开式, 我们得到了一个关于这类周期函数的积分不等式, 即定理 1.2. 我们发现, 我们得到的这个周期函数的积分不等式与著名的关于平面两凸集混合面积的 Minkowski 不等式等价, 即定理 2.2.

1 关于周期函数的一个积分不等式

若 $f(x)$ 是以 $2l$ 为周期的可积函数, 通过变量置换 $\frac{\pi x}{l}=t$ 或 $x=\frac{lt}{\pi}$ 可以把 $f(x)$ 变换成以 2π 为周期的函数 $F(t)=f(\frac{lt}{\pi})=f(x)$. 因而不妨设周期函数 $f(x)$ 的周期为 2π, $f(x)$ 的 Fourier 展开式为

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),\tag{1.1}$$

*收稿日期: 2012-10-14 接收日期: 2013-01-04
作者简介: 方牛发 (1988–), 男, 安徽安庆, 硕士, 主要研究方向: 积分几何. E-mail: nfafang@163.com.
通讯作者: 朱保成

其中

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx,\ n = 0, 1, 2, \cdots, \tag{1.2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx,\ n = 1, 2, \cdots. \tag{1.3}$$

设 $f(x)$, $g(x)$ 是以 2π 为周期的可积函数, 则 $f(x)$, $g(x)$ 的 Fourier 展开式分别为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx),$$

$$g(x) \sim \frac{a_0'}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n'\cos nx + b_n'\sin nx),$$

其 Parseval 恒等式分别为

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx = \frac{1}{2}|a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2),$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)dx = \frac{1}{2}a_0a_0' + \sum_{n=1}^{\infty}(a_na_n' + b_nb_n').$$

并且上述 Parseval 恒等式右端的级数绝对收敛 (参见文献 [8]).

为了证明本文的主要定理我们先引入以下引理.

引理 1.1 设 $f(x)$ 是连续函数且 $\int_a^b f(x)dx = 0$, 若对任意的 $g(x) > 0$, $x \in [a,\ b]$, 都有 $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$, 则对任意 $x \in [a,\ b]$, 都有 $f(x) = 0$.

证 由于 $f(x)$ 是连续函数, 令 $A = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}$, 那么对任意的 $\varepsilon > 0$, 取 $g(x) = A + \varepsilon - f(x) > 0$, 则

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)dx &= \int_a^b (A + \varepsilon - f(x))\, f(x)dx \\ &= \int_a^b (A+\varepsilon)f(x)dx - \int_a^b f^2(x)dx = -\int_a^b f^2(x)dx = 0,\end{aligned}$$

显然对任意 $x \in [a,\ b]$, 都有 $f(x) = 0$, 证毕.

以下是本文的主要结果.

定理 1.2 设 $f_i(x)$ $(i = 1, 2)$ 是以 2π 为周期的函数, 满足 $f_i(x) > 0$ 且 $f_i(x) + f_i''(x) > 0$, 则

$$\int_0^{2\pi} f_1(f_2 + f_2'')dx\int_0^{2\pi} f_2(f_1 + f_1'')dx \geq \int_0^{2\pi} f_1(f_1 + f_1'')dx\int_0^{2\pi} f_2(f_2 + f_2'')dx \tag{1.4}$$

等号成立当且仅当 $f_1(x) = \lambda f_2(x)$, $\lambda > 0$.

证　令 $L_i = \int_0^{2\pi} f_i(x)dx$, $g(x) = \frac{f_1(x)}{L_1} - \frac{f_2(x)}{L_2}$, $g(x)$ 的 Fourier 展开式

$$g(x) = \frac{f_1(x)}{L_1} - \frac{f_2(x)}{L_2} \sim \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx. \tag{1.5}$$

求 $g(x)$ 二阶导数

$$g''(x) = \frac{f_1''(x)}{L_1} - \frac{f_2''(x)}{L_2} \sim \sum_{k=1}^{\infty} (-k^2)(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx), \tag{1.6}$$

由 (1.5) 和 (1.6) 式得

$$g(x) + g''(x) = \frac{f_1(x) + f_1''(x)}{L_1} - \frac{f_2(x) + f_2''(x)}{L_2} \tag{1.7}$$

$$\sim \sum_{k=1}^{\infty} (1 - k^2)(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx). \tag{1.8}$$

由 Parseval 恒等式得

$$\int_0^{2\pi} g(x)(g(x) + g''(x))dx = \pi \sum_{k=1}^{\infty} (1 - k^2)(\alpha_k^2 + \beta_k^2), \tag{1.9}$$

显然 (1.9) 式小于等于 0, 等号成立当且仅当 $\alpha_k = \beta_k = 0\ (k \neq 1)$. 即

$$g(x) = \frac{f_1(x)}{L_1} - \frac{f_2(x)}{L_2} = \alpha_1 \cos x + \beta_1 \sin x. \tag{1.10}$$

由 (1.5) 和 (1.7) 式知 (1.9) 式等价于

$$\int_0^{2\pi} \frac{f_1(f_1 + f_1'')}{L_1^2}dx + \int_0^{2\pi} \frac{f_2(f_2 + f_2'')}{L_2^2}dx - \int_0^{2\pi} \frac{f_1(f_2 + f_2'')}{L_1 L_2}dx - \int_0^{2\pi} \frac{f_2(f_1 + f_1'')}{L_1 L_2}dx \leq 0.$$

即

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{f_1(f_2 + f_2'') + f_2(f_1 + f_1'')}{L_1 L_2}dx &\geq \int_0^{2\pi} \frac{f_1(f_1 + f_1'')}{L_1^2}dx + \int_0^{2\pi} \frac{f_2(f_2 + f_2'')}{L_2^2}dx \\ &\geq 2\sqrt{\int_0^{2\pi} \frac{f_1(f_1 + f_1'')}{L_1^2}dx \int_0^{2\pi} \frac{f_2(f_2 + f_2'')}{L_2^2}dx}, \end{aligned}$$

其中第二个不等号成立当且仅当

$$\int_0^{2\pi} \frac{f_1(f_1 + f_1'')}{L_1^2}dx = \int_0^{2\pi} \frac{f_2(f_2 + f_2'')}{L_2^2}dx, \tag{1.11}$$

进一步得

$$\left(\int_0^{2\pi} (f_1(f_2 + f_2'') + f_2(f_1 + f_1''))dx\right)^2 \geq 4\int_0^{2\pi} f_1(f_1 + f_1'')dx \int_0^{2\pi} f_2(f_2 + f_2'')dx. \tag{1.12}$$

利用分步积分得

$$\int_0^{2\pi} f_1(f_2+f_2'')dx=\int_0^{2\pi} f_2(f_1+f_1'')dx, \tag{1.13}$$

所以 (1.12) 等价于

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f_1(f_2+f_2'')dx\int_0^{2\pi} f_2(f_1+f_1'')dx&=\int_0^{2\pi} f_1(f_2+f_2'')dx\int_0^{2\pi} f_1(f_2+f_2'')dx\\&\geq\int_0^{2\pi} f_1(f_1+f_1'')dx\int_0^{2\pi} f_2(f_2+f_2'')dx.\end{aligned}$$

以上不等号成立条件均为当且仅当 (1.10) 和 (1.11) 同时成立, 即

$$\begin{aligned}&f_1(x)=L_1(\alpha_1\cos x+\beta_1\sin x)+\frac{L_1}{L_2}f_2(x),\\&\int_0^{2\pi} f_1(x)(f_1(x)+f_1''(x))dx=\frac{L_1^2}{L_2^2}\int_0^{2\pi} f_2(x)(f_2(x)+f_2''(x))dx.\end{aligned}$$

整理可得

$$\int_0^{2\pi}(\alpha_1\cos x+\beta_1\sin x)(f_2(x)+f_2''(x))dx=0,$$

由引理 1.1 则 $g(x)=\frac{f_1(x)}{L_1}-\frac{f_2(x)}{L_2}=\alpha_1\cos x+\beta_1\sin x=0$, 也即 $f_1(x)=\frac{L_1}{L_2}f_2(x)$. 证毕.

2 关于混合面积 Minkowski 不等式

欧氏平面 R^2 中的点集 K 称为凸集, 如果任意两点 $x,y\in K$ 及 $0\leq\lambda\leq 1$, $\lambda x+(1-\lambda)y\in K$. 两凸集 K 与 L 的 Minkowski 加及数乘分别定义为

$$\begin{aligned}&K+L=\{x+y:\ x\in K,\ y\in L\},\\&\lambda K=\{\lambda x:\ x\in K\}\quad(\lambda\geq 0).\end{aligned}$$

设 K 为平面内一有界闭凸域, 任选一坐标系 xOy, 从原点 O 引出一条射线 OR, 作垂直于 OR 且与 K 相遇的任一直线 $G_1(p_1,\ \phi)$, 记 p 为

$$p=\sup\{p_1:\ G_1(p_1,\phi)\cap K\neq\varnothing\},$$

平面上与 p 相应的直线 $G(p,\ \phi)$ 为 K 的支持线, 称为 K 沿 ϕ 方向的支持线. 而函数 $p(\phi)$ 即为凸集 K 的支持函数. 则 K 的周长和面积的可表示为

$$L=\int_{\partial k}ds=\int_0^{2\pi}(p+p'')d\phi=\int_0^{2\pi}pd\phi, \tag{2.1}$$

$$A=\frac{1}{2}\int_{\partial K}pds=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}p(p+p'')d\phi. \tag{2.2}$$

设 K_1, K_2 为两平面凸集, 分别关于参考点 O_1, O_2 的支持函数分别为 $p_1(\phi)$, $p_2(\phi)$. 设 $p_1(\phi)$, $p_2(\phi)\in C^2$, 由于凸集是由支持函数所唯一确定的 (吴大任就凸集边界为卵形线

情形给出详细论证, 参见文献 [12]), 故而考虑函数 $p(\phi) = p_1(\phi) + p_2(\phi)$. 由于 $p + p'' = (p_1 + p_1'') + (p_2 + p_2'') > 0$, 所以 $p(\phi)$ 必为一凸集的支持函数. 以 $p(\phi) = p_1(\phi) + p_2(\phi)$ 为支持函数的凸集的面积为

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [p_1 + p_2]\left[(p_1 + p_2) + (p_1 + p_2)''\right] d\phi = A_1 + A_2 + 2A_{12}, \tag{2.3}$$

其中

$$A_{12} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (p_1 p_2 - p_1' p_2') d\phi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} p_1(p_2 + p_2'') d\phi \tag{2.4}$$

称为凸集 K_1 与 K_2 的 Minkowski 混合面积.

可以验证

$$A_{12} = A_{21}. \tag{2.5}$$

定义 2.1 若 $p_1(\phi)$, $p_2(\phi)$ 满足 $p_1(\phi) = \lambda p_2(\phi)$, $\lambda > 0$, 则称 K_1 与 K_2 位似.

定理 2.2 设 K_i $(i = 1, 2)$ 为平面凸集, 周长记为 L_i, 面积记为 A_i, 支持函数记为 $p_i(\phi)$, 记 K_1, K_2 的混合面积为 A_{12}, 则有

$$A_{12}^2 \geq A_1 A_2 \tag{2.6}$$

等号成立当且仅当 K_1 与 K_2 位似.

证 不失一般性, 将确定支持函数的参考点选在凸域内, 则 $p_i(\phi) > 0$. 由定理 1.2 知

$$\int_0^{2\pi} p_1(p_2 + p_2'') d\phi \int_0^{2\pi} p_2(p_1 + p_1'') d\phi \geq \int_0^{2\pi} p_1(p_1 + p_1'') d\phi \int_0^{2\pi} p_2(p_2 + p_2'') d\phi, \tag{2.7}$$

由 (2.2)–(2.5) 式知 (2.6) 式等价于 (2.7) 式. 证毕.

特别地, 当 K_1 为半径为 r 的圆盘时, $A_{12} = \frac{r}{2} L_2$, 由 (2.6) 式便得到

$$A_{12}^2 - A_1 A_2 = \frac{r^2}{4}(L_2^2 - 4\pi A_2) \geq 0$$

等号成立当且仅当 K_2 为圆盘.

即经典的等周不等式 $L^2 \geq 4\pi A$ 是关于混合面积的 Minkowski 不等式的直接推论.

参 考 文 献

[1] Burago Y, Zalgaller V. Geometric inequalities[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1988.

[2] Osserman R. The isoperimetric inequalities[J]. Bull. Amer. Math. Soc., 1978, 84 (6) : 1182–1238.

[3] Osserman R. Bonnesen-style isoperimetric inequalities[J]. Amer. Math. Monthly, 1979, 86 (1): 1–29.

[4] Blaschke W. Vorlesungen uber integralgeometrie, deutsch (3rd Ed.) [M]. Berlin: Verlag Wiss, 1955.

[5] Bonnesen T. Les problemes des isoperimetres et des isepiphanes[M]. Paris: Gauthier-Villars, 1920.

[6] Flanders H. A proof of Minkowski's inequality for convex curves[J]. Amer. Math. Monthly, 1968, 75 (6), 581–593.

[7] Hardy G, Littlewood J, Pólya G. Inequalities (2nd Ed.) [M]. New York: Cambridge University Press, 1952.

[8] 潘文杰. 傅里叶分析及其应用 [M]. 北京: 北京大学出版社, 2002.

[9] 任德麟. 积分几何引论 [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1988.

[10] 苏步青. 微分几何五讲 [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1979.

[11] 沈一兵. 整体微分几何初步 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2009.

[12] 吴大任. 微分几何讲义 (第 4 版)[M]. 北京: 人民教育出版社, 1981.

[13] Santaló L. Integral geometry and geometric probability[M]. New York: Addison-Wesley Publishing Company, 1976.

[14] Zhou Jiazu, Xia Yunwei, Zeng Chunna. Some new Bonnesen-style inequalities[J]. J. Korean Math. Soc., 2011, 48 (2): 421–430.

[15] 赵亮, 马磊, 周家足. Wiringer 不等式的一个几何应用 [J]. 数学杂志, 2011, 31 (5): 887–890.

[16] 周家足, 任德麟. 从积分几何的观点看几何不等式 [J]. 数学物理学报, 2010, 30A (5): 1322–1339.

[17] 周家足. 平面 Bonnesen 型不等式 [J]. 数学学报, 2006, 50 (6): 1397-1402.

[18] Zhang Gaoyong. The affine Sobolev inequality[J]. J. Diff. Geom., 1999, 53 (1): 183–202.

AN INEQUALITY OF PERIODIC FUNCTIONS AND ITS APPLICATION

FANG Niu-fa, ZHU Bao-cheng

(*School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China*)

Abstract: In this paper, we investigate some special periodic functions and obtain an integral inequality for those periodic functions by Fourier series. The integral inequality obtained is equivalent to the well-known Minkowski inequality for mixed area of two planar convex sets.

Keywords: Minkowski mixed area; Minkowski inequality; periodic function; isoperimetric inequality

2010 MR Subject Classification: 52A10; 52A38; 52A39